

5ª edición

Ingeniería de control moderna

Katsuhiko Ogata

PEARSON

Ingeniería de control moderna

Ingeniería de control moderna

Quinta edición

Katsuhiko Ogata

Traducción

Sebastián Dormido Canto
Profesor Titular de Ingeniería de Sistemas y Automática, UNED

Raquel Dormido Canto
Profesora Titular de Ingeniería de Sistemas y Automática, UNED

Revisión técnica

Sebastián Dormido Bencomo
Catedrático de Ingeniería de Sistemas y Automática, UNED

Revisión técnica para Latinoamérica

Amadeo Mariani
Profesor Titular de Sistemas de Control Moderno
UTN Regional Buenos Aires Regional/HAEDO

Juan Eduardo Picco
Profesor Titular de la materia Sistemas de Control, Departamento de Ingeniería Electrónica
Universrida Tecnológica Regional Córdoba, Provincia de Córdoba, República Argentina
Profesor Titular de la materia de Teoría de Control, Departamento de Ingeniería Electrónica
Instituto Universitario Aeronáutico, Provincia de Córdoba, República Argentina

Ricardo Julián Mantz
Profesor Titular Dedicación Exclusiva, Cátedra Control Moderno, Ing. Electrónica
Universidad Nacional de la Plata, Facultad de Ingeniería
La Plata, Provincia de Buenos Aires, Argentina

Jorge Raúl Rossello
Profesor Titular de la Cátedra Sistemas de Control 1
Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional de la Matanza
San Justo, Provincia de Buenos Aires, Argentina

Prentice Hall
es un sello editorial de



Harlow, England • London • New York • Boston • San Francisco • Toronto • Sydney • Singapore • Hong Kong
Tokyo • Seoul • Taipei • New Delhi • Cape Town • Madrid • Mexico City • Amsterdam • Munich • Paris • Milan

Datos de catalogación bibliográfica

INGENIERÍA DE CONTROL MODERNA

Katsuhiko Ogata

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2010
ISBN: 978-84-8322-660-5

Materia: Ingeniería del control automático, 681.5

Formato: 195 × 250 mm. Páginas: 904

Ribera del Loira, 28
28042 Madrid (España)
www.pearsoneducacion.com

ISBN: 978-84-8322-660-5
Depósito legal: M

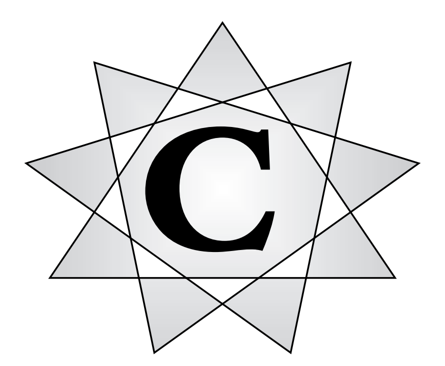
Equipo editorial:
Editor: Miguel Martín-Romo
Técnico editorial: Esther Martín

Equipo de producción:
Director: José Antonio Clares
Técnico: Isabel Muñoz

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de Pearson Educación S.A.

Composición: Copibook
Impresión:

IMPRESO EN ESPAÑA - *PRINTED IN SPAIN*
Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos



Contenido



Prólogo

Este libro introduce conceptos importantes en el análisis y diseño de sistemas de control. Los lectores encontrarán un libro de texto claro y comprensible para seguir un curso en la universidad sobre sistemas de control. Está escrito para estudiantes de ingeniería mecánica, eléctrica, aeroespacial o química. Se supone que el lector ha completado los siguientes prerrequisitos: cursos de carácter introductorio sobre ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace, análisis vectorial-matricial, análisis de circuitos, mecánica y termodinámica.

Las revisiones principales hechas en esta edición son como sigue:

- Se ha ampliado la utilización de MATLAB para obtener la respuesta de sistemas de control a diferentes entradas.
- Se demuestra la utilidad del enfoque de optimización computacional con MATLAB.
- A lo largo de todo el libro se han añadido nuevos problemas como ejemplos.
- Con el fin de proporcionar espacio a temas más importantes se han suprimido ciertos materiales de ediciones previas que tienen una importancia secundaria. Los grafos de flujo de señal se han eliminado del libro. También se suprimió un capítulo sobre la transformada de Laplace. En su lugar se presentan las tablas de transformada de Laplace y el desarrollo en fracciones simples con MATLAB en los Apéndices A y B respectivamente.
- En el Apéndice C se da un corto resumen sobre el análisis vectorial-matricial.

Esta edición de *Ingeniería de Control Moderna* está organizada en diez capítulos. El contenido del libro es el siguiente: El Capítulo 1 presenta una introducción a los sistemas de control. El Capítulo 2 trata el modelado matemático de sistemas de control. Se presenta también en este capítulo una técnica de linealización de modelos matemáticos no lineales. El Capítulo 3 analiza el modelado matemático de los sistemas mecánicos y eléctricos. El Capítulo 4 trata el modelado de los sistemas fluídicos (tales como sistemas de nivel de líquido, sistemas neumáticos y sistemas hidráulicos) y sistemas térmicos.

El Capítulo 5 trata el análisis de la respuesta transitoria y el estado estacionario de los sistemas de control. MATLAB se utiliza extensivamente para el análisis de la respuesta transitoria. El capítulo presenta el criterio de estabilidad de Routh para el análisis de estabilidad de los sistemas de control. También se estudia el criterio de estabilidad de Hurwitz.

El Capítulo 6 aborda el análisis y diseño de sistemas de control mediante el lugar de las raíces, incluyendo los sistemas con realimentación positiva y los sistemas condicionalmente estables. Se estudia con detalle la representación del lugar de las raíces con MATLAB. Se estudia el método del lugar de las raíces para el diseño de compensadores de adelanto, retardo y retardo-adelanto.

El Capítulo 7 presenta el análisis y diseño de sistemas de control mediante la respuesta en frecuencia. Se trata el criterio de estabilidad de Nyquist de una forma fácilmente comprensible. Se analiza el método de los diagramas de Bode para el diseño de compensadores de adelanto, retardo y retardo-adelanto.

El Capítulo 8 estudia los controladores PID básicos y modificados. Se presentan con cierto detalle los métodos computacionales (en MATLAB) para obtener valores óptimos de los parámetros de los controladores que satisfacen ciertos requisitos de las características de la respuesta escalón.

El Capítulo 9 presenta un análisis básico de los sistemas de control en el espacio de estados. Se introducen los conceptos de controlabilidad y observabilidad.

El Capítulo 10 analiza el diseño de sistemas de control en el espacio de estados. El estudio incluye la asignación de polos, observadores de estado y control óptimo cuadrático. Al final del capítulo se presenta un análisis introductorio de los sistemas de control robusto.

El libro se ha estructurado con la finalidad de facilitar la comprensión gradual de la teoría del control al estudiante. Se ha tratado de evitar cuidadosamente razonamientos con un fuerte contenido matemático en la presentación del material. Se proporcionan demostraciones matemáticas cuando contribuyen a la comprensión de los temas presentados.

Se ha realizado un esfuerzo especial para proporcionar ejemplos en puntos estratégicos de forma que el lector obtenga una mejor comprensión de la materia que se analiza. Además, se ofrecen al final de cada capítulo, excepto en el Capítulo 1, una serie de problemas resueltos (problemas de tipo A). Se anima al lector a que estudie con cuidado todos estos problemas para obtener una comprensión más profunda de los temas analizados. Además, se proponen muchos problemas (sin solución) al final de cada capítulo, excepto en el Capítulo 1. Los problemas no resueltos (problemas de tipo B) se pueden utilizar para que el alumno los resuelva en casa o como parte de un examen.

Si este libro se usa como texto para un curso semestral (56 horas de clase) se puede cubrir la mayor parte del material omitiendo ciertas partes. Debido a la abundancia de problemas ejemplos y problemas resueltos (problemas A) que pueden responder a muchas de las posibles preguntas que el lector pueda plantearse, este libro puede también servir como un texto de auto estudio para aquellos ingenieros que ya trabajan y que desean estudiar teoría de control básica.

Quisiera expresar mi agradecimiento a los siguientes revisores de esta edición del libro: Mark Campbell, Cornell University; Henry Sodano, Arizona State University; y Atul G. Kelkar, Iowa State University. Finalmente deseo expresar mi más sincero reconocimiento a Ms. Alice Dworkin, Associate Editor, Mr. Scout Disanno, Señor Managing Editor, y a todas las personas que han estado involucradas en este proyecto, por la rapidez y el excelente trabajo de producción de este libro.

Katsuhiko Ogata



Introducción a los sistemas de control

1-1 Introducción

Las teorías de control que se utilizan habitualmente son la teoría de control clásica (también denominada teoría de control convencional), la teoría de control moderno y la teoría de control robusto. Este libro presenta el tratamiento del análisis y diseño de sistemas de control basado en la teoría de control clásica y teoría de control moderno. En el Capítulo 10 se incluye una breve introducción a la teoría de control robusto.

El control automático ha desempeñado un papel vital en el avance de la ingeniería y la ciencia. El control automático se ha convertido en una parte importante e integral en los sistemas de vehículos espaciales, en los sistemas robóticos, en los procesos modernos de fabricación y en cualquier operación industrial que requiera el control de temperatura, presión, humedad, flujo, etc. Es deseable que la mayoría de los ingenieros y científicos estén familiarizados con la teoría y la práctica del control automático.

Este libro pretende ser un texto en sistemas de control para un nivel avanzado en el bachillerato o en la universidad. Todos los materiales necesarios se incluyen en el libro. La matemática relacionada con las transformadas de Laplace y el análisis vectorial y matricial se presentan en apéndices separados.

Breve revisión de los desarrollos históricos de la teoría y práctica del control. El primer trabajo significativo en control automático fue el regulador de velocidad centrífugo de James Watt para el control de la velocidad de una máquina de vapor, en el siglo dieciocho. Minorsky, Hazen y Nyquist, entre muchos otros, aportaron trabajos importantes en las

etapas iniciales del desarrollo de la teoría de control. En 1922, Minorsky trabajó en controladores automáticos para el guiado de embarcaciones, y mostró que la estabilidad puede determinarse a partir de las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. En 1932, Nyquist diseñó un procedimiento relativamente simple para determinar la estabilidad de sistemas en lazo cerrado, a partir de la respuesta en lazo abierto a entradas sinusoidales en estado estacionario. En 1934, Hazen, quien introdujo el término *servomecanismos* para los sistemas de control de posición, analizó el diseño de los servomecanismos con relé, capaces de seguir con precisión una entrada cambiante.

Durante la década de los cuarenta, los métodos de la respuesta en frecuencia (especialmente los diagramas de Bode) hicieron posible que los ingenieros diseñaran sistemas de control lineales en lazo cerrado que cumplieran los requisitos de comportamiento. En los años cuarenta y cincuenta muchos sistemas de control industrial utilizaban controladores PID para el control de la presión, de la temperatura, etc. A comienzos de la década de los cuarenta Ziegler y Nichols establecieron reglas para sintonizar controladores PID, las denominadas reglas de sintonía de Ziegler-Nichols. A finales de los años cuarenta y principios de los cincuenta, se desarrolló por completo el método del lugar de las raíces propuesto por Evans.

Los métodos de respuesta en frecuencia y del lugar de las raíces, que forman el núcleo de la teoría de control clásica, conducen a sistemas estables que satisfacen un conjunto más o menos arbitrario de requisitos de comportamiento. En general, estos sistemas son aceptables pero no óptimos desde ningún punto de vista. Desde el final de la década de los cincuenta, el énfasis en los problemas de diseño de control se ha desplazado del diseño de uno de los posibles sistemas que funciona adecuadamente al diseño de un sistema óptimo respecto de algún criterio.

Conforme las plantas modernas con muchas entradas y salidas se vuelven más y más complejas, la descripción de un sistema de control moderno requiere una gran cantidad de ecuaciones. La teoría de control clásica, que trata de los sistemas con una entrada y una salida, pierde su potencialidad cuando se trabaja con sistemas con entradas y salidas múltiples. Hacia 1960, debido a la disponibilidad de las computadoras digitales fue posible el análisis en el dominio del tiempo de sistemas complejos. La teoría de control moderna, basada en el análisis en el dominio del tiempo y la síntesis a partir de variables de estados, se ha desarrollado para manejar la creciente complejidad de las plantas modernas y los requisitos cada vez más exigentes sobre precisión, peso y coste en aplicaciones militares, espaciales e industriales.

Durante los años comprendidos entre 1960 y 1980, se investigó a fondo el control óptimo tanto de sistemas determinísticos como estocásticos, así como el control adaptativo y con aprendizaje de sistemas complejos. Desde la década de los ochenta hasta la de los noventa, los avances en la teoría de control moderna se centraron en el control robusto y temas relacionados.

La teoría de control moderna se basa en el análisis en el dominio temporal de los sistemas de ecuaciones diferenciales. La teoría de control moderna simplificó el diseño de los sistemas de control porque se basa en un modelo del sistema real que se quiere controlar. Sin embargo, la estabilidad del sistema depende del error entre el sistema real y su modelo. Esto significa que cuando el controlador diseñado basado en un modelo se aplica al sistema real, éste puede no ser estable. Para evitar esta situación, se diseña el sistema de control definiendo en primer lugar el rango de posibles errores y después diseñando el controlador de forma que, si el error del sistema está en dicho rango, el sistema de control diseñado permanezca estable. El método de diseño basado en este principio se denomina teoría de control robusto. Esta teoría incorpora tanto la aproximación de respuesta en frecuencia como la del dominio temporal. Esta teoría es matemáticamente muy compleja.

Como esta teoría requiere una base matemática de nivel de licenciados, la inclusión de la teoría de control robusto en este libro está limitada únicamente a aspectos introductorios. El lector interesado en detalles sobre la teoría de control robusto debería cursar previamente un curso de control de una licenciatura en una universidad.

Definiciones. Antes de analizar los sistemas de control, deben definirse ciertos términos básicos.

Variable controlada y señal de control o variable manipulada. La variable *controlada* es la cantidad o condición que se mide y controla. La *señal de control* o variable *manipulada* es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada. Normalmente, la variable controlada es la salida del sistema. *Controlar* significa medir el valor de la variable controlada del sistema y aplicar la variable manipulada al sistema para corregir o limitar la desviación del valor medido respecto del valor deseado.

En el estudio de la ingeniería de control, es necesario definir términos adicionales que se precisan para describir los sistemas de control.

Plantas. Una planta puede ser una parte de un equipo, tal vez un conjunto de los elementos de una máquina que funcionan juntos, y cuyo objetivo es efectuar una operación particular. En este libro se llamará planta a cualquier objeto físico que se va a controlar (como un dispositivo mecánico, un horno de calefacción, un reactor químico o una nave espacial).

Procesos. El *Diccionario Merriam-Webster* define un proceso como una operación o un desarrollo natural progresivamente continuo, marcado por una serie de cambios graduales que se suceden unos a otros de una forma relativamente fija y que conducen a un resultado o propósito determinados; o una operación artificial o voluntaria que se hace de forma progresiva y que consta de una serie de acciones o movimientos controlados, sistemáticamente dirigidos hacia un resultado o propósito determinado. En este libro se llamará *proceso* a cualquier operación que se va a controlar. Algunos ejemplos son los procesos químicos, económicos y biológicos.

Sistemas. Un sistema es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado. Un sistema no está necesariamente limitado a los sistemas físicos. El concepto de sistema se puede aplicar a fenómenos abstractos y dinámicos, como los que se encuentran en la economía. Por tanto, la palabra sistema debe interpretarse en un sentido amplio que comprenda sistemas físicos, biológicos, económicos y similares.

Perturbaciones. Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina *interna*, mientras que una perturbación *externa* se genera fuera del sistema y es una entrada.

Control realimentado. El control realimentado se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia, y lo realiza tomando en cuenta esta diferencia. Aquí sólo se especifican con este término las perturbaciones impredecibles, ya que las perturbaciones predecibles o conocidas siempre pueden compensarse dentro del sistema.

1-2 Ejemplos de sistemas de control

En esta sección se presentarán algunos ejemplos de sistemas de control.

Sistema de control de velocidad. El principio básico del regulador de velocidad de Watt para una máquina se ilustra en el diagrama esquemático de la Figura 1-1. La cantidad de combustible que se admite en la máquina se ajusta de acuerdo con la diferencia entre la velocidad de la máquina que se pretende y la velocidad real.

La secuencia de acciones puede describirse del modo siguiente: el regulador de velocidad se ajusta de modo que, a la velocidad deseada, no fluya aceite a presión en ningún lado del cilindro de potencia. Si la velocidad real cae por debajo del valor deseado debido a una perturbación, la disminución de la fuerza centrífuga del regulador de velocidad provoca que la válvula de control se mueva hacia abajo, aportando más combustible, y la velocidad del motor aumenta hasta alcanzar el valor deseado. Por otra parte, si la velocidad del motor aumenta por encima del valor deseado, el incremento en la fuerza centrífuga del regulador provoca que la válvula de control se mueva hacia arriba. Esto disminuye el suministro de combustible, y la velocidad del motor se reduce hasta alcanzar el valor deseado.

En este sistema de control de velocidad, la planta (el sistema controlado) es la máquina y la variable controlada es la velocidad de la misma. La diferencia entre la velocidad deseada y la velocidad real es la señal de error. La señal de control (la cantidad de combustible) que se va a aplicar a la planta (la máquina) es la señal de actuación. La entrada externa que se aplica para alterar la variable controlada es la perturbación. Un cambio inesperado en la carga es una perturbación.

Sistema de control de temperatura. La Figura 1-2 muestra un diagrama esquemático del control de temperatura de un horno eléctrico. La temperatura del horno eléctrico se mide mediante un termómetro, que es un dispositivo analógico. La temperatura analógica se convierte a una temperatura digital mediante un convertidor A/D. La temperatura digital se introduce en un controlador mediante una interfaz. Esta temperatura digital se compara con la temperatura de entrada programada, y si hay una discrepancia (error) el controlador envía una señal al

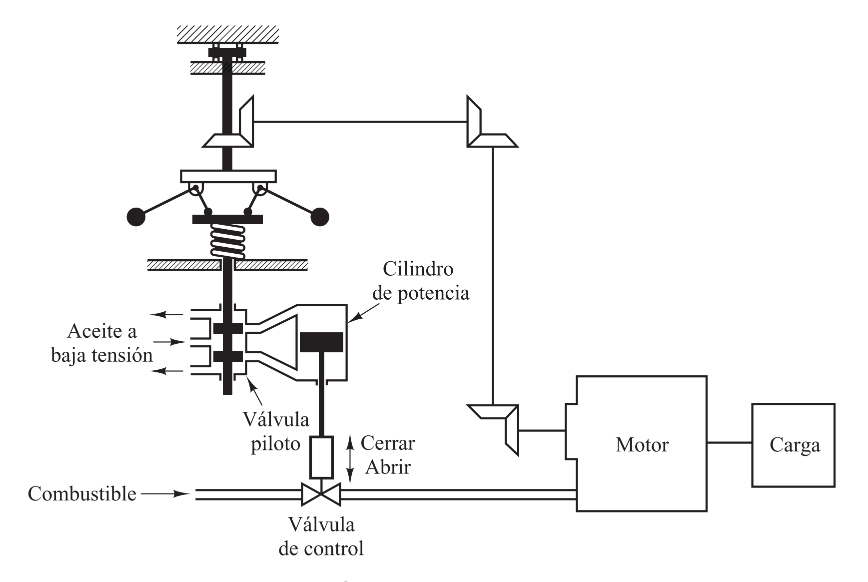


Figura 1-1. Sistema de control de velocidad.

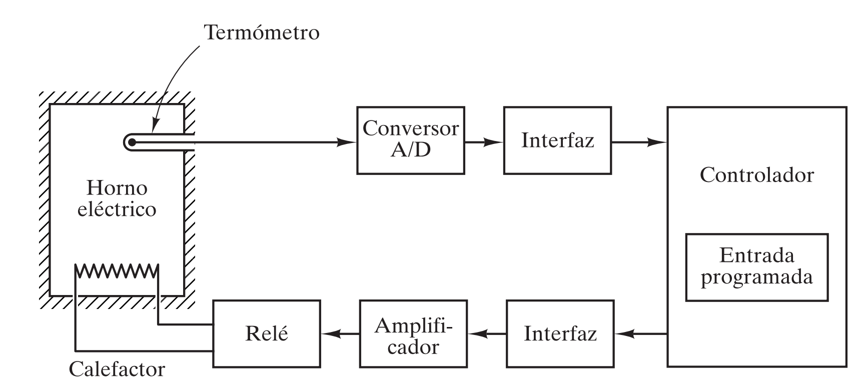


Figura 1-2. Sistema de control de temperatura.

calefactor, a través de una interfaz, amplificador y relé, para hacer que la temperatura del horno adquiera el valor deseado.

Sistemas empresariales. Un sistema empresarial está formado por muchos grupos. Cada tarea asignada a un grupo representará un elemento dinámico del sistema. Para la correcta operación de este sistema deben establecerse métodos de realimentación para informar de los logros de cada grupo. El acoplamiento cruzado entre los grupos funcionales debe reducirse a un mínimo para evitar retardos de tiempo que no son deseables en el sistema. Cuanto más pequeño sea dicho acoplamiento, más regular será el flujo de señales y materiales de trabajo.

Un sistema empresarial es un sistema en lazo cerrado. Un buen diseño del mismo reducirá el control administrativo requerido. Obsérvese que las perturbaciones en este sistema son la falta de personal o de materiales, la interrupción de las comunicaciones, los errores humanos, etc.

El establecimiento de un buen sistema de estimación, basado en estadísticas, es imprescindible para lograr una administración adecuada. Obsérvese que es un hecho bien conocido que el comportamiento de tal sistema puede mejorar mediante el uso de tiempo de previsión o *anticipación*.

Con el propósito de aplicar la teoría de control para mejorar el comportamiento de este sistema, se debe representar la característica dinámica de los grupos componentes del sistema mediante un conjunto de ecuaciones relativamente simples.

Aunque es ciertamente un problema difícil obtener representaciones matemáticas de los grupos componentes, la aplicación de técnicas de optimización a los sistemas empresariales mejora significativamente el comportamiento de tales sistemas.

Considérese, como ejemplo, una estructura organizativa en ingeniería que está constituida por una serie de grupos tales como gestión, investigación y desarrollo, diseño preliminar, experimentos, diseño de producto y delineación, fabricación y ensamblaje y verificación. Estos grupos se interconectan para constituir el sistema completo.

Tal sistema se puede analizar reduciéndolo al conjunto más elemental de componentes necesarios que proporciona los detalles analíticos requeridos y representando las características dinámicas de cada componente mediante un conjunto de ecuaciones simples. (El comportamiento dinámico de este sistema se puede determinar a partir de la relación entre los resultados progresivos y el tiempo.)

Se puede dibujar un diagrama de bloque funcional utilizando bloques para representar las actividades funcionales e interconectar líneas de señal para representar la salida de información

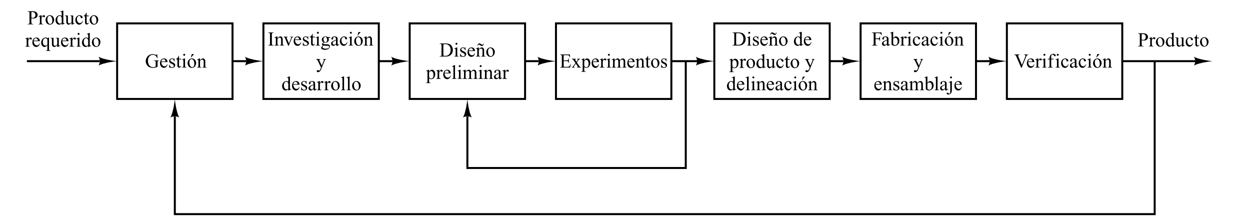


Figura 1-3. Diagrama de bloques de un sistema de organización en ingeniería.

o producto de la operación del sistema. En la Figura 1-3 se muestra un posible diagrama de bloque.

Sistema de control robusto. El primer paso para el diseño de un sistema de control es la obtención del modelo matemático de la planta u objeto de control. En realidad, cualquier modelo de una planta que se quiere controlar incluirá un error debido al proceso de modelado. Esto es, la planta real difiere del modelo que se va a utilizar en el diseño del sistema de control.

Una aproximación razonable para asegurar que el controlador diseñado basado en un modelo funcionará adecuadamente cuando se utilice con la planta real, consiste en asumir desde el comienzo que existe una incertidumbre o error entre la planta real y su modelo matemático e incluir dicha incertidumbre o error en el proceso de diseño del sistema de control. El sistema de control diseñado basado en esta aproximación se denomina sistema de control robusto.

Si se supone que la planta real que se desea controlar es $\tilde{G}(s)$ y que el modelo matemático de la planta real es $G(s)$, esto es

$\tilde{G}(s)$ = modelo de la planta real que tiene una incertidumbre $\Delta(s)$

$G(s)$ = modelo de la planta nominal que se va a utilizar en el diseño del sistema de control

$\tilde{G}(s)$ y $G(s)$ pueden estar relacionados por un factor multiplicativo del tipo

$$\tilde{G}(s) = G(s)[1 + \Delta(s)]$$

o por un factor aditivo

$$\tilde{G}(s) = G(s) + \Delta(s)$$

o de otras formas.

Puesto que no se conoce la descripción exacta de la incertidumbre o error $\Delta(s)$, se utiliza una estimación de $\Delta(s)$ y en el diseño del controlador se emplea esta estimación, $W(s)$. $W(s)$ es una función de transferencia escalar del tipo

$$\|\Delta(s)\|_\infty < \|W(s)\|_\infty = \max_{0 \leqslant \omega \leqslant \infty} |W(j\omega)|$$

donde $\|W(s)\|_\infty$ es el máximo valor de $|W(j\omega)|$ para $0 \leqslant \omega \leqslant \infty$ y se denomina norma H infinito de $W(s)$.

Si se utiliza el teorema de la pequeña ganancia, el proceso de diseño conlleva la determinación del controlador $K(s)$ que satisfaga la desigualdad,

$$\left\| \frac{W(s)}{1 + K(s)G(s)} \right\|_\infty < 1$$

donde $G(s)$ es la función de transferencia del modelo utilizada en el proceso de diseño, $K(s)$ es la función de transferencia del controlador y $W(s)$ se escoge como una función de transferencia que aproxima $\Delta(s)$. En la mayoría de los casos prácticos, se debe satisfacer más de una desigualdad dependientes de $G(s)$, $K(s)$ y $W(s)$. Por ejemplo, para garantizar la estabilidad robusta y el comportamiento robusto se requiere que se satisfagan las dos desigualdades siguientes

$$\left\| \frac{W_m(s)K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \right\|_\infty < 1 \quad \text{para estabilidad robusta}$$

$$\left\| \frac{W_s(s)}{1 + K(s)G(s)} \right\|_\infty < 1 \ \text{para comportamiento robusto}$$

(En la Sección 10-9 se deducirán estas desigualdades). Hay muchas desigualdades de este tipo que se tienen que satisfacer en muchos sistemas diferentes de control robusto. (Estabilidad robusta significa que el controlador $K(s)$ garantiza la estabilidad interna de todos los sistemas que pertenecen a un grupo de sistemas que representan el sistema de la planta real. Comportamiento robusto significa que el comportamiento especificado se satisface para todos los sistemas que pertenecen a este grupo). En este libro se supone que se conocen con precisión todas las plantas de los sistemas de control que se presentan, excepto las plantas que se discuten en la Sección 10-9, en la que se presentan aspectos introductorios de la teoría de control robusto.

1-3 Control en lazo cerrado en comparación con control en lazo abierto

Sistemas de control realimentados. Un sistema que mantiene una relación determinada entre la salida y la entrada de referencia, comparándolas y usando la diferencia como medio de control, se denomina *sistema de control realimentado*. Un ejemplo sería el sistema de control de temperatura de una habitación. Midiendo la temperatura real y comparándola con la temperatura de referencia (temperatura deseada), el termostato activa o desactiva el equipo de calefacción o de enfriamiento para asegurar que la temperatura de la habitación se mantiene en un nivel confortable independientemente de las condiciones externas.

Los sistemas de control realimentados no se limitan a la ingeniería, sino que también se encuentran en diversos campos ajenos a ella. Por ejemplo, el cuerpo humano es un sistema de control realimentado muy avanzado. Tanto la temperatura corporal como la presión sanguínea se conservan constantes mediante una realimentación fisiológica. De hecho, la realimentación realiza una función vital: hace que el cuerpo humano sea relativamente insensible a las perturbaciones externas, permitiendo que funcione de forma adecuada en un entorno cambiante.

Sistemas de control en lazo cerrado. Los sistemas de control realimentados se denominan también sistemas de *control en lazo cerrado*. En la práctica, los términos control realimentado y control en lazo cerrado se usan indistintamente. En un sistema de control en lazo cerrado, se alimenta al controlador la señal de error de actuación, que es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación (que puede ser la propia señal de salida o una función de la señal de salida y sus derivadas y/o integrales), con el fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor deseado. El término control en lazo cerrado siempre implica el uso de una acción de control realimentado para reducir el error del sistema.

Sistemas de control en lazo abierto. Los sistemas en los cuales la salida no tiene efecto sobre la acción de control se denominan *sistemas de control en lazo abierto*. En otras palabras, en un sistema de control en lazo abierto no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada. Un ejemplo práctico es una lavadora. El remojo, el lavado y el centrifugado en la lavadora operan con una base de tiempo. La máquina no mide la señal de salida, que es la limpieza de la ropa.

En cualquier sistema de control en lazo abierto, la salida no se compara con la entrada de referencia. Así, a cada entrada de referencia le corresponde una condición de operación fija; como resultado de ello, la precisión del sistema depende de la calibración. Ante la presencia de perturbaciones, un sistema de control en lazo abierto no realiza la tarea deseada. En la práctica, el control en lazo abierto sólo se usa si se conoce la relación entre la entrada y la salida y si no hay perturbaciones internas ni externas. Es evidente que estos sistemas no son de control realimentado. Obsérvese que cualquier sistema de control que opere con una base de tiempo está en lazo abierto. Por ejemplo, el control de tráfico mediante señales operadas con una base de tiempo es otro ejemplo de control en lazo abierto.

Sistemas de control en lazo cerrado en comparación con sistemas en lazo abierto. Una ventaja del sistema de control en lazo cerrado es que el uso de la realimentación vuelve la respuesta del sistema relativamente insensible a las perturbaciones externas y a las variaciones internas en los parámetros del sistema. Es así posible usar componentes relativamente poco precisos y baratos para obtener el control adecuado de una planta determinada, mientras que hacer eso es imposible en el caso de un sistema en lazo abierto.

Desde el punto de vista de estabilidad, el sistema de control en lazo abierto es más fácil de desarrollar, porque la estabilidad del sistema no es un problema importante. Por otra parte, la estabilidad es un gran problema en el sistema de control en lazo cerrado, que puede conducir a corregir en exceso errores que producen oscilaciones de amplitud constante o cambiante.

Debe señalarse que, para los sistemas en los que se conocen con anticipación las entradas y en los cuales no hay perturbaciones, es aconsejable emplear un control en lazo abierto. Los sistemas de control en lazo cerrado sólo tienen ventajas cuando se presentan perturbaciones y/o variaciones impredecibles en los componentes del sistema. Obsérvese que la potencia nominal de salida determina en forma parcial el coste, peso y tamaño de un sistema de control. El número de componentes usados en un sistema de control en lazo cerrado es mayor que el que se emplea para un sistema de control equivalente en lazo abierto. Por tanto, el sistema de control en lazo cerrado suele tener costes y potencias más grandes. Para disminuir la potencia requerida de un sistema, se emplea un control en lazo abierto siempre que pueda aplicarse. Por lo general, una combinación adecuada de controles en lazo abierto y en lazo cerrado es menos costosa y ofrecerá un comportamiento satisfactorio del sistema global.

La mayoría de los análisis y diseños de sistemas de control presentados en este libro son sistemas de control en lazo cerrado. En ciertas circunstancias (por ejemplo, si no hay perturbaciones o la salida es difícil de medir) pueden ser deseables los sistemas de control en lazo abierto. Por tanto, es conveniente resumir las ventajas y desventajas de utilizar sistemas de control en lazo abierto.

Las ventajas fundamentales de los sistemas de control en lazo abierto son las siguientes:

1. Construcción simple y facilidad de mantenimiento.
2. Menos costosos que el correspondiente sistema en lazo cerrado.
3. No hay problemas de estabilidad.

4. Convenientes cuando la salida es difícil de medir o cuando medir la salida de manera precisa no es económicamente viable. (Por ejemplo, en el caso de la lavadora, sería bastante costoso proporcionar un dispositivo para medir la calidad de la salida de la lavadora, es decir, la limpieza de la ropa lavada.)

Las desventajas fundamentales de los sistemas de control en lazo abierto son las siguientes:

1. Las perturbaciones y los cambios en la calibración originan errores, y la salida puede ser diferente de lo que se desea.
2. Para mantener la calidad requerida en la salida, es necesaria la recalibración de vez en cuando.

1-4 Diseño y compensación de sistemas de control

Este libro presenta aspectos básicos del diseño y compensación de los sistemas de control. La compensación es la modificación de la dinámica del sistema para que se satisfagan unas especificaciones determinadas. Las aproximaciones al diseño de sistemas de control y compensación que se presentan en este libro son la aproximación mediante el lugar de las raíces, la respuesta en frecuencia y la aproximación en el espacio de estados. El diseño de sistemas de control utilizando estos métodos se presenta en los Capítulos 6, 7, 9 y 10. El diseño de sistemas de control basado en compensadores PID se presenta en el Capítulo 8.

En el diseño real de un sistema de control, el que se utilice un compensador electrónico, neumático o hidráulico debe decidirse en parte en función de la naturaleza de la planta que se controla. Por ejemplo, si la planta que se controla contiene fluidos inflamables, debe optarse por los componentes neumáticos (tanto un compensador como un actuador) para eliminar la posibilidad de que salten chispas. Sin embargo, si no existe el riesgo de incendio, los que se usan con mayor frecuencia son los compensadores electrónicos. (De hecho, es común transformar las señales no eléctricas en señales eléctricas, debido a la sencillez de la transmisión, mayor precisión, mayor fiabilidad, una mayor facilidad en la compensación, etcétera.)

Especificaciones de comportamiento. Los sistemas de control se diseñan para realizar tareas específicas. Los requisitos impuestos sobre el sistema de control se dan como especificaciones de comportamiento. Las especificaciones pueden venir dadas como requisitos en la respuesta transitoria (como, por ejemplo, la máxima sobreelongación y el tiempo de asentamiento en la respuesta a un escalón) y requisitos en el estado estacionario (como, por ejemplo, el error en estado estacionario frente a una entrada tipo rampa). Las especificaciones de un sistema de control se deben dar antes de que comience el proceso de diseño.

Para problemas de diseño rutinarios, las especificaciones de comportamiento (las cuales relacionan la precisión, la estabilidad relativa y la velocidad de respuesta) se proporcionan en términos de valores numéricos precisos. En otros casos, se ofrecen una parte en términos de valores numéricos precisos y otra parte en términos de planteamientos cualitativos. En este último caso, puede ser necesario modificar las especificaciones durante el proceso del diseño, ya que es posible que las especificaciones dadas nunca se cumplan (debido a que los requisitos producen conflictos) o conduzcan a un sistema muy costoso.

Por lo general, las especificaciones de comportamiento no deben ser más restrictivas de lo necesario para realizar la tarea definida. Si la precisión de una operación en estado estable es de vital importancia para un sistema de control, no se deben pedir especificaciones de comportamiento más restrictivas de lo necesario sobre la respuesta transitoria, ya que tales especifica-

ciones requerirán componentes costosos. Recuérdese que la parte más importante del diseño de un sistema de control es la precisión en el planteamiento de las especificaciones de comportamiento con el fin de obtener un sistema de control óptimo para el propósito deseado.

Compensación del sistema. Establecer la ganancia es el primer paso para llevar al sistema a un comportamiento satisfactorio. Sin embargo, en muchos casos prácticos, ajustando únicamente la ganancia tal vez no proporcione la alteración suficiente en el comportamiento del sistema para cumplir las especificaciones dadas. Como ocurre con frecuencia, incrementar el valor de la ganancia mejora el comportamiento en estado estacionario pero produce una estabilidad deficiente o, incluso, inestabilidad. En este caso, es necesario volver a diseñar el sistema (modificando la estructura o incorporando dispositivos o componentes adicionales) para alterar el comportamiento general, de modo que el sistema se comporte como se desea. Este nuevo diseño o adición de un dispositivo apropiado se denomina *compensación*. Un elemento insertado en el sistema para satisfacer las especificaciones se denomina *compensador*. El compensador modifica el comportamiento deficiente del sistema original.

Procedimientos de diseño. En la aproximación de prueba y error para el diseño de un sistema, se parte de un modelo matemático del sistema de control y se ajustan los parámetros de un compensador. La parte de este proceso que requiere más tiempo es la verificación del comportamiento del sistema mediante un análisis, despues de cada ajuste de los parámetros. El diseñador debe utilizar un programa para computador como MATLAB para evitar gran parte del cálculo numérico que se necesita para esta verificación.

Una vez obtenido un modelo matemático satisfactorio, el diseñador debe construir un prototipo y probar el sistema en lazo abierto. Si se asegura la estabilidad absoluta en lazo abierto, el diseñador cierra el lazo y prueba el comportamiento del sistema en lazo cerrado. Debido a los efectos de carga no considerados entre los componentes, la falta de linealidad, los parámetros distribuidos, etc., que no se han tenido en cuenta en el diseño original, es probable que el comportamiento real del prototipo del sistema difiera de las predicciones teóricas. Por tanto, tal vez el primer diseño no satisfaga todos los requisitos de comportamiento. Mediante el método de prueba y error, el diseñador debe cambiar el prototipo hasta que el sistema cumpla las especificaciones. Debe analizar cada prueba e incorporar los resultados de este análisis en la prueba siguiente. El diseñador debe conseguir que el sistema final cumpla las especificaciones de comportamiento y, al mismo tiempo, sea fiable y económico.

1-5 Contenido del libro

El libro está organizado en 10 capítulos. A continuación se describe brevemente el contenido de cada capítulo.

El Capítulo 1 presenta una introducción al libro.

En el Capítulo 2 se aborda el modelado matemático de sistemas de control descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales. Concretamente, se presentan las funciones de transferencia y las ecuaciones diferenciales que describen a los sistemas. También se analizan las ecuaciones en el espacio de estados. Se utiliza MATLAB para transformar modelos matemáticos descritos mediante funciones de transferencia al espacio de estados y viceversa. Este libro trata los sistemas lineales en detalle. Si el modelo matemático de cualquier sistema es no lineal, necesita ser linealizado antes de poder aplicar las teorías que se presentan en este libro. En este capítulo se incluye una técnica para linealizar modelos matemáticos no lineales.

El Capítulo 3 aborda el modelado matemático de sistemas mecánicos y sistemas eléctricos que aparecen frecuentemente en los sistemas de control.

El Capítulo 4 trata el modelado matemático de sistemas de fluidos y sistemas térmicos, que son usuales en los sistemas de control. Los sistemas de fluidos incluyen sistemas de nivel de líquidos, sistemas neumáticos y sistemas hidráulicos. Además en este capítulo se presentan los sistemas térmicos tal como los sistemas de control de temperatura.

El Capítulo 5 presenta el análisis de la respuesta transitoria de la respuesta en estado estacionario de los sistemas de control definidos mediante funciones de transferencia. Se proporcionan también detalles de los análisis de la respuesta transitoria y de la respuesta en estado estacionario con MATLAB. Además se presenta cómo obtener diagramas tridimensionales con MATLAB. Asimismo, en este capítulo se presenta el análisis de estabilidad basado en el criterio de estabilidad de Routh y se analiza brevemente el criterio de estabilidad de Hurwitz.

El Capítulo 6 expone un análisis del lugar de las raíces de los sistemas de control. Se trata de un método gráfico para determinar las localizaciones de todos los polos en lazo cerrado a partir del conocimiento de las posiciones de los polos en lazo abierto y de los ceros del sistema en lazo cerrado cuando un parámetro (normalmente la ganancia) varía desde cero hasta infinito. Este método fue desarrollado por W. R. Evans en las inmediaciones de 1950. En la actualidad MATLAB permite obtener la gráfica del lugar de las raíces de forma sencilla y rápida. Este capítulo presenta tanto la obtención manual del lugar de las raíces como la generación del lugar utilizando MATLAB. También se aborda en este capítulo el diseño de sistemas de control utilizando compensadores de adelanto, de atraso y de adelanto-atraso.

El Capítulo 7 presenta el método de análisis de la respuesta en frecuencia de los sistemas de control. Este es el método más antiguo de análisis y diseño de sistemas de control y lo desarrollaron durante los años 1940-1950 Nyquist, Bode, Nichols y Hazen entre otros. Este capítulo presenta detalles de la respuesta en frecuencia de los sistemas de control utilizando la técnica de compensadores de adelanto, la técnica de compensadores de atraso y la de adelanto-atraso. El método de respuesta en frecuencia era el método de análisis y diseño comúnmente utilizado hasta que el método en el espacio de estados se convirtió en el más popular. Sin embargo, desde que el método de diseño de control robusto H infinito ha ganado en popularidad, la respuesta en frecuencia vuelve a estar de moda.

El Capítulo 8 trata los controles PID básicos y modificados tales como los controladores PID con varios grados de libertad. El controlador PID tiene tres parámetros: ganancia proporcional, ganancia integral y ganancia derivativa. En los sistemas de control industriales más de la mitad de los controladores empleados son controladores PID. El comportamiento de los controladores PID depende de las magnitudes relativas de estos tres parámetros. La determinación de las magnitudes relativas de estos tres parámetros se denomina sintonía de los controladores PID.

Ziegler y Nichols propusieron las denominadas «reglas de sintonía de Ziegler-Nichols» a comienzos de 1942. Desde entonces se han propuesto numerosas reglas de sintonía. Hoy en día la fabricación de controladores PID tiene sus propias reglas de sintonía. En este capítulo se presenta un procedimiento de optimización para computadora utilizando MATLAB para determinar los tres parámetros de forma que se satisfagan las características de una respuesta transitoria dada. Este procedimiento se puede extender para determinar los tres parámetros de forma que se satisfaga cualquier característica dada.

El Capítulo 9 presenta el material básico para el análisis de las ecuaciones de estados. Se analizan completamente los conceptos de controlabilidad y observabilidad, los conceptos más importantes de la teoría de control moderno, debidos a Kalman. En este capítulo se deriva la solución de las ecuaciones de estado.

El Capítulo 10 trata el diseño de sistemas de control en el espacio de estados. Este capítulo comienza con problemas de asignación de polos y los observadores de estados. En la ingeniería de control con frecuencia es deseable fijar un índice de comportamiento y tratar de minimizarlo (o maximizarlo, si es el caso). Si ese índice de comportamiento seleccionado tiene un significado físico claro entonces este método es bastante útil para determinar la variable de control óptima. Este capítulo presenta el problema del control óptimo cuadrático en el que se utiliza un índice de comportamiento que es una integral de una función cuadrática de las variables de estado y de la variable control. La integral se evalúa desde $t = 0$ hasta $t = \infty$. Este capítulo finaliza con una breve discusión sobre los sistemas de control robusto.



Modelado matemático de sistemas de control

2-1 Introducción

Al estudiar los sistemas de control, el lector debe ser capaz de modelar sistemas dinámicos y analizar las características dinámicas. Un modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con precisión o, al menos, bastante bien. Téngase presente que un modelo matemático no es único para un sistema determinado. Un sistema puede representarse de muchas formas diferentes, por lo que puede tener muchos modelos matemáticos, dependiendo de cada perspectiva.

La dinámica de muchos sistemas, ya sean mecánicos, eléctricos, térmicos, económicos, biológicos, etc., se describe en términos de ecuaciones diferenciales. Dichas ecuaciones diferenciales se obtienen a partir de leyes físicas que gobiernan un sistema determinado —como las leyes de Newton para sistemas mecánicos y las leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos. Se debe siempre recordar que obtener un modelo matemático razonable es la parte más importante de todo el análisis.

A lo largo de este libro se supone que el principio de causalidad se aplica a los sistemas que se consideren. Esto significa que la salida actual del sistema (la salida en $t = 0$) depende de las entradas pasadas (entradas en $t < 0$) pero no depende de las entradas futuras (entradas para $t > 0$).

Modelos matemáticos. Los modelos matemáticos pueden adoptar muchas formas distintas. Dependiendo del sistema del que se trate y de las circunstancias específicas, un modelo matemático puede ser más conveniente que otros. Por ejemplo, en problemas de control óptimo, es provechoso usar representaciones en el espacio de estados. En cambio, para los análisis de la

respuesta transitoria o de la respuesta en frecuencia de sistemas lineales con una entrada y una salida invariantes en el tiempo, la representación mediante la función de transferencia puede ser más conveniente que cualquier otra. Una vez obtenido un modelo matemático de un sistema, se usan diversos recursos analíticos, así como computadoras para estudiarlo y sintetizarlo.

Simplicidad contra precisión. Al obtener un modelo matemático se debe establecer un compromiso entre la simplicidad del mismo y la precisión de los resultados del análisis. Al obtener un modelo matemático razonablemente simplificado, a menudo resulta necesario ignorar ciertas propiedades físicas inherentes al sistema. En particular, si se pretende obtener un modelo matemático de parámetros concentrados lineal (es decir, uno en el que se empleen ecuaciones diferenciales), siempre es necesario ignorar ciertas no linealidades y parámetros distribuidos que pueden estar presentes en el sistema dinámico. Si los efectos que estas propiedades ignoradas tienen sobre la respuesta son pequeños, se obtendrá un buen acuerdo entre los resultados del análisis de un modelo matemático y los resultados del estudio experimental del sistema físico.

En general, cuando se resuelve un problema nuevo, es conveniente desarrollar primero un modelo simplificado para obtener una idea general de la solución. A continuación se desarrolla un modelo matemático más completo y se usa para un análisis con más pormenores.

Se debe ser consciente de que un modelo de parámetros concentrados lineal, que puede ser válido si opera en baja frecuencia, tal vez no sea válido en frecuencias suficientemente altas, debido a que la propiedad no considerada de los parámetros distribuidos puede convertirse en un factor importante en el comportamiento dinámico del sistema. Por ejemplo, la masa de un resorte puede pasarse por alto en operaciones en baja frecuencia, pero se convierte en una propiedad importante del sistema en altas frecuencias. (Para el caso en el que el modelo matemático tiene en cuenta consideraciones de errores, se puede aplicar la teoría de control robusto. La teoría de control robusto se presenta en el Capítulo 10)

Sistemas lineales. Un sistema se denomina lineal si se aplica el principio de superposición. Este principio establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones de entradas diferentes es la suma de las dos respuestas individuales. Por tanto, para el sistema lineal, la respuesta a varias entradas se calcula tratando una entrada cada vez y sumando los resultados. Este principio permite desarrollar soluciones complicadas para la ecuación diferencial lineal a partir de soluciones simples.

Si en una investigación experimental de un sistema dinámico son proporcionales la causa y el efecto, lo cual implica que se aplica el principio de superposición, el sistema se considera lineal.

Sistemas lineales invariantes y variantes en el tiempo. Una ecuación diferencial es lineal si sus coeficientes son constantes o son funciones sólo de la variable independiente. Los sistemas dinámicos formados por componentes de parámetros concentrados lineales invariantes con el tiempo se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo —de coeficientes constantes. Tales sistemas se denominan sistemas *lineales invariantes en el tiempo* (o *lineales de coeficientes constantes*). Los sistemas que se representan mediante ecuaciones diferenciales cuyos coeficientes son funciones del tiempo, se denominan sistemas *lineales variantes en el tiempo*. Un ejemplo de un sistema de control variante en el tiempo es un sistema de control de naves espaciales. (La masa de una nave espacial cambia debido al consumo de combustible.)

Contenido del capítulo. En la Sección 2-1 se ha presentado una introducción al modelado matemático de sistemas dinámicos. La Sección 2-2 presenta la función de transferencia y la respuesta-impulso. La Sección 2-3 introduce los sistemas de control automático y la Sección 2-4 analiza conceptos del modelado en el espacio de estados. La Sección 2-5 presenta una representación en el espacio de estados de sistemas dinámicos. La Sección 2-6 trata la transformación de modelos matemáticos con MATLAB. Por último, la Sección 2-7 analiza la linealización de modelos matemáticos no lineales.

2-2 Función de transferencia y de respuesta-impulso

En la teoría de control, a menudo se usan las funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada-salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo. Se comenzará por definir la función de transferencia, para proseguir con el cálculo de la función de transferencia de un sistema de ecuaciones diferenciales. A continuación se analiza la función de respuesta-impulso.

Función de transferencia. La *función de transferencia* de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

Considérese el sistema lineal e invariante en el tiempo descrito mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(m)}{x} + b_1 \overset{(m-1)}{x} + \cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x \qquad (n \geqslant m)$$

donde y es la salida del sistema y x es la entrada. La función de transferencia de este sistema es el cociente de la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada cuando todas las condiciones iniciales son cero, o

$$\text{Función de transferencia} = G(s) = \left.\frac{\mathscr{L}[\text{salida}]}{\mathscr{L}[\text{entrada}]}\right|_{\text{condiciones iniciales cero}}$$

$$= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

A partir del concepto de función de transferencia, es posible representar la dinámica de un sistema mediante ecuaciones algebraicas en s. Si la potencia más alta de s en el denominador de la función de transferencia es igual a n, el sistema se denomina *sistema de orden n-ésimo*.

Comentarios acerca de la función de transferencia. La aplicación del concepto de función de transferencia está limitada a los sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo; sin embargo, el enfoque de la función de transferencia se usa extensamente en el análisis y diseño de dichos sistemas. A continuación se presentan algunos comentarios importantes relacionados con la función de transferencia. (Obsérvese que en la lista, los sistemas a los que se hace referencia son aquellos que se describen mediante una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo.)

1. La función de transferencia de un sistema es un modelo matemático porque es un método operacional para expresar la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada.
2. La función de transferencia es una propiedad de un sistema, independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada o función de excitación.
3. La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida; sin embargo, no proporciona información acerca de la estructura física del sistema. (Las funciones de transferencia de muchos sistemas físicamente diferentes pueden ser idénticas.)
4. Si se conoce la función de transferencia de un sistema, se estudia la salida o respuesta para varias formas de entrada, con la intención de comprender la naturaleza del sistema.
5. Si se desconoce la función de transferencia de un sistema, puede establecerse experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la salida del sistema. Una vez establecida una función de transferencia, proporciona una descripción completa de las características dinámicas del sistema, a diferencia de su descripción física.

Integral de convolución. Para un sistema lineal e invariante en el tiempo, la función de transferencia $G(s)$ es

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada e $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la salida, y se supone que todas las condiciones iniciales involucradas son cero. De aquí se obtiene que la salida $Y(s)$ se escribe como el producto de $G(s)$ y $X(s)$, o bien

$$Y(s) = G(s)X(s) \tag{2-1}$$

Obsérvese que la multiplicación en el dominio complejo es equivalente a la convolución en el dominio del tiempo (véase Apéndice A), por lo que la transformada inversa de Laplace de la Ecuación (2-1) se obtiene mediante la siguiente integral de convolución:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

donde tanto $g(t)$ como $x(t)$ son 0 para $t < 0$.

Respuesta-impulso. Considérese la salida (respuesta) de un sistema para una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero. Como la transformada de Laplace de la función impulso unitario es la unidad, la transformada de Laplace de la salida del sistema es

$$Y(s) = G(s) \tag{2-2}$$

La transformada inversa de Laplace de la salida obtenida mediante la Ecuación (2-2) proporciona la respuesta-impulso del sistema. La transformada inversa de Laplace de $G(s)$, o bien

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

se denomina respuesta-impulso. Esta respuesta $g(t)$ también se denomina función de ponderación del sistema.

De este modo, la respuesta-impulso $g(t)$ es la respuesta de un sistema lineal a una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero. La transformada de Laplace de esta función proporciona la función de transferencia. Por tanto, la función de transferencia y la respuesta-impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo contienen la misma información sobre la dinámica del sistema. Por lo tanto es posible obtener información completa sobre las características dinámicas del sistema si se excita el sistema con una entrada impulso y se mide la respuesta. (En la práctica, una entrada pulso con una duración muy corta comparada con las constantes de tiempo significativas del sistema se considera un impulso.)

2-3 Sistemas de control automáticos

Un sistema de control puede tener varios componentes. Para mostrar las funciones de cada componente en la ingeniería de control, por lo general se usa una representación denominada *diagrama de bloques*. En esta sección, en primer lugar, se explica qué es un diagrama de bloques. A continuación se presentan aspectos introductorios a los sistemas de control automático, que incluyen diversas acciones de control. Después se expone un método para obtener los diagramas de bloques de sistemas físicos y, por último, se analizan técnicas para simplificar tales diagramas.

Diagramas de bloques. Un *diagrama de bloques* de un sistema es una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente y el flujo de señales. Tales diagramas muestran las relaciones existentes entre los diversos componentes. A diferencia de una representación matemática puramente abstracta, un diagrama de bloques tiene la ventaja de indicar de forma más realista el flujo de las señales del sistema real.

En un diagrama de bloques todas las variables del sistema se enlazan unas con otras mediante bloques funcionales. El bloque *funcional* o simplemente *bloque* es un símbolo para representar la operación matemática que sobre la señal de entrada hace el bloque para producir la salida. Las funciones de transferencia de los componentes por lo general se introducen en los bloques correspondientes, que se conectan mediante flechas para indicar la dirección del flujo de señales. Obsérvese que la señal sólo puede pasar en la dirección de las flechas. Por tanto, un diagrama de bloques de un sistema de control muestra explícitamente una propiedad unilateral.

La Figura 2-1 muestra un elemento del diagrama de bloques. La punta de flecha que señala el bloque indica la entrada, y la punta de flecha que se aleja del bloque representa la salida. Tales flechas se conocen como *señales*.



Figura 2-1. Elementos de un diagrama de bloques.

Obsérvese que las dimensiones de la señal de salida del bloque son las dimensiones de la señal de entrada multiplicadas por las dimensiones de la función de transferencia en el bloque.

Las ventajas de la representación mediante diagramas de bloques de un sistema estriban en que es fácil formar el diagrama de bloques general de todo el sistema con sólo conectar los bloques de los componentes de acuerdo con el flujo de señales y en que es posible evaluar la contribución de cada componente al desempeño general del sistema.

En general, la operación funcional del sistema se aprecia con más facilidad si se examina el diagrama de bloques que si se revisa el sistema físico mismo. Un diagrama de bloques contiene información relacionada con el comportamiento dinámico, pero no incluye información de la construcción física del sistema. En consecuencia, muchos sistemas diferentes y no relacionados pueden representarse mediante el mismo diagrama de bloques.

Debe señalarse que, en un diagrama de bloques, la principal fuente de energía no se muestra explícitamente y que el diagrama de bloques de un sistema determinado no es único. Es posible dibujar varios diagramas de bloques diferentes para un sistema, dependiendo del punto de vista del análisis.

Punto de suma. Remitiéndose a la Figura 2-2, un círculo con una cruz es el símbolo que indica una operación de suma. El signo más o el signo menos en cada punta de flecha indica si la señal debe sumarse o restarse. Es importante que las cantidades que se sumen o resten tengan las mismas dimensiones y las mismas unidades.

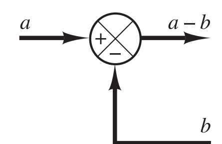
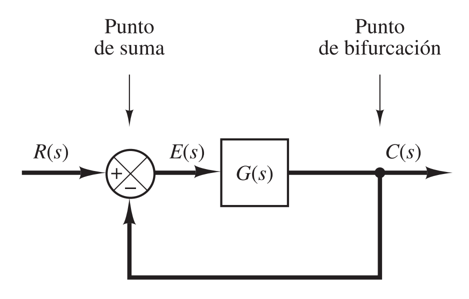


Figura 2-2. Punto de suma.

Punto de ramificación. Un *punto de ramificación* es aquel a partir del cual la señal de un bloque va de modo concurrente a otros bloques o puntos de suma.

Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado. La Figura 2-3 muestra un ejemplo de un diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado. La salida $C(s)$ se realimenta al punto de suma, donde se compara con la entrada de referencia $R(s)$. La naturaleza en lazo cerrado del sistema se indica con claridad en la figura. La salida del bloque, $C(s)$ en este caso, se obtiene multiplicando la función de transferencia $G(s)$ por la entrada al bloque, $E(s)$. Cualquier sistema de control lineal puede representarse mediante un diagrama de bloques formado por puntos de suma, bloques y puntos de ramificación.

Cuando la salida se realimenta al punto de suma para compararse con la entrada, es necesario convertir la forma de la señal de salida en la de la señal de entrada. Por ejemplo, en un sistema de control de temperatura, por lo general la señal de salida es la temperatura controlada. La señal de salida, que tiene la dimensión de la temperatura, debe convertirse a una fuerza, posición o voltaje antes de que pueda compararse con la señal de entrada. Esta conversión se consigue mediante el elemento de realimentación, cuya función de transferencia es $H(s)$, como se aprecia en la Figura 2-4. La función del elemento de realimentación es modificar la salida antes de compararse con la entrada. (En la mayor parte de los casos, el elemento de realimentación es un sensor que mide la salida de la planta. La salida del sensor se compara con la entrada y se genera la señal de error.) En este ejemplo, la señal de realimentación que retorna al punto de suma para compararse con la entrada es $B(s) = H(s)C(s)$.



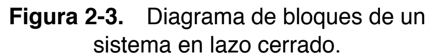


Figura 2-3. Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado.

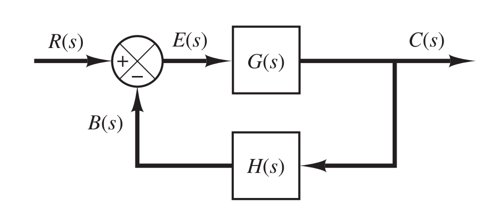


Figura 2-4. Sistema en lazo cerrado.

Función de transferencia en lazo abierto y función de transferencia de la trayectoria directa. Remitiéndose a la Figura 2-4, el cociente de la señal de realimentación $B(s)$ entre la señal de error $E(s)$ se denomina *función de transferencia en lazo abierto*. Es decir,

$$\text{Función de transferencia en lazo abierto} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

El cociente entre la salida $C(s)$ y la señal de error $E(s)$ se denomina *función de transferencia de la trayectoria directa*, por lo que,

$$\text{Función de transferencia de la trayectoria directa} = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

Si la función de transferencia de la trayectoria de realimentación $H(s)$ es la unidad, la función de transferencia en lazo abierto y la función de transferencia de la trayectoria directa son iguales.

Función de transferencia en lazo cerrado. Para el sistema que aparece en la Figura 2-4, la salida $C(s)$ y la entrada $R(s)$ se relacionan del modo siguiente:

$$C(s) = G(s)E(s)$$
$$E(s) = R(s) - B(s)$$
$$= R(s) - H(s)C(s)$$

Si se elimina $E(s)$ de estas ecuaciones, se obtiene

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

o bien,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{2-3}$$

La función de transferencia que relaciona $C(s)$ con $R(s)$ se denomina *función de transferencia en lazo cerrado*. Esta función de transferencia relaciona la dinámica del sistema en lazo cerrado con la dinámica de los elementos de las trayectorias directa y de realimentación.

A partir de la Ecuación (2-3), $C(s)$ se obtiene mediante

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

Por tanto, la salida del sistema en lazo cerrado depende claramente tanto de la función de transferencia en lazo cerrado como de la naturaleza de la entrada.

Obtención de funciones de transferencia en cascada, en paralelo y realimentadas (en lazo cerrado) utilizando MATLAB. En el análisis de sistemas de control, frecuentemente se necesita calcular funciones de transferencia en cascada, funciones de transferencia conectadas en paralelo y funciones de transferencia realimentadas (en lazo cerrado). MATLAB tiene funciones adecuadas parea obtener las funciones de transferencia en cascada, paralelo y realimentada (lazo cerrado).

Supóngase que hay dos componentes $G_1(s)$ y $G_2(s)$ conectadas de diferentes formas como se muestra en la Figura 2-5 (a), (b) y (c), donde

$$G_1(s) = \frac{\text{num1}}{\text{den1}}, \qquad G_2(s) = \frac{\text{num2}}{\text{den2}}$$

Para obtener las funciones de transferencia del sistema en cascada, en paralelo o realimentado (lazo cerrado) se utilizan las siguientes instrucciones:

$$\mathscr{L}[num,den] = series(num1,den1,num2,den2)$$
$$[num,den] = parallel(num1,den1,num2,den2)$$
$$[num,den] = feedback(num1,den1,num2,den2)$$

Como ejemplo, se considera el caso en el que

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} = \frac{\text{num1}}{\text{den1}}, \qquad G_2(s) = \frac{5}{s + 5} = \frac{\text{num2}}{\text{den2}}$$

El Programa 2-1 en MATLAB calcula $C(s)/R(s) = \text{num/den}$ para cada situación de $G_1(s)$ y $G_2(s)$. Obsérvese que la instrucción

$$\mathscr{L}printsys(num,den)$$

muestra el num/den [esto es, la función $C(s)/R(s)$] del sistema considerado.

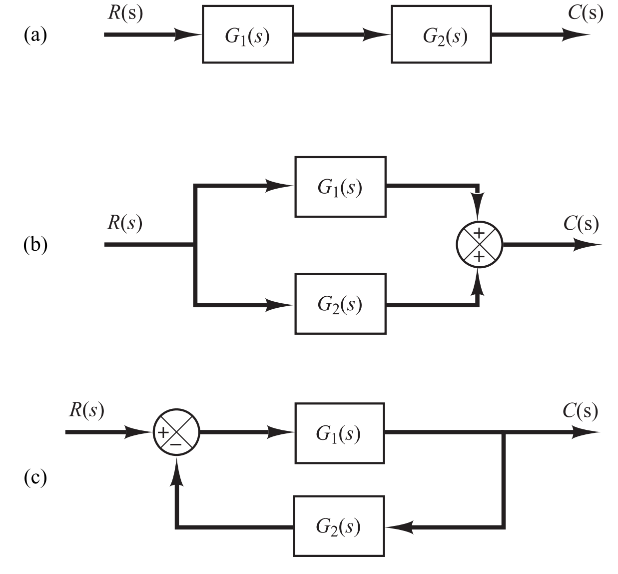


Figura 2-5. (a) Sistema en cascada; (b) sistema paralelo; (c) sistema realimentado (lazo cerrado).

MATLAB Programa 2-1

```
num1 = [10];
den1 = [1  2  10];
num2 = [0  5];
den2 = [1  5];
[num, den] = series(num1,den1,num2,den2);
printsys(num,den)

num/den =

          50
  -----------------------
  s^3 + 7s^2 + 20s + 50

[num, den] = parallel(num1,den1,num2,den2);
printsys(num,den)

num/den =

    5s^2 + 20s + 100
  -----------------------
  s^3 + 7s^2 + 20s + 50

[num, den] = feedback(num1,den1,num2,den2);
printsys(num,den)

num/den =

        10s + 50
  ------------------------
  s^3 + 7s^2 + 20s + 100
```

Controladores automáticos. Un controlador automático compara el valor real de la salida de una planta con la entrada de referencia (el valor deseado), determina la desviación y produce una señal de control que reduce la desviación a cero o a un valor pequeño. La manera en la cual el controlador automático produce la señal de control se denomina *acción de control*. La Figura 2-6 es un diagrama de bloques de un sistema de control industrial que consiste en un controlador automático, un actuador, una planta y un sensor (elemento de medición). El controlador detecta la señal de error, que por lo general, está en un nivel de potencia muy bajo, y la

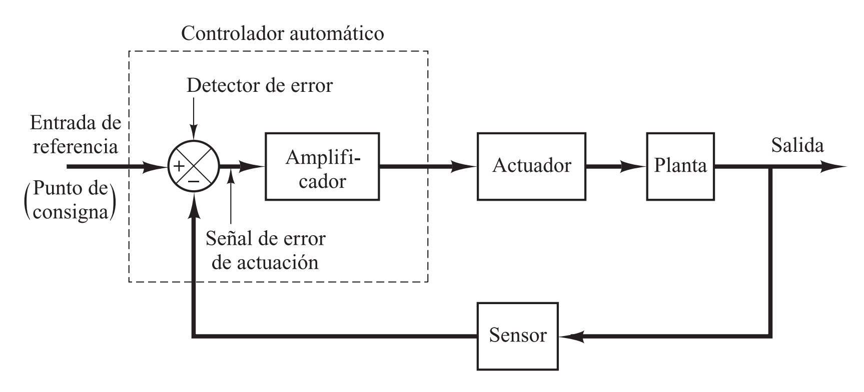


Figura 2-6. Diagrama de bloques de un sistema de control industrial, formado por un controlador automático, un actuador, una planta y un sensor (elemento de medición).

amplifica a un nivel lo suficientemente alto. La salida de un controlador automático se alimenta a un actuador, como un motor o una válvula neumáticos, un motor hidráulico o un motor eléctrico. (El actuador es un dispositivo de potencia que produce la entrada para la planta de acuerdo con la señal de control, a fin de que la señal de salida se aproxime a la señal de entrada de referencia.)

El sensor, o elemento de medición, es un dispositivo que convierte la variable de salida en otra variable manejable, como un desplazamiento, una presión o un voltaje, que pueda usarse para comparar la salida con la señal de entrada de referencia. Este elemento está en la trayectoria de realimentación del sistema en lazo cerrado. El punto de ajuste del controlador debe convertirse en una entrada de referencia con las mismas unidades que la señal de realimentación del sensor o del elemento de medición.

Clasificación de los controladores industriales. Los controladores industriales se clasifican, de acuerdo con sus acciones de control, como:

1. De dos posiciones o controladores on-off
2. Controladores proporcionales
3. Controladores integrales
4. Controladores proporcionales-integrales
5. Controladores proporcionales-derivativos
6. Controladores proporcionales-integrales-derivativos

La mayoría de los controladores industriales emplean como fuente de energía la electricidad o un fluido presurizado, como el aceite o el aire. Los controladores también pueden clasificarse, según el tipo de energía que utilizan en su operación, como neumáticos, hidráulicos o electrónicos. El tipo de controlador que se use debe decidirse basándose en la naturaleza de la planta y las condiciones de operación, incluyendo consideraciones tales como seguridad, costo, disponibilidad, fiabilidad, precisión, peso y tamaño.

Acción de control de dos posiciones o de encendido y apagado (on/off). En un sistema de control de dos posiciones, el elemento de actuación sólo tiene dos posiciones fijas, que, en muchos casos, son simplemente encendido y apagado. El control de dos posiciones o de encendido y apagado es relativamente simple y barato, razón por la cual su uso es extendido en sistemas de control tanto industriales como domésticos.

Supóngase que la señal de salida del controlador es $u(t)$ y que la señal de error es $e(t)$. En el control de dos posiciones, la señal $u(t)$ permanece en un valor ya sea máximo o mínimo, dependiendo de si la señal de error es positiva o negativa. De este modo,

$$\begin{aligned} u(t) &= U_1, \qquad \text{para } e(t) > 0 \\ &= U_2, \qquad \text{para } e(t) < 0 \end{aligned}$$

donde U_1 y U_2 son constantes. Por lo general, el valor mínimo de U_2 es cero o $-U_1$. Es común que los controladores de dos posiciones sean dispositivos eléctricos, en cuyo caso se usa extensamente una válvula eléctrica operada por solenoides. Los controladores neumáticos proporcionales con ganancias muy altas funcionan como controladores de dos posiciones y, en ocasiones, se denominan controladores neumáticos de dos posiciones.

Las Figuras 2-7(a) y (b) muestran los diagramas de bloques para dos controladores de dos posiciones. El rango en el que debe moverse la señal de error antes de que ocurra la conmuta-

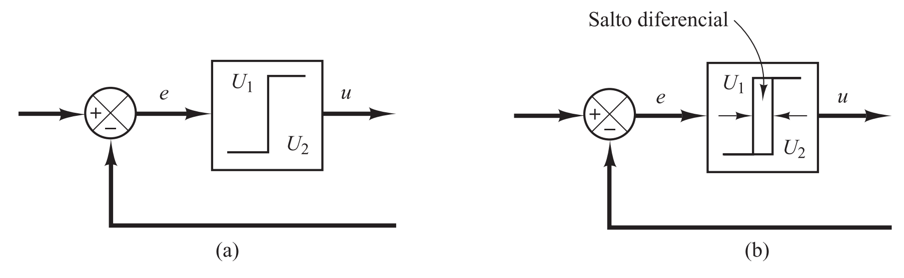


Figura 2-7. (a) Diagrama de bloques de un controlador on-off; (b) diagrama de bloques de un controlador con salto diferencial.

ción se denomina *brecha diferencial*. En la Figura 2-7(b) se señala una brecha diferencial. Tal brecha hace que la salida del controlador $u(t)$ conserve su valor presente hasta que la señal de error se haya desplazado ligeramente más allá de cero. En algunos casos, la brecha diferencial es el resultado de una fricción no intencionada y de un movimiento perdido; sin embargo, con frecuencia se provoca de manera intencional para evitar una operación demasiado frecuente del mecanismo de encendido y apagado.

Considérese el sistema de control de nivel de líquido de la Figura 2-8(a), donde se utiliza la válvula electromagnética de la Figura 2-8(b) para controlar el flujo de entrada. Esta válvula está abierta o cerrada. Con este control de dos posiciones, el flujo de entrada del agua es una constante positiva o cero. Como se aprecia en la Figura 2-9, la señal de salida se mueve continuamente entre los dos límites requeridos y provoca que el elemento de actuación se mueva de una posición fija a la otra. Obsérvese que la curva de salida sigue una de las dos curvas exponencia-

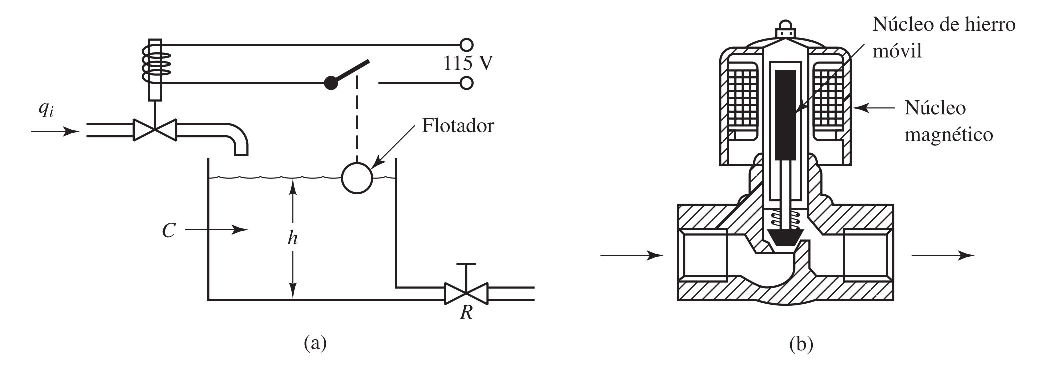


Figura 2-8. (a) Sistema de control de nivel de líquidos; (b) válvula electromagnética.

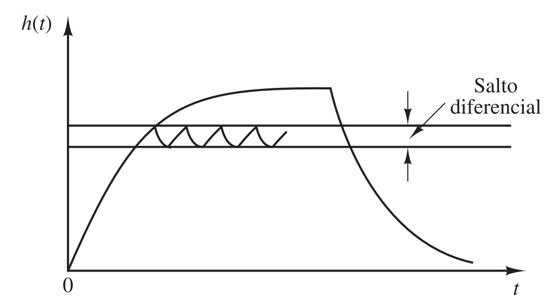


Figura 2-9. Curva de nivel $h(t)$ frente a t para el sistema mostrado en la Figura 2-8(a).

les, una de las cuales corresponde a la curva de llenado y la otra a la curva de vaciado. Tal oscilación de salida entre dos límites es una respuesta común característica de un sistema bajo un control de dos posiciones.

En la Figura 2-9 se observa que, para reducir la amplitud de la oscilación de salida, debe disminuirse la brecha diferencial. Sin embargo, la reducción de la brecha diferencial aumenta la cantidad de conmutaciones de encendido y apagado por minuto y reduce la vida útil del componente. La magnitud de la brecha diferencial debe determinarse a partir de consideraciones tales como la precisión requerida y la vida del componente.

Acción de control proporcional. Para un controlador con acción de control proporcional, la relación entre la salida del controlador $u(t)$ y la señal de error $e(t)$ es:

$$u(t) = K_p e(t)$$

o bien, en cantidades transformadas por el método de Laplace,

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

donde K_p se considera la ganancia proporcional.

Cualquiera que sea el mecanismo real y la forma de la potencia de operación, el controlador proporcional es, en esencia, un amplificador con una ganancia ajustable.

Acción de control integral. En un controlador con acción de control integral, el valor de la salida del controlador $u(t)$ se cambia a una razón proporcional a la señal de error $e(t)$. Es decir,

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t)$$

o bien

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t)\, dt$$

donde K_i es una constante ajustable. La función de transferencia del controlador integral es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

Acción de control proporcional-integral. La acción de control de un controlador proporcional-integral (PI) se define mediante

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t)\, dt$$

o la función de transferencia del controlador es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

donde T_i se denomina *tiempo integral*.

Acción de control proporcional-derivativa. La acción de control de un controlador proporcional-derivativa (PD) se define mediante

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

y la función de transferencia es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

donde T_d es el *tiempo derivativo*.

Acción de control proporcional-integral-derivativa. La combinación de la acción de control proporcional, la acción de control integral y la acción de control derivativa se denomina acción de control proporcional-integral-derivativa. Esta acción combinada tiene las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. La ecuación de un controlador con esta acción combinada está dada por

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

o la función de transferencia es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

donde K_p es la ganancia proporcional, T_i es el tiempo integral y T_d es el tiempo derivativo. El diagrama de bloques de un controlador proporcional-integral-derivativo aparece en la Figura 2-10.

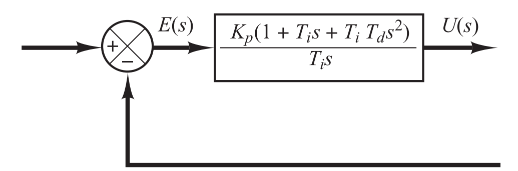


Figura 2-10. Diagrama de bloques de un controlador proporcional-integral-derivativo.

Un sistema en lazo cerrado sujeto a una perturbación. La Figura 2-11 muestra un sistema en lazo cerrado sujeto a una perturbación. Cuando se presentan dos entradas (la entrada de referencia y la perturbación) en un sistema lineal, cada una de ellas puede tratarse de

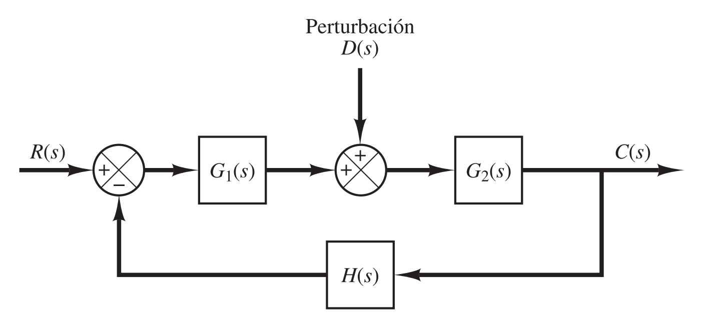


Figura 2-11. Sistema en lazo cerrado sujeto a perturbaciones.

forma independiente; y las salidas correspondientes a cada entrada pueden sumarse para obtener la salida completa. La forma en que se introduce cada entrada en el sistema se muestra en el punto de suma mediante un signo más o un signo menos.

Considérese el sistema que se muestra en la Figura 2-11. Al examinar el efecto de la perturbación $D(s)$, podemos suponer que el sistema está inicialmente relajado, con un error cero; después se puede calcular la respuesta $C_D(s)$ sólo para la perturbación. Esta respuesta se encuentra a partir de

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

Por otra parte, si se considera la respuesta a la entrada de referencia $R(s)$, se puede suponer que la perturbación es cero. Entonces, la respuesta $C_R(s)$ a la entrada de referencia $R(s)$ se obtiene a partir de

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

La respuesta a la aplicación simultánea de la entrada de referencia y la perturbación se obtiene sumando las dos respuestas individuales. En otras palabras, la respuesta $C(s)$ producida por la aplicación simultánea de la entrada de referencia $R(s)$ y la perturbación $D(s)$ se obtiene mediante

$$\begin{aligned} C(s) &= C_R(s) + C_D(s) \\ &= \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} [G_1(s)R(s) + D(s)] \end{aligned}$$

Considérese ahora el caso en el que $|G_1(s)H(s)| \gg 1$ y $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$. En este caso, la función de transferencia en lazo cerrado $C_D(s)/D(s)$ se hace casi cero, y se suprime el efecto de la perturbación. Esta es una ventaja del sistema en lazo cerrado.

Por otra parte, la función de transferencia en lazo cerrado $C_R(s)/R(s)$ se aproxima a $1/H(s)$ conforme aumenta la ganancia de $G_1(s)G_2(s)H(s)$. Esto significa que si $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$, entonces la función de transferencia en lazo cerrado $C_R(s)/R(s)$ se vuelve independiente de G_1(s) y $G_2(s)$ y se hace inversamente proporcional a $H(s)$, por lo que las variaciones de $G_1(s)$ y G_2(s) no afectan a la función de transferencia en lazo cerrado $C_R(s)/R(s)$. Es fácil observar que cualquier sistema en lazo cerrado con una realimentación unitaria, $H(s) = 1$, tiende a igualar la entrada y la salida.

Procedimientos para dibujar un diagrama de bloques. Para dibujar el diagrama de bloques de un sistema, primero se escriben las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de cada componente. A continuación se toma las transformadas de Laplace de estas ecuaciones, suponiendo que las condiciones iniciales son cero, y se representa individualmente en forma de bloques cada ecuación transformada por el método de Laplace. Por último, se integran los elementos en un diagrama de bloques completo.

Como ejemplo, considérese el circuito *RC* de la Figura 2-12(a). Las ecuaciones para el circuito son

$$i = \frac{e_i - e_0}{R} \tag{2-4}$$

$$e_o = \frac{\int i\,dt}{C} \tag{2-5}$$

Las transformadas de Laplace de las Ecuaciones (2-4) y (2-5), con condiciones iniciales iguales a cero, resultan

$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R} \tag{2-6}$$

$$E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs} \tag{2-7}$$

La Ecuación (2-6) representa una operación de suma, y el diagrama correspondiente aparece en la Figura 2-12(b). La Ecuación (2-7) representa el bloque de la Figura 2-12(c). Si se integran estos dos elementos se obtiene el diagrama de bloques general para el sistema, tal como aparece en la Figura 2-12(d).

Reducción de un diagrama de bloques. Es importante señalar que los bloques pueden conectarse en serie, sólo si la entrada de un bloque no se ve afectada por el bloque siguiente. Si hay efectos de carga entre los componentes, es necesario combinarlos en un bloque único.

Cualquier número de bloques en cascada que representen componentes sin carga puede sustituirse con un solo bloque, cuya función de transferencia sea simplemente el producto de las funciones de transferencia individuales.

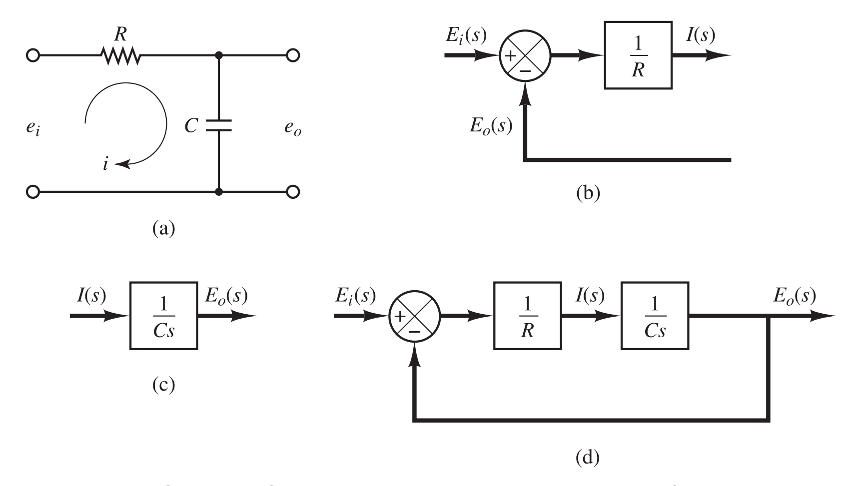


Figura 2-12. (a) Circuito *RC*; (b) diagrama de bloques de la Ecuación (2-6); (c) diagrama de bloques de la Ecuación (2-7); (d) diagrama de bloques del circuito *RC*.

Un diagrama de bloques complicado que contenga muchos lazos de realimentación se simplifica mediante un reordenamiento paso a paso. La simplificación de un diagrama de bloques mediante reordenamientos y sustituciones reduce de manera considerable la labor necesaria para el análisis matemático subsecuente. Sin embargo, debe señalarse que, conforme se simplifica el diagrama de bloques, las funciones de transferencia de los bloques nuevos se vuelven más complejas, debido a que se generan polos y ceros nuevos.

EJEMPLO 2-1 Considere el sistema que aparece en la Figura 2-13(a). Simplifíquese este diagrama. Si se mueve el punto suma del lazo de realimentación negativa que contiene H_2 hacia afuera del lazo de realimentación positiva que contiene H_1, se obtiene la Figura 2-13(b). Si se elimina el lazo de realimentación positiva se obtiene la Figura 2-13(c). La eliminación del lazo que contiene H_2/G_1 origina la Figura 2-13(d). Por último, si se elimina el lazo de realimentación se obtiene la Figura 2-13(e).

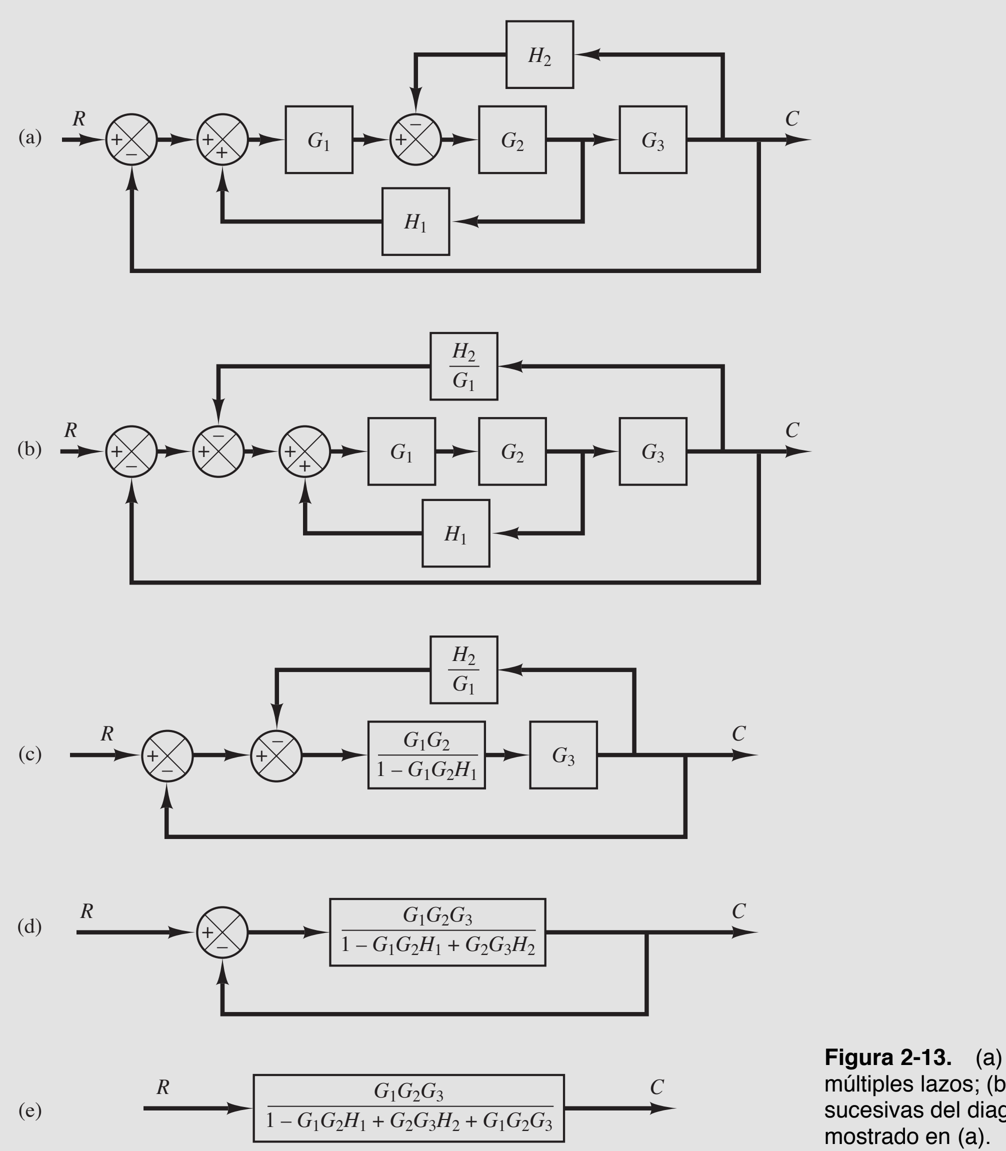


Figura 2-13. (a) Sistema con múltiples lazos; (b)-(e) reducciones sucesivas del diagrama de bloques mostrado en (a).

Observe que el numerador de la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ es el producto de la función de transferencia en el camino directo. El denominador de $C(s)/R(s)$ es igual a

$$\begin{aligned}1 + \sum &(\text{producto de las funciones de transferencia alrededor de cada lazo}) \\ &= 1 + (-G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3) \\ &= 1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3\end{aligned}$$

(El lazo de realimentación positiva da lugar a un término negativo en el denominador.)

2-4 Modelado en el espacio de estados

En esta sección se presenta un material introductorio sobre el análisis de sistemas de control en el espacio de estados.

Teoría de control moderna. La tendencia moderna en los sistemas de ingeniería es hacia una mayor complejidad, debido sobre todo a que se requieren tareas más complejas y buena precisión. Los sistemas complejos pueden tener múltiples entradas y múltiples salidas y pueden ser variantes en el tiempo. Debido a la necesidad de cumplir requisitos cada vez más exigentes en el comportamiento de los sistemas de control, el aumento en la complejidad del sistema y el fácil acceso a las computadoras a gran escala, la teoría moderna de control, que es una nueva aproximación al análisis y diseño de los sistemas de control complejo, se ha desarrollado desde 1960. Esta nueva aproximación se basa en el concepto de estado. El concepto de estado por sí mismo no es nuevo, puesto que ha existido durante bastante tiempo en el campo de la dinámica clásica y en otros campos.

Teoría de control moderna frente a teoría de control convencional. La tendencia de control moderna contrasta con la teoría de control convencional en que su formulación es aplicable a sistemas de múltiples-entradas, múltiples-salidas, que pueden ser lineales o no lineales, invariables en el tiempo o variables en el tiempo, mientras que la teoría convencional sólo es aplicable a sistemas de una entrada-una salida invariantes en el tiempo. Además, la teoría de control moderna es esencialmente una aproximación en el dominio temporal, mientras que la teoría de control convencional es una aproximación en el dominio de la frecuencia compleja. Antes de continuar, se debe definir estado, variables de estado, vector de estado y espacio de estados.

Estado. El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeño (llamadas *variables de estado*), de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geqslant t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \geqslant t_0$.

Obsérvese que el concepto de estado no está limitado a sistemas físicos. Es aplicable a sistemas biológicos, sistemas económicos, sistemas sociales y otros.

Variables de estado. Las variables de un sistema dinámico son las variables que constituyen el menor conjunto de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Si al menos se necesitan n variables $x_1, x_2, ..., x_n$ para describir completamente el comportamiento de un sistema dinámico (de forma que una vez que la entrada para $t \geqslant t_0$ está dada y el estado inicial en $t = t_0$ está especificado, el estado futuro del sistema está determinado completamente), entonces tales n variables son un conjunto de variables de estado.

Obsérvese que las variables de estado no necesitan ser físicamente medibles o cantidades observables. Se pueden seleccionar como variables de estado variables que no representan cantidades físicas y aquellas que no son medibles ni observables. Tal libertad en la elección de las variables de estado es una ventaja de los métodos en el espacio de estados. Sin embargo, prácticamente es conveniente seleccionar para las variables de estado cantidades físicamente medibles, si esto es posible, porque las leyes de control óptimo requerirán realimentar todas las variables de estado con una ponderación adecuada.

Vector de estado. Si se necesitan n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces esas n variables de estado se pueden considerar como las n componentes de un vector $\mathbf{x}$. Este vector se denomina *vector de estado*. Un vector de estado es, por lo tanto, un vector que determina unívocamente el estado del sistema $\mathbf{x}(t)$ en cualquier instante del tiempo $t \geqslant t_0$, una vez que se conoce el estado en $t = t_0$ y se especifica la entrada $u(t)$ para $t \geqslant t_0$.

Espacio de estados. El espacio n-dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1, eje x_2, ..., eje x_n, donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son las variables de estado, se denomina espacio de estados. Cualquier estado se puede representar como un punto en el espacio de estados.

Ecuaciones en el espacio de estados. En el análisis en el espacio de estados se centra la atención en los tres tipos de variables que aparecen en el modelado de los sistemas dinámicos; las variables de entrada, las variables de salida y las variables de estado. Como se verá en la Sección 2-5, la representación en el espacio de estados de un sistema dado no es única, salvo que el número de variables de estado es el mismo para cualquiera que sea la representación en variables de estado de un mismo sistema.

El sistema dinámico debe contener elementos que recuerden los valores de la entrada para $t \geqslant t_1$. Puesto que los integradores en un sistema de control en tiempo continuo sirven como dispositivo de memoria, las salidas de tales integradores se pueden considerar como las variables que describen el estado interno del sistema dinámico. Así las salidas de los integradores sirven como variables de estado. El número de variables de estado para definir completamente la dinámica del sistema es igual al número de integradores que aparezcan en el mismo.

Sea un sistema de múltiples entradas-múltiples salidas con n integradores. Supóngase también que hay r entradas $u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t)$ y m salidas $y_1(t), y_2(t), ..., y_m(t)$. Se definen las n salidas de los integradores como variables de estado: $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$. Entonces el sistema se puede describir mediante

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t)
\end{aligned}
\tag{2-8}
$$

Las salidas $y_1(t), y_2(t), ..., y_m(t)$ del sistema se obtienen mediante

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\
y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\
&\vdots \\
y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t)
\end{aligned}
\tag{2-9}
$$

Si se define

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r; t) \end{bmatrix}, \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

las Ecuaciones (2-8) y (2-9) se convierten en

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{2-10}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{2-11}$$

donde la Ecuación (2-10) es la ecuación de estado y la Ecuación (2-11) es la ecuación de la salida. Si las funciones vectoriales **f** y/o **g** involucran explícitamente el tiempo t, el sistema se denomina sistema variante con el tiempo.

Si se linealizan las Ecuaciones (2-10) y (2-11) alrededor del estado de operación, se tienen las siguientes ecuaciones de estado y de salida linealizadas:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{2.12}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \tag{2.13}$$

donde $\mathbf{A}(t)$ se denomina matriz de estado, $\mathbf{B}(t)$ matriz de entrada, $\mathbf{C}(t)$ matriz de salida y $\mathbf{D}(t)$ matriz de transmisión directa. (Los detalles de la linealización de sistemas no lineales en torno al estado de operación se analizan en la Sección 2.7.) En la Figura 2-14. aparece un diagrama de bloques que representa las Ecuaciones (2-12) y (2-13).

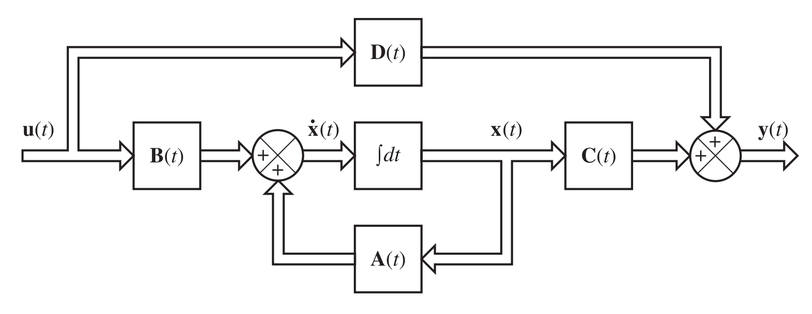


Figura 2-14. Diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continuo representado en el espacio de estados.

Si las funciones vectoriales **f** y **g** no involucran el tiempo t explícitamente, el sistema se denomina sistema invariante con el tiempo. En este caso, las Ecuaciones (2-12) y (2-13) se simplifican a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{2-14}$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{2-15}$$

La Ecuación (2-14) es la ecuación de estado del sistema lineal e invariante con el tiempo y la Ecuación (2-15) es la ecuación de salida para el mismo sistema. Este libro se concentra en los sistemas descritos mediante las Ecuaciones (2-14) y (2-15).

A continuación se presenta un ejemplo para obtener una ecuación de estado y una ecuación de salida.

EJEMPLO 2-2 Considere el sistema mecánico que aparece en la Figura 2-15. Se supone que el sistema es lineal. La fuerza externa $u(t)$ es la entrada al sistema, y el desplazamiento $y(t)$ de la masa es la salida. El desplazamiento $y(t)$ se mide a partir de la posición de equilibrio en ausencia de una fuerza externa. Este sistema tiene una sola entrada y una sola salida.

A partir del diagrama, la ecuación del sistema es

$$m\ddot{y} + b\ddot{y} + ky = u \tag{2-16}$$

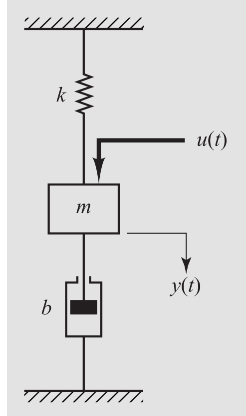


Figura 2-15. Sistema mecánico.

Este sistema es de segundo orden, lo cual significa que contiene dos integradores. Si se definen las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ como

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

a continuación se obtiene

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u$$

o bien

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2-17}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \tag{2-18}$$

La ecuación de salida es

$$y = x_1 \tag{2-19}$$

En una forma matricial, las Ecuaciones (2-17) y (2-18) se escriben como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u \tag{2-20}$$

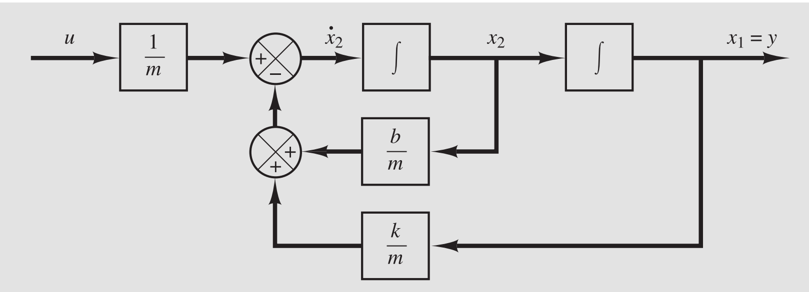


Figura 2-16. Diagrama de bloques del sistema mecánico mostrado en la Figura 2-15.

La ecuación de salida, representada por la Ecuación (2-19), se escribe como

$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

La Ecuación (2-20) es una ecuación de estado y la Ecuación (2-21) es una ecuación de salida para el sistema. Las Ecuaciones (2-20) y (2-21) están en la forma estándar:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

La Figura 2-16 es un diagrama de bloques para el sistema. Observe que las salidas de los integradores son variables de estado.

Correlación entre funciones de transferencia y ecuaciones en el espacio de estados. A continuación se mostrará cómo obtener la función de transferencia de un sistema con una sola entrada y una sola salida a partir de las ecuaciones en el espacio de estados.

Considérese el sistema cuya función de transferencia se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \tag{2-22}$$

Este sistema se representa en el espacio de estados mediante las ecuaciones siguientes:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{2-23}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du \tag{2-24}$$

donde $\mathbf{x}$ es el vector de estado, u es la entrada e y es la salida. Las transformadas de Laplace de las Ecuaciones (2-23) y (2-24) se obtienen mediante

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \tag{2-25}$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s) \tag{2-26}$$

Como la función de transferencia se definió antes como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, cuando las condiciones iniciales son cero, se supone que $\mathbf{x}(0)$ en la Ecuación (2-25) es cero. Por tanto, se tiene que

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

o bien

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

Premultiplicando por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ en ambos miembros de esta última ecuación, se obtiene

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \tag{2-27}$$

Sustituyendo la Ecuación (2-27) en la Ecuación (2-26), se llega a

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D]U(s) \tag{2-28}$$

Después de comparar la Ecuación (2-28) con la Ecuación (2-22) se observa que

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D \tag{2-29}$$

Esta es la expresión de la función de transferencia en términos de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y D.

Obsérvese que el segundo miembro de la Ecuación (2-29) contiene $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Por tanto, $G(s)$ se escribe como

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

donde $Q(s)$ es un polinomio en s. Por tanto, $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ es igual al polinomio característico de $G(s)$. En otras palabras, los valores propios de $\mathbf{A}$ son idénticos a los polos de $G(s)$.

EJEMPLO 2-3 Considere de nuevo el sistema mecánico que aparece en la Figura 2-15. Las ecuaciones en el espacio de estados para el sistema se obtienen mediante las Ecuaciones (2-20) y (2-21). Se obtendrá la función de transferencia para este sistema a partir de las ecuaciones en el espacio de estados.

Sustituyendo $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y D en la Ecuación (2-29), se obtiene

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

$$= [1 \quad 0]\left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} + 0$$

$$= [1 \quad 0]\begin{bmatrix} s & -1 \\ \dfrac{k}{m} & s + \dfrac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s+\frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s+\frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

(Consúltese el Apéndice C para el cálculo de la inversa de una matriz 2×2.)

Se tiene que

$$G(s) = [1 \quad 0] \frac{1}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s+\frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ms^2+bs+k}$$

que es la función de transferencia del sistema. La misma función de transferencia se obtiene de la Ecuación (2-16).

Matriz de transferencia. A continuación, considérese un sistema con entradas y salidas múltiples. Supóngase que hay r entradas $u_1, u_2, ..., u_r$ y m salidas $y_1, y_2, ..., y_m$. Se define

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

La matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$ relaciona la salida $\mathbf{Y}(s)$ con la entrada $\mathbf{U}(s)$, o bien

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

donde $\mathbf{G}(s)$ está dada por

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

[El cálculo de esta ecuación es el mismo que el de la Ecuación (2-29).] Como el vector de entrada $\mathbf{u}$ es de dimensión r y el vector de salida $\mathbf{y}$ es de dimensión m, la matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$ es una matriz de $m \times r$.

2-5 Representación en el espacio de estados de sistemas de ecuaciones diferenciales escalares

Un sistema dinámico formado por una cantidad finita de parámetros concentrados se describe mediante una serie de ecuaciones diferenciales, en las cuales el tiempo es la variable independiente. Con la notación matricial, puede expresarse una ecuación diferencial de n-ésimo orden mediante una ecuación diferencial matricial de primer orden. Si n elementos del vector son un conjunto de variables de estado, la ecuación diferencial matricial es una ecuación de *estado*. En

esta sección se presentan métodos para obtener representaciones en el espacio de estados de sistemas en tiempo continuo.

Representación en el espacio de estados de sistemas de orden *n* representados mediante ecuaciones diferenciales lineales en las que la función de excitación no contiene términos derivados. Considérese el siguiente sistema de n-ésimo orden:

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u \tag{2.30}$$

Si se considera que el conocimiento de $y(0)$, $\dot{y}(0)$, ..., $\overset{(n-1)}{y}(0)$, junto con la entrada $u(t)$ para $t \geqslant 0$, determina totalmente el comportamiento futuro del sistema, se puede tomar $y(t)$, $\dot{y}(t)$, ..., $\overset{(n-1)}{y}(t)$ como un conjunto de n variables de estado. (Matemáticamente, tal elección de variables de estado es muy conveniente. Sin embargo, en la práctica, debido a que los términos que contienen las derivadas de orden superior no son exactos, por los efectos de ruido inherentes en cualquier situación práctica, tal elección de las variables de estado puede no ser conveniente.)

Si se define

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= \overset{(n-1)}{y} \end{aligned}$$

entonces, la Ecuación (2-30) se escribe como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + u \end{aligned}$$

o bien

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{2-31}$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La salida se obtiene mediante

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

o bien

$$y = \mathbf{Cx} \tag{2-32}$$

donde

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

[Obsérvese que D en la Ecuación (2-24) es cero.] La ecuación diferencial de primer orden (2-31) es la ecuación de estado, y la ecuación algebraica (2-32) es la ecuación de salida.

Obsérvese que la representación en el espacio de estados para la función de transferencia del sistema

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

también se obtiene mediante las Ecuaciones (2-31) y (2-32).

Representación en el espacio de estados de sistemas de orden *n* representadas mediante ecuaciones diferenciales lineales en las que la función de excitación contiene términos derivados. Si la ecuación diferencial del sistema contiene derivadas de la función de excitación, tales como

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \tag{2-33}$$

El problema principal al definir las variables de estado para este caso radica en los términos que están derivados. Las variables de estado deben ser de tal modo que eliminen las derivadas de u en la ecuación de estado.

Una forma de obtener una ecuación de estado y una ecuación de salida es definir las siguientes n variables como un conjunto de n variables de estado:

$$\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\
&\vdots \\
x_n &= \overset{(n-1)}{y} - \beta_0 \overset{(n-1)}{u} - \beta_1 \overset{(n-2)}{u} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1}u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1}u
\end{aligned} \tag{2-34}$$

donde β_0, β_1, β_2, ..., β_{n-1} se determinan a partir de

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 \\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\
\beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \\
&\vdots \\
\beta_{n-1} &= b_{n-1} - a_1\beta_{n-2} - \cdots - a_{n-2}\beta_1 - a_{n-1}\beta_0
\end{aligned} \tag{2-35}$$

Con esta elección de variables de estado está garantizada la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de estado. (Obsérvese que esta no es la única elección de un conjunto de variables de estado.) Con la elección actual de variables de estado, se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u
\end{aligned} \tag{2-36}$$

donde β_n está dado por

$$\beta_n = b_n - a_1\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_{n-1}\beta_0$$

[Para obtener la Ecuación (2-36), véase el Problema **A-2-6**.] En términos de las ecuaciones matriciales, la Ecuación (2-36) y la ecuación de salida se escriben como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

o bien

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{2-37}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du \tag{2-38}$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0], \qquad D = \beta_0 = b_0$$

En esta representación en el espacio de estados, las matrices **A** y **C** son exactamente las mismas que para el sistema de la Ecuación (2-30). Las derivadas del segundo miembro de la Ecuación (2-33) sólo afectan a los elementos de la matriz **B**.

Obsérvese que la representación en el espacio de estados para la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

se obtiene también a partir de las Ecuaciones (2-37) y (2-38).

Existen muchas formas de obtener representaciones en el espacio de estados de los sistemas. Algunas de ellas se presentan en este capítulo. En el Capítulo 9 se presentan métodos para obtener representaciones canónicas de sistemas en el espacio del estado (tales como una forma canónica controlable, una forma canónica observable, una forma canónica diagonal y una forma canónica de Jordan).

MATLAB se puede utilizar para obtener representaciones de sistemas en el espacio de estados a partir de las representaciones de función de transferencia. Esto se presenta en la Sección 2-6.

2-6 Transformación de modelos matemáticos con MATLAB

MATLAB es bastante útil para transformar el modelo del sistema de función de transferencia al espacio de estados y viceversa. Se comenzará con el análisis de la transformación de la función de transferencia al espacio de estados.

Sea la función de transferencia en lazo cerrado

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{polinomio numerador en } s}{\text{polinomio denominador en } s} = \frac{\text{num}}{\text{den}}$$

Una vez que se tiene esta expresión de la función de transferencia, la instrucción en MATLAB

```
[A, B, C, D] = tf2ss(num,den)
```

calculará la representación en el espacio de estados. Es importante observar que la representación en el espacio de estados de cualquier sistema no es única. Hay muchas (infinitas) representaciones en el espacio de estados para el mismo sistema. La instrucción en MATLAB calcula una de esas posibles representaciones.

Transformación de la función de transferencia al espacio de estados. Considérese la función de transferencia del sistema

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{(s+10)(s^2+4s+16)}$$

$$= \frac{s}{s^3+14s^2+56s+160} \tag{2-39}$$

Hay muchas (infinitas) representaciones posibles en el espacio de estados para este sistema. Una representación posible en el espacio de estados es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]u$$

Otra posible representación en el espacio de estados (entre las muchas alternativas) es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -56 & -160 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{2-40}$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]u \tag{2-41}$$

MATLAB transforma la función de transferencia dada por la Ecuación (2-39) en la representación en el espacio de estado dada por las Ecuaciones (2-40) y (2-41). Para el sistema del ejemplo considerado aquí, el Programa 2-2 de MATLAB calcula las matrices **A**, **B**, **C** y *D*.

MATLAB Programa 2-2

```
num = [1  0];
den = [1  14  56  160];
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)

A =

   -14  -56  -160
     1    0     0
     0    1     0

B =

     1
     0
     0

C =

     0    1     0

D =

     0
```

Transformación del espacio de estados a la función de transferencia. Para obtener la función de transferencia a partir de las ecuaciones en el espacio de estados, se utiliza la siguiente instrucción:

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D,iu)
```

`iu` se debe especificar para sistemas con más de una entrada. Por ejemplo, si el sistema tiene tres entradas ($u1$, $u2$, $u3$), entonces `iu` debe ser o 1, 2 o 3, donde 1 se refiere a $u1$, 2 a $u2$ y 3 a $u3$.

Si el sistema sólo tiene una entrada, entonces se puede utilizar

```
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D)
```

o bien

```
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,1)
```

En el caso en el que sistema tenga múltiples entradas y múltiples salidas véase el Problema **A-2-12**.

EJEMPLO 2-4 Obtenga la función de transferencia del sistema definido por las siguientes ecuaciones en el espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -25 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ -120 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

El Programa 2-3 de MATLAB calculará la función de transferencia del sistema dado. Dicha función obtenida está dada por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25s + 5}{s^3 + 5s^2 + 25s + 5}$$

MATLAB Programa 2-3

```
A = [0  1  0;  0  0  1;  −5  −25  −5];
B = [0;  25;  −120];
C = [1  0  0];
D = [0];
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D)

num =

  0  0.0000  25.0000  5.0000

den

  1.0000  5.0000  25.0000  5.0000

% ***** El mismo resultado se puede obtener introduciendo
% la siguiente orden: *****

[num,den] = ss2tf(A,B,C,D,1)

num =

  0  0.0000  25.0000  5.0000

den =

  1.0000  5.0000  25.0000  5.0000
```

2-7 Linealización de modelos matemáticos no lineales

Sistemas no lineales. Un sistema es no lineal si no se aplica el principio de superposición. Por tanto, para un sistema no lineal la respuesta a dos entradas no puede calcularse tratando cada entrada a la vez y sumando los resultados.

Aunque muchas relaciones físicas se representan a menudo mediante ecuaciones lineales, en la mayor parte de los casos las relaciones reales no son verdaderamente lineales. De hecho, un estudio cuidadoso de los sistemas físicos revela que incluso los llamados «sistemas lineales» sólo lo son en rangos de operación limitados. En la práctica, muchos sistemas electromecánicos, hidráulicos, neumáticos, etc., involucran relaciones no lineales entre las variables. Por ejemplo, la salida de un componente puede saturarse para señales de entrada grandes. Puede haber una zona muerta que afecte a las señales pequeñas. (La zona muerta de un componente es un rango pequeño de variaciones de entrada a las cuales el componente es insensible.) Puede ocurrir una no linealidad de la ley cuadrática en algunos componentes. Por ejemplo, los amortiguadores que se utilizan en los sistemas físicos pueden ser lineales para operaciones a baja velocidad, pero pueden volverse no lineales a altas velocidades, y la fuerza de amortiguamiento puede hacerse proporcional al cuadrado de la velocidad de operación.

Linealización de sistemas no lineales. En la ingeniería de control, una operación normal del sistema puede ocurrir alrededor de un punto de equilibrio, y las señales pueden consi-

derarse señales pequeñas alrededor del equilibrio. (Debe señalarse que hay muchas excepciones a tal caso.) Sin embargo, si el sistema opera alrededor de un punto de equilibrio y si las señales involucradas son pequeñas, es posible aproximar el sistema no lineal mediante un sistema lineal. Este sistema lineal es equivalente al sistema no lineal, considerado dentro de un rango de operación limitado. Tal modelo linealizado (lineal e invariante con el tiempo) es muy importante en la ingeniería de control.

El procedimiento de linealización que se presenta aquí se basa en el desarrollo de la función no lineal en series de Taylor alrededor del punto de operación y la retención sólo del término lineal. Debido a que no se consideran los términos de orden superior del desarrollo en serie de Taylor, estos términos no considerados deben ser suficientemente pequeños; es decir, las variables sólo se desvían ligeramente de la condición de operación. (De otro modo, el resultado sería inexacto.)

Aproximación lineal de modelos matemáticos no lineales. Con la finalidad de obtener un modelo matemático lineal para un sistema no lineal, se supone que las variables sólo se desvían ligeramente de alguna condición de operación. Considérese un sistema cuya entrada es $x(t)$ y cuya salida es $y(t)$. La relación entre $y(t)$ y $x(t)$ se obtiene mediante

$$y = f(x) \tag{2-42}$$

Si la condición de operación normal corresponde a $\bar{x}$, $\bar{y}$, la Ecuación (2-42) se expande en series de Taylor alrededor de este punto, del modo siguiente:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \cdots \end{aligned} \tag{2-43}$$

donde las derivadas df/dx, d^2f/dx^2, ... se evalúan en $x = \bar{x}$. Si la variación $x - \bar{x}$ es pequeña, es posible no considerar los términos de orden superior en $x - \bar{x}$. Entonces, la Ecuación (2-43) se escribe como

$$y = \bar{y} + K(x - \bar{x}) \tag{2-44}$$

donde

$$\bar{y} = f(\bar{x})$$

$$K = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}}$$

La Ecuación (2-44) puede reescribirse como

$$y - \bar{y} = K(x - \bar{x}) \tag{2-45}$$

que indica que $y - \bar{y}$ es proporcional a $x - \bar{x}$. La Ecuación (2-45) da un modelo matemático lineal para el sistema no lineal obtenido mediante la Ecuación (2-42) cerca del punto de operación $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$.

A continuación, considérese un sistema no lineal cuya salida y es una función de dos entradas x_1 y x_2, de modo que

$$y = f(x_1, x_2) \tag{2-46}$$

Con la finalidad de obtener una aproximación lineal para este sistema no lineal, es posible expandir la Ecuación (2-46) en series de Taylor alrededor del punto de operación normal $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$. Entonces, la Ecuación (2-46) se convierte en

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2)\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1 - \bar{x}_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2 - \bar{x}_2)^2\right] + \cdots$$

donde las derivadas parciales se evalúan en $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2$. Cerca del punto de operación normal, es posible no considerar los términos de orden superior. A continuación, el modelo matemático lineal de este sistema no lineal alrededor de la condición de operación normal se obtiene mediante

$$y - \bar{y} = K_1(x_1 - \bar{x}_1) + K_2(x_2 - \bar{x}_2)$$

donde

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$K_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2}$$

$$K_2 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2}$$

La técnica de linealización presentada aquí es válida alrededor de la condición de operación. Sin embargo, si las condiciones de operación varían ampliamente, tales ecuaciones linealizadas no son adecuadas y deben manejarse ecuaciones no lineales. Es importante recordar que un modelo matemático determinado, que se use en el análisis y el diseño, puede representar con precisión la dinámica de un sistema real para ciertas condiciones de operación, pero puede no ser preciso para otras.

EJEMPLO 2-5 Linealice la ecuación no lineal

$$z = xy$$

en la región $5 \leqslant x \leqslant 7$, $10 \leqslant y \leqslant 12$. Encuentre el error si la ecuación linealizada se utiliza para calcular el valor de z cuando $x = 5$, $y = 10$.

Puesto que la región considerada está dada por $5 \leqslant x \leqslant 7$, $10 \leqslant y \leqslant 12$, se selecciona $\bar{x} = 6$, $\bar{y} = 11$. Entonces $\bar{z} = \bar{x}\bar{y} = 66$. Se va a obtener la ecuación linealizada a partir de la ecuación no lineal cerca del punto $\bar{x} = 6$, $\bar{y} = 11$.

Desarrollando la ecuación no lineal en series de Taylor alrededor del punto $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ y sin considerar los términos de orden más alto, se tiene

$$z - \bar{z} = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y})$$

donde

$$a = \left.\frac{\partial(xy)}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},\, y=\bar{y}} = \bar{y} = 11$$

$$b = \left.\frac{\partial(xy)}{\partial y}\right|_{x=\bar{x},\, y=\bar{y}} = \bar{x} = 6$$

De ahí la ecuación linealizada es

$$z - 66 = 11(x - 6) + 6(y - 11)$$

o bien

$$z = 11x + 6y - 66$$

Cuando $x = 5$, $y = 10$, el valor de z dado por la ecuación linealizada es

$$z = 11x + 6y - 66 = 55 + 60 - 66 = 49$$

El valor exacto de z es $z = xy = 50$. El error es, por lo tanto, $50 - 49 = 1$. En términos de porcentaje el error es del 2 %.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-2-1. Simplifique el diagrama de bloques de la Figura 2-17.

Solución. Primero, se mueve el punto de ramificación de la trayectoria que contiene H_1 fuera del lazo que contiene H_2, como se aprecia en la Figura 2-18(a). Después la eliminación de dos lazos da lugar a la Figura 2-18(b). Al combinar dos bloques en uno se obtiene la Figura 2-18(c).

A-2-2. Simplifique el diagrama de bloques de la Figura 2-19. Obtenga la función de transferencia que relaciona $C(s)$ con $R(s)$.

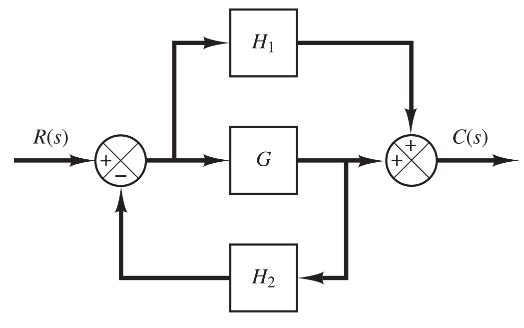


Figura 2-17. Diagrama de bloques de un sistema.

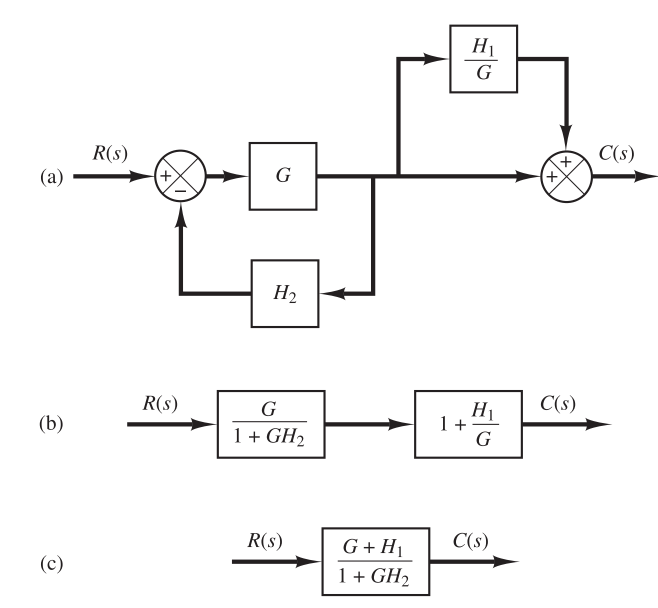


Figura 2-18. Diagrama de bloques simplificado para el sistema mostrado en la Figura 2-17.

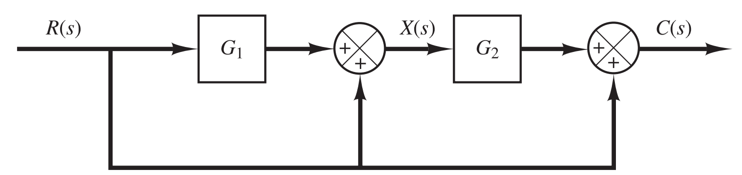


Figura 2-19. Diagrama de bloques de un sistema.

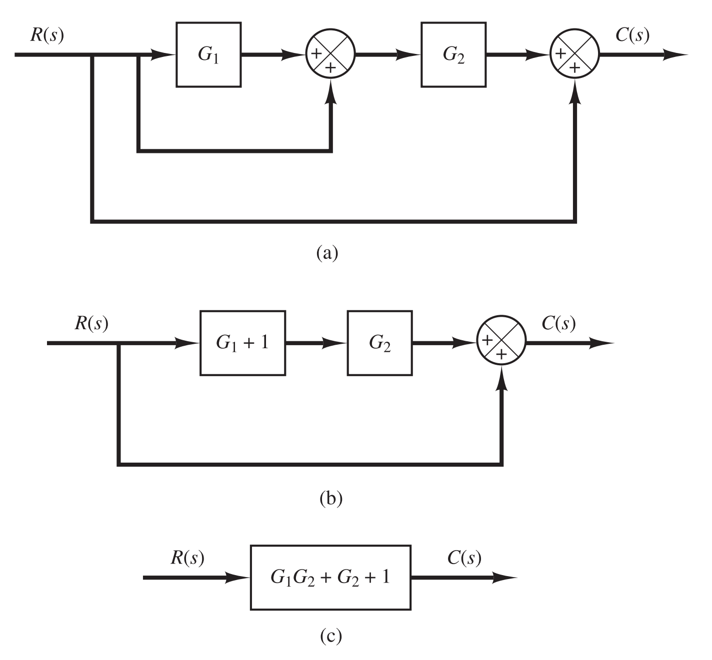


Figura 2-20. Reducción del diagrama de bloques mostrado en la Figura 2-19.

Solución. El diagrama de bloques de la Figura 2-19 se modifica para obtener el que se muestra en la Figura 2-20(a). Eliminando la trayectoria directa menor, se obtiene la Figura 2-20(b), que se simplifica a la que se muestra en la Figura 2-20(c). Así, la función de transferencia $C(s)/R(s)$ se consigue mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1G_2 + G_2 + 1$$

También se obtiene el mismo resultado procediendo del modo siguiente. Como la señal $X(s)$ es la suma de dos señales $G_1R(s)$ y $R(s)$, se tiene que

$$X(s) = G_1R(s) + R(s)$$

La señal de salida $C(s)$ es la suma de $G_2X(s)$ y $R(s)$. Por tanto,

$$C(s) = G_2X(s) + R(s) = G_2[G_1R(s) + R(s)] + R(s)$$

Así se obtiene el mismo resultado que antes:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1G_2 + G_2 + 1$$

A-2-3. Simplifique el diagrama de bloques que se muestra en la Figura 2-21. Después, obtenga la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

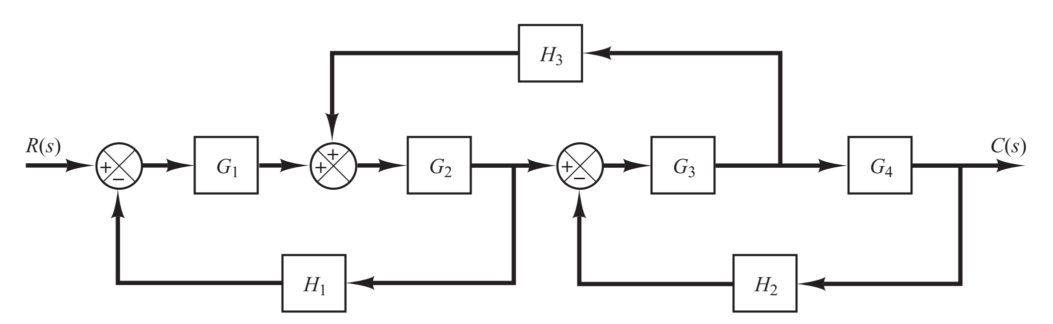


Figura 2-21. Diagrama de bloques de un sistema.

Solución. Primero se mueve el punto de la rama entre G_3 y G_4 al lado derecho del lazo que contiene G_3, G_4 y H_2. Después se mueve el punto de suma entre G_1 y G_2 a la izquierda del primer punto de suma. Véase la Figura 2-22(a). Si se simplifica cada lazo, el diagrama de bloques se puede modificar como se muestra en la Figura 2-22(b). En la Figura 2-22(c) se muestran los resultados de la simplificación; a partir de ella, se obtiene como función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ la siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 + G_1G_2H_1 + G_3G_4H_2 - G_2G_3H_3 + G_1G_2G_3G_4H_1H_2}$$

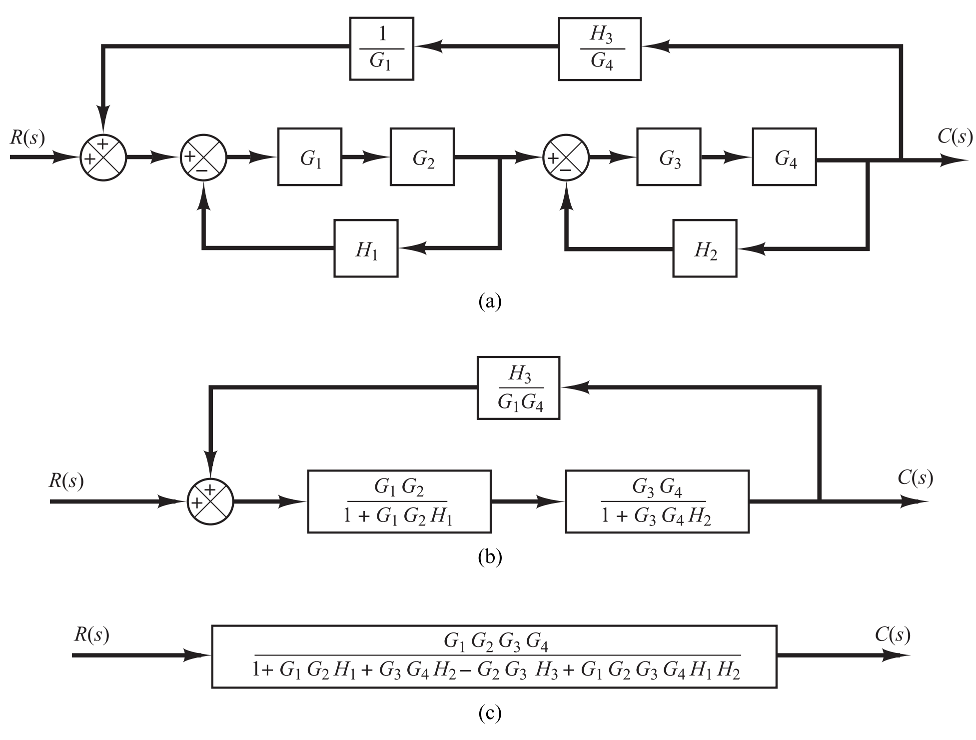


Figura 2-22. Reducciones sucesivas del diagrama de bloques mostrado en la Figura 2-21.

A-2-4. Obtenga las funciones de transferencia $C(s)/R(s)$ y $C(s)/D(s)$ del sistema que se muestra en la Figura 2-23.

Solución. A partir de la Figura 2-23 se obtiene

$$U(s) = G_f R(s) + G_c E(s) \tag{2-47}$$

$$C(s) = G_p[D(s) + G_1 U(s)] \tag{2-48}$$

$$E(s) = R(s) - HC(s) \tag{2-49}$$

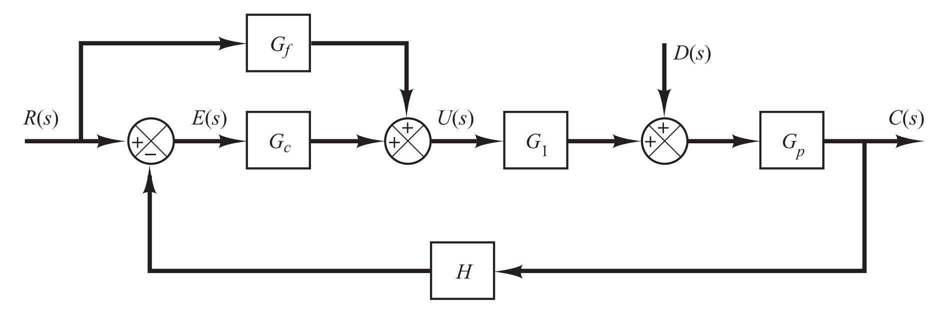


Figura 2-23. Sistema de control con entrada de referencia y entrada de perturbaciones.

Sustituyendo la Ecuación (2-47) en la Ecuación (2-48) se obtiene

$$C(s) = G_p D(s) = G_1 G_p[G_f R(s) + G_c E(s)] \tag{2-50}$$

Sustituyendo la Ecuación (2-49) en la Ecuación (2-50) se obtiene

$$C(s) = G_p D(s) + G_1 G_p \{G_f R(s) + G_c [R(s) - HC(s)]\}$$

Si se resuelve esta última ecuación para $C(s)$ se obtiene

$$C(s) + G_1 G_p G_c HC(s) = G_p D(s) + G_1 G_p (G_f + G_c) R(s)$$

De ahí,

$$C(s) = \frac{G_p D(s) + G_1 G_p (G_f + G_c) R(s)}{1 + G_1 G_p G_c H} \tag{2-51}$$

Observe que la Ecuación (2-51) da la respuesta $C(s)$ cuando están presentes tanto la entrada de referencia $R(s)$ como la entrada de perturbación $D(s)$.

Para encontrar la función de transferencia $C(s)/R(s)$, se considera $D(s) = 0$ en la Ecuación (2.51). Entonces se obtiene

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_p (G_f + G_c)}{1 + G_1 G_p G_c H}$$

Asimismo, para encontrar la función de transferencia $C(s)/D(s)$, se considera $R(s) = 0$ en la Ecuación (2-51). Entonces $C(s)/D(s)$ está dada por

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_1 G_p G_c H}$$

A-2-5. La Figura 2-24 muestra un sistema con dos entradas y dos salidas. Calcular $C_1(s)/R_1(s)$, $C_1(s)/R_2(s)$, $C_2(s)/R_1(s)$ y $C_2(s)/R_2(s)$. (Para calcular las salidas para $R_1(s)$, suponga que $R_2(s)$ es cero, y viceversa.)

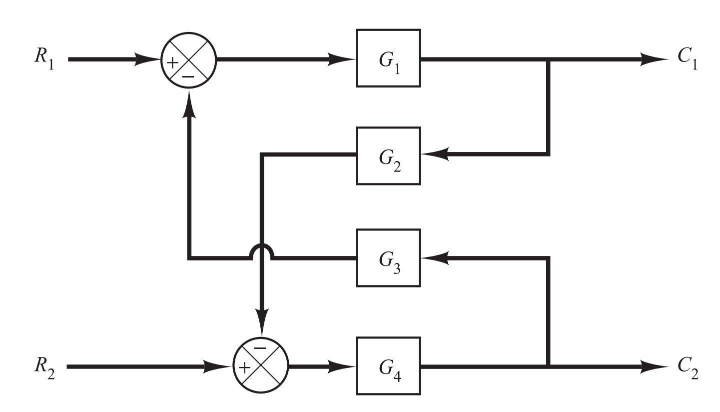


Figura 2-24. Sistema con dos entradas y dos salidas.

Solución. A partir de la figura se obtiene

$$C_1 = G_1(R_1 - G_3 C_2) \tag{2-52}$$

$$C_2 = G_4(R_2 - G_2 C_1) \tag{2-53}$$

Si se sustituye la Ecuación (2-53) en la Ecuación (2-52) se obtiene

$$C_1 = G_1[R_1 - G_3 G_4 (R_2 - G_2 C_1)] \tag{2-54}$$

Si se sustituye la Ecuación (2-52) en la Ecuación (2-53) se obtiene

$$C_2 = G_4[R_2 - G_2G_1(R_1 - G_3C_2)] \tag{2-55}$$

Si se resuelve la Ecuación (2-54) para C_1, se obtiene

$$C_1 = \frac{G_1R_1 - G_1G_3G_4R_2}{1 - G_1G_2G_3G_4} \tag{2-56}$$

Si se resuelve la Ecuación (2-55) para C_2, se sigue

$$C_2 = \frac{-G_1G_2G_4R_1 + G_4R_2}{1 - G_1G_2G_3G_4} \tag{2-57}$$

Las Ecuaciones (2-56) y (2-57) se pueden combinar en la forma de matriz de transferencia de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{G_1}{1 - G_1G_2G_3G_4} & -\dfrac{G_1G_3G_4}{1 - G_1G_2G_3G_4} \\ -\dfrac{G_1G_2G_4}{1 - G_1G_2G_3G_4} & \dfrac{G_4}{1 - G_1G_2G_3G_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

Entonces las funciones $C_1(s)/R_1(s)$, $C_1(s)/R_2(s)$, $C_2(s)/R_1(s)$ y $C_2(s)/R_2(s)$ se pueden obtener de la forma

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)} = \frac{G_1}{1 - G_1G_2G_3G_4}, \qquad \frac{C_1(s)}{R_2(s)} = \frac{G_1G_3G_4}{1 - G_1G_2G_3G_4}$$

$$\frac{C_2(s)}{R_1(s)} = \frac{G_1G_2G_4}{1 - G_1G_2G_3G_4}, \qquad \frac{C_2(s)}{R_2(s)} = \frac{G_4}{1 - G_1G_2G_3G_4}$$

Observe que las Ecuaciones (2-56) y (2-57) dan las respuestas C_1 y C_2, respectivamente, cuando están presentes ambas entradas R_1 y R_2.

Observe que cuando $R_2(s) = 0$, el diagrama de bloques original se puede simplificar como se muestra en las Figuras 2-25(a) y (b). De forma similar, cuando $R_1(s) = 0$, el diagrama de bloques original se puede simplificar como se muestra en las Figuras 2-25(c) y (d). A partir de estos diagramas de bloques simplificados se pueden obtener $C_1(s)/R_1(s)$, $C_2(s)/R_1(s)$, $C_1(s)/R_2(s)$ y $C_2(s)/R_2(s)$, como se muestra en el lado derecho del correspondiente diagrama de bloques.

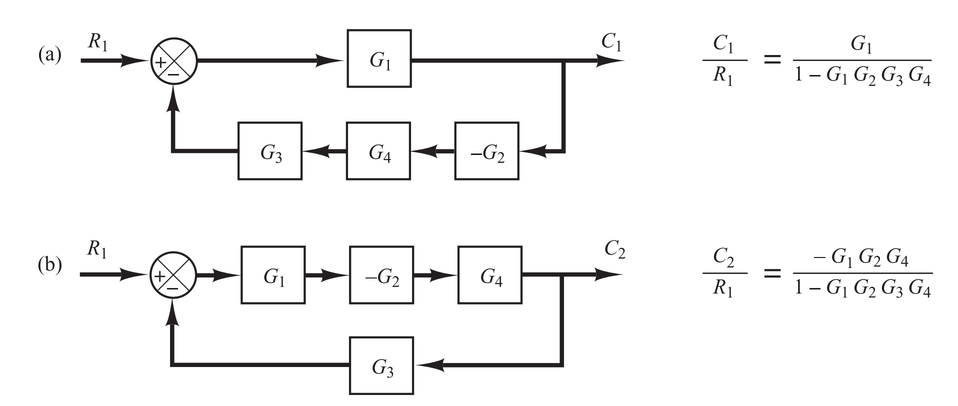
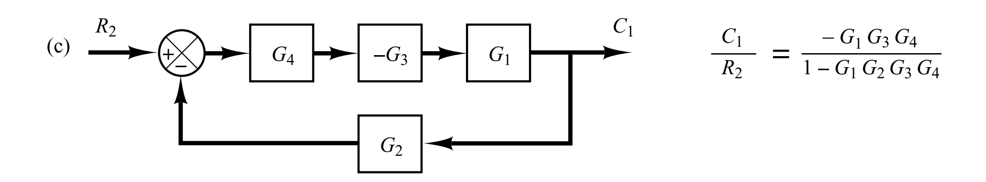


Figura 2-25. Diagrama de bloques simplificado y funciones de transferencia en lazo cerrado asociadas (*continúa*).



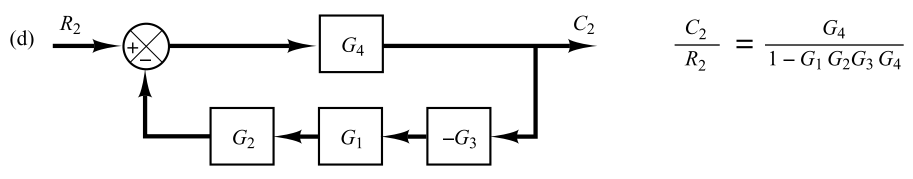


Figura 2-25. (*Continuación*.)

A-2-6. Demuestre que, para el sistema descrito por la ecuación diferencial

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u \tag{2-58}$$

las ecuaciones de estado y de salida se obtienen, respectivamente, mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u \tag{2-59}$$

y

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta_0 u \tag{2-60}$$

donde las variables de estado se definen mediante

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\ \beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \end{aligned}$$

Solución. A partir de la definición de las variables de estado x_2 y x_3, se tiene que

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \tag{2-61}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \tag{2-62}$$

A fin de obtener la ecuación para $\dot{x}_3$, primero se considera, de la Ecuación (2-58), que

$$\dddot{y} = -a_1\ddot{y} - a_2\dot{y} - a_3 y + b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u$$

Como

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= \dddot{y} - \beta_0\dddot{u} - \beta_1\ddot{u} - \beta_2\dot{u} \\
&= (-a_1\ddot{y} - a_2\dot{y} - a_3 y) + b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u - \beta_0\dddot{u} - \beta_1\ddot{u} - \beta_2\dot{u} \\
&= -a_1(\ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u) - a_1\beta_0\ddot{u} - a_1\beta_1\dot{u} - a_1\beta_2 u \\
&\quad - a_2(\dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u) - a_2\beta_0\dot{u} - a_2\beta_1 u - a_3(y - \beta_0 u) - a_3\beta_0 u \\
&\quad + b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u - \beta_0\dddot{u} - \beta_1\ddot{u} - \beta_2\dot{u} \\
&= -a_1x_3 - a_2x_2 - a_3x_1 + (b_0 - \beta_0)\dddot{u} + (b_1 - \beta_1 - a_1\beta_0)\ddot{u} \\
&\quad + (b_2 - \beta_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0)\dot{u} + (b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0)u \\
&= -a_1x_3 - a_2x_2 - a_3x_1 + (b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0)u \\
&= -a_1x_3 - a_2x_2 - a_3x_1 + \beta_3 u
\end{aligned}$$

Por tanto, se obtiene

$$\dot{x}_3 = -a_3x_1 - a_2x_2 - a_1x_3 + \beta_3 u \tag{2-63}$$

Combinando las Ecuaciones (2-61), (2-62) y (2-63) en una ecuación diferencial matricial, se obtiene la Ecuación (2-59). Asimismo, a partir de la definición de la variable de estado x_1 se obtiene la ecuación de salida producida por la Ecuación (2-60).

A-2-7. Obtenga la ecuación en el espacio de estados y la ecuación de salida definida por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^3 + s^2 + s + 2}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

Solución. A partir de la función de transferencia dada, la ecuación diferencial del sistema es

$$\dddot{y} + 4\ddot{y} + 5\dot{y} + 2y = 2\dddot{u} + \ddot{u} + \dot{u} + 2u$$

Si se compara esta ecuación con la ecuación estándar dada por la Ecuación (2-33), se puede reescribir

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u$$

se encuentra

$$\begin{aligned}
&a_1 = 4, \qquad a_2 = 5, \qquad a_3 = 2 \\
&b_0 = 2, \qquad b_1 = 1, \qquad b_2 = 1, \qquad b_3 = 2
\end{aligned}$$

Si se refiere a la Ecuación (2-35) se obtiene

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 = 2 \\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 = 1 - 4 \times 2 = -7 \\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 1 - 4 \times (-7) - 5 \times 2 = 19 \\
\beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \\
&= 2 - 4 \times 19 - 5 \times (-7) - 2 \times 2 = -43
\end{aligned}$$

En referencia a la Ecuación (2-34) se define

$$\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u = y - 2u \\
x_2 &= \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 + 7u \\
x_3 &= \dot{x}_2 - \beta_2 u = \dot{x}_2 - 19u
\end{aligned}$$

Entonces, refiriéndose a la Ecuación (2-36),

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 - 7u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + 19u \\
\dot{x}_3 &= -a_3x_1 - a_2x_2 - a_1x_3 + \beta_3 u \\
&= -2x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 43u
\end{aligned}$$

De ahí, la representación en el espacio de estados del sistema es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 19 \\ -43 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 2u$$

Esta es una posible representación en el espacio de estados del sistema. Hay muchas otras (infinitas). Si se utiliza MATLAB, se obtiene la siguiente representación en el espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [-7 \quad -9 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 2u$$

Véase el programa MATLAB 2-4. (Observe que todas las representaciones para el mismo sistema son equivalentes.)

MATLAB Programa 2-4

```
num = [2  1  1  2];
den = [1  4  5  2];
[A,B,C,D] = tf2ss(num, den)
A =

   –4  –5  –2
    1   0   0
    0   1   0

B =

   1
   0
   0

C =

   –7  –9  –2

D =

   2
```

A-2-8. Obtenga el modelo en el espacio de estados del sistema que aparece en la Figura 2-26.

Solución. El sistema contiene un integrador y dos integradores con retardo. La salida de cada integrador o integrador con retardo puede ser una variable de estado. Se define la salida de la planta como x_1, la salida del controlador como x_2 y la salida del sensor como x_3. Así, se obtiene

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{10}{s+5}$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s) - X_3(s)} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

que puede reescribirse como

$$sX_1(s) = -5X_1(s) + 10X_2(s)$$

$$sX_2(s) = -X_3(s) + U(s)$$

$$sX_3(s) = X_1(s) - X_3(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

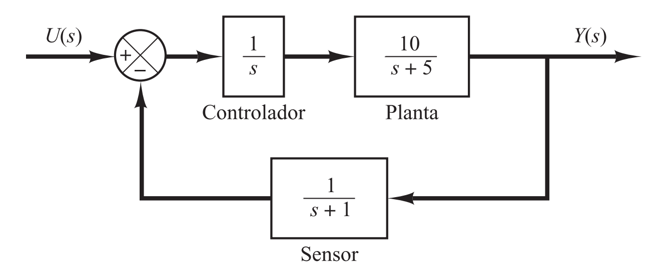


Figura 2-26. Sistema de control.

Tomando la transformada inversa de Laplace de las cuatro ecuaciones precedentes se obtiene

$$\dot{x}_1 = -5x_1 + 10x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_3 + u$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - x_3$$

$$y = x_1$$

Por tanto, un modelo en el espacio de estados del sistema en la forma estándar se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Es importante observar que esta no es la única representación en el espacio de estados del sistema. Son posibles muchas otras representaciones en el espacio de estados. Sin embargo, el número de variables de estado es igual en cualquier representación en el espacio de estados del mismo sistema. En este sistema, las variables de estado son tres, sin considerar cuáles se elijan como variables de estado.

A-2-9. Obtenga un modelo en el espacio de estados para el sistema que aparece en la Figura 2-27(a).

Solución. Primero, obsérvese que $(as + b)/s^2$ incluye una derivada. Tal derivada se evita si se modifica $(as + b)/s^2$ como

$$\frac{as + b}{s^2} = \left(a + \frac{b}{s}\right)\frac{1}{s}$$

Utilizando esta modificación, el diagrama de bloques de la Figura 2-27(a) se convierte en el que se muestra en la Figura 2-27(b).

Defínanse las salidas de los integradores como variables de estado, tal como se aprecia en la Figura 2-27(b). Después, a partir de la Figura 2-27(b) se obtiene

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s) + a[U(s) - X_1(s)]} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{X_2(s)}{U(s) - X_1(s)} = \frac{b}{s}$$

$$Y(s) = X_1(s)$$

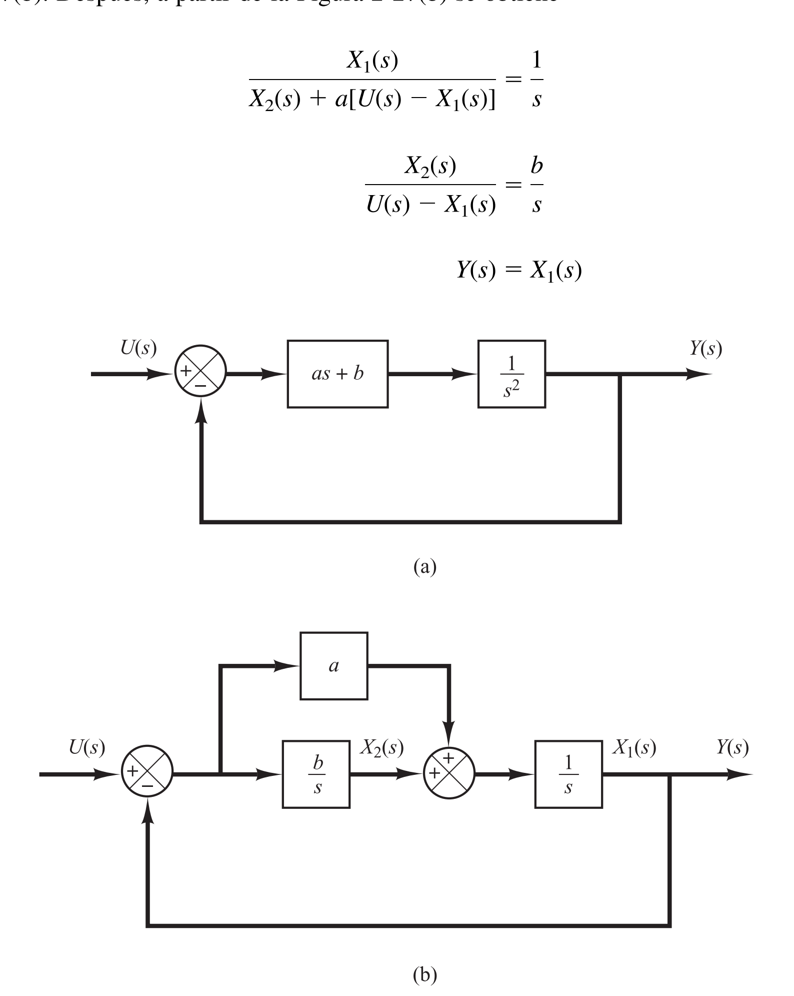


Figura 2-27. (a) Sistema de control; (b) diagrama de bloques modificado.

que puede modificarse como

$$sX_1(s) = X_2(s) + a[U(s) - X_1(s)]$$
$$sX_2(s) = -bX_1(s) + bU(s)$$
$$Y(s) = X_1(s)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de las tres ecuaciones anteriores, se obtiene

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + x_2 + au$$
$$\dot{x}_2 = -bx_1 + bu$$
$$y = x_1$$

Si se reescriben las ecuaciones de estado y de salida en la forma matricial estándar, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A-2-10. Obtenga una representación en el espacio de estados del sistema que se muestra en la Figura 2-28(a).

Solución. En este problema, primero se expande $(s + z)/(s + p)$ en fracciones simples.

$$\frac{s + z}{s + p} = 1 + \frac{z - p}{s + p}$$

A continuación, se convierte $K/[s(s + a)]$ en el producto de K/s y $1/(s + a)$. Después, se vuelve a dibujar el diagrama de bloques como aparece en la Figura 2-28(b). Definiendo un conjunto de variables de estado, según se aprecia en la Figura 2-28(b), se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -Kx_1 + Kx_3 + Ku$$
$$\dot{x}_3 = -(z - p)x_1 - px_3 + (z - p)u$$
$$y = x_1$$

Si se reescribe la ecuación se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -K & 0 & K \\ -(z - p) & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ z - p \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Observe que la salida del integrador y la salida de los integradores con retardo de primer orden $[1/(s + a)$ y $(z - p)/(s + p)]$ se eligen como variables de estado. Es importante recordar que la salida del bloque $(s + z)/(s + p)$ de la Figura 2-28(a) no puede ser una variable de estado, porque este bloque contiene una derivada, $s + z$.

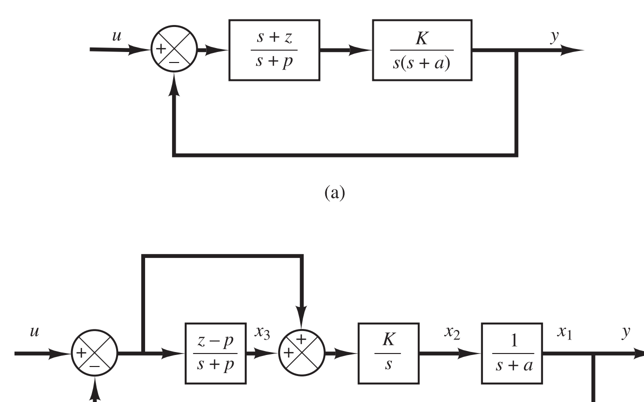


Figura 2-28. (a) Sistema de control; (b) diagrama de bloques con las variables de estado para el sistema.

A-2-11. Obtenga la función de transferencia del sistema definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Solución. Si se refiere a la Ecuación (2-29), la función de transferencia $G(s)$ está dada por

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

En este problema, las matrices **A**, **B**, **C** y D son

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \qquad D = 0$$

De ahí,

$$G(s) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

A-2-12. Considere un sistema con múltiples entradas y múltiples salidas. Cuando el sistema tiene más de una salida, la instrucción

```
[NUM,den] = ss2tf(A,B,C,D,iu)
```

calcula la función de transferencia de todas las salidas a cada entrada. (Los coeficientes del numerador se devuelven en la matriz NUM con tantas filas como salidas haya).

Considere el sistema definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Este sistema tiene dos entradas y dos salidas. Las cuatro funciones de transferencia son: $Y_1(s)/U_1(s)$, $Y_2(s)/U_1(s)$, $Y_1(s)/U_2(s)$ y $Y_2(s)/U_2(s)$. (Cuando se considera la salida u_1, se supone que la entrada u_2 es cero, y viceversa.)

Solución. El Programa 2-5 en MATLAB origina las cuatro funciones de transferencia.

MATLAB Programa 2-5

```
A = [0  1;–25  –4];
B = [1  1;0  1];
C = [1  0;0  1];
D = [0  0;0  0];
[NUM,den] = ss2tf(A,B,C,D,1)

NUM =

     0  1    4
     0  0  –25

den =

     1  4   25

[NUM,den] = ss2tf(A,B,C,D,2)

NUM =

   0  1.0000    5.0000
   0  1.0000  –25.0000

den =

      1    4   25
```

Esta es la representación en MATLAB de las cuatro funciones de transferencia siguientes:

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{s+4}{s^2+4s+25}, \qquad \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{-25}{s^2+4s+25}$$

$$\frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = \frac{s+5}{s^2+4s+25}, \qquad \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{s-25}{s^2+4s+25}$$

A-2-13. Linealícese la ecuación no lineal

$$z = x^2 + 4xy + 6y^2$$

en la región definida por $8 \leqslant x \leqslant 10$, $2 \leqslant y \leqslant 4$.

Solución. Se define

$$f(x, y) = z = x^2 + 4xy + 6y^2$$

Entonces

$$z = f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - \bar{y})\right]_{x=\bar{x},\, y=\bar{y}} + \cdots$$

donde $\bar{x} = 9$, $\bar{y} = 3$.

Como los términos de mayor orden en la ecuación expandida son pequeños, despreciando esos términos de orden más alto, se obtiene

$$z - \bar{z} = K_1(x - \bar{x}) + K_2(y - \bar{y})$$

donde

$$K_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},\, y=\bar{y}} = 2\bar{x} + 4\bar{y} = 2 \times 9 + 4 \times 3 = 30$$

$$K_2 = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=\bar{x},\, y=\bar{y}} = 4\bar{x} + 12\bar{y} = 4 \times 9 + 12 \times 3 = 72$$

$$\bar{z} = \bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + 6\bar{y}^2 = 9^2 + 4 \times 9 \times 3 + 6 \times 9 = 243$$

Así,

$$z - 243 = 30(x - 9) + 72(y - 3)$$

De ahí una aproximación lineal de la ecuación no lineal dada cerca del punto de operación es

$$z - 30x - 72y + 243 = 0$$

PROBLEMAS

B-2-1. Simplifique el diagrama de bloques que aparece en la Figura 2-29 y obtenga la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

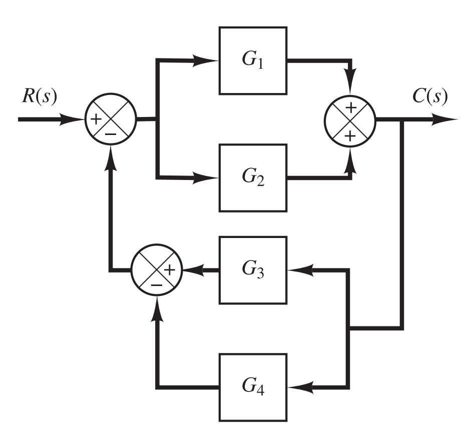


Figura 2-29. Diagrama de bloques de un sistema.

B-2-2. Simplifique el diagrama de bloques que aparece en la Figura 2-30 y obtenga la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

B-2-3. Simplifique el diagrama de bloques que aparece en la Figura 2-31 y obtenga la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$.

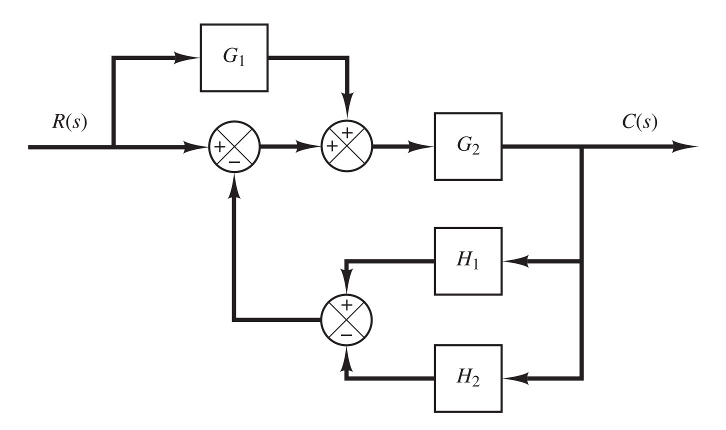


Figura 2-30. Diagrama de bloques de un sistema.

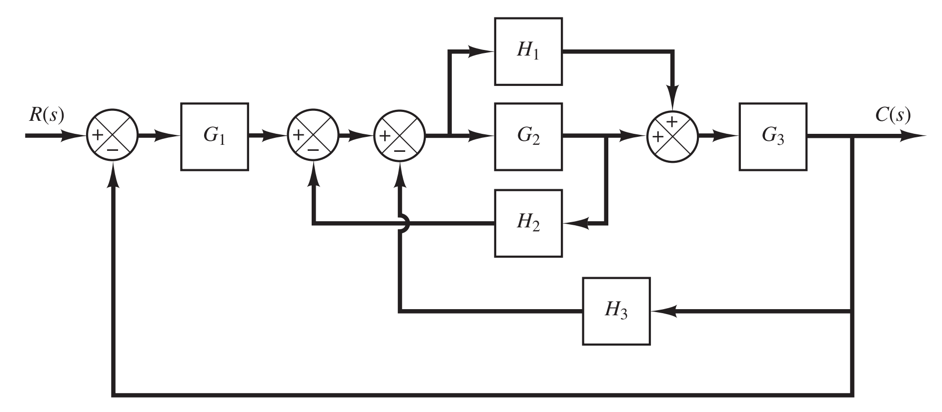


Figura 2-31. Diagrama de bloques de un sistema.

B-2.4. Considere los controladores automáticos industriales cuyas acciones de control son proporcionales, integrales, proporcionales-integrales, proporcionales-derivativas y proporcionales-integrales-derivativas. Las funciones de transferencia de estos controladores se obtienen, respectivamente, a partir de

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 - \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

donde $U(s)$ es la transformada de Laplace de $u(t)$, la salida del controlador, y $E(s)$ es la transformada de Laplace de $e(t)$, la señal de error. Trace las curvas $u(t)$ frente a t para cada uno de los cinco tipos de controladores, cuando la señal de error es

(a) $e(t)$ = función escalón unitario

(b) $e(t)$ = función rampa unitaria

Al trazar las curvas, suponga que los valores numéricos de K_p, K_i, T_i y T_d están dados por

$$K_p = \text{ganancia proporcional} = 4$$
$$K_i = \text{ganancia integral} = 2$$
$$T_i = \text{tiempo integral} = 2 \text{ seg}$$
$$T_d = \text{tiempo derivativo} = 0.8 \text{ seg}$$

B-2-5. La Figura 2-32 muestra un sistema en lazo cerrado con entrada de referencia y entrada de perturbación. Obtenga la expresión para la entrada $C(s)$ cuando ambas, la entrada de referencia y la entrada de perturbación, están presentes.

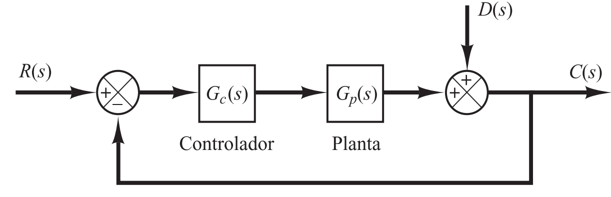


Figura 2-32. Sistema en lazo cerrado.

B-2-6. Considere el sistema que se muestra en la Figura 2-33. Calcular la expresión del error en estado estacionario cuando están presentes tanto la señal entrada de referencia $R(s)$ como la entrada de perturbación $D(s)$.

B-2-7. Obtenga las funciones de transferencia $C(s)/R(s)$ y $C(s)/D(s)$ del sistema que se muestra en la Figura 2-34.

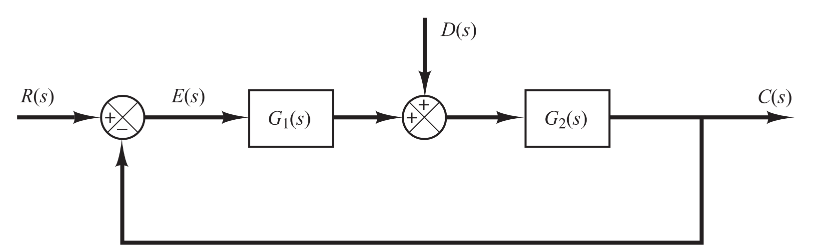


Figura 2-33. Sistema de control.

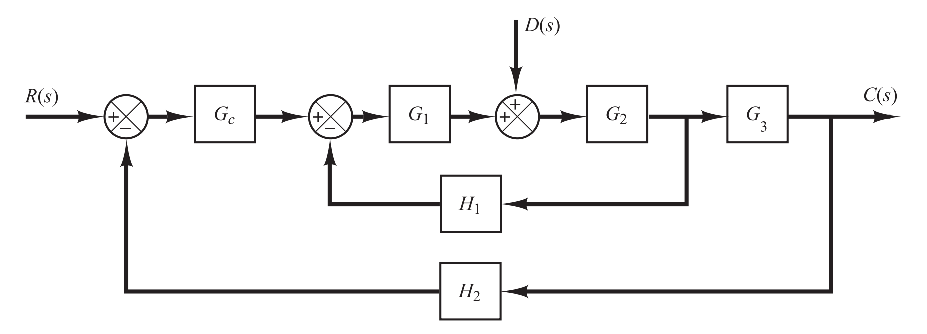


Figura 2-34. Sistema de control.

B-2-8. Obtenga una representación en el espacio de estados del sistema de la Figura 2-35.

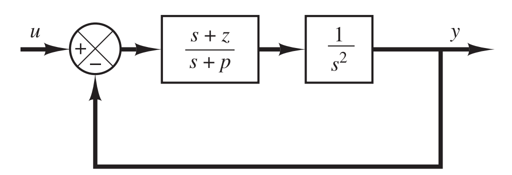


Figura 2-35. Sistema de control.

B-2-9. Considere el sistema descrito mediante

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} = u$$

Obtenga una representación en el espacio de estado del sistema.

B-2-10. Considere el sistema descrito mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenga la función de transferencia del sistema.

B-2-11. Considere un sistema definido por las siguientes ecuaciones en el espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenga la función $G(s)$ del sistema.

B-2-12. Obtenga la matriz de transferencia del sistema definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

B-2-13. Linealice la ecuación no lineal

$$z = x^2 + 8xy + 3y^2$$

en la región definida por $2 \leqslant x \leqslant 4$, $10 \leqslant y \leqslant 12$.

B-2-14. Encuentre para una ecuación linealizada para

$$y = 0{,}2x^3$$

alrededor de un punto $x = 2$.



Modelado matemático de sistemas mecánicos y sistemas eléctricos

3-1 Introducción

Este capítulo presenta el modelado matemático de sistemas mecánicos y de sistemas eléctricos. En el Capítulo 2 se obtuvieron los modelos matemáticos de un circuito eléctrico simple y de un sistema mecánico sencillo. En este capítulo se considera el modelado matemático de una variedad de sistemas mecánicos y sistemas eléctricos que pueden aparecer en los sistemas de control.

La ley fundamental que controla los sistemas mecánicos es la segunda ley de Newton. En la Sección 3-2 se aplica esta ley a diversos sistemas mecánicos y se calculan los modelos como función de transferencia y en el espacio de estados.

Las leyes básicas que controlan los circuitos eléctricos son las leyes de Kirchhoff. En la Sección 3-3 se obtienen los modelos como función de transferencia y en el espacio de estados de diversos circuitos eléctricos y sistemas de amplificadores operacionales que pueden aparecer en muchos sistemas de control.

3-2 Modelado matemático de sistemas mecánicos

Esta sección presenta en primer lugar sistemas sencillos de resortes y sistemas simples de amortiguadores. Después calcula los modelos como función de transferencia y en el espacio de estados de diversos sistemas mecánicos.

EJEMPLO 3-1 Se va a obtener la constante del resorte de los sistemas que se muestran en las Figuras 3-1(a) y (b), respectivamente.

Para los resortes en paralelo [Figura 3-1(a)], la constante del resorte equivalente k_{eq} se obtiene de

$$k_1 x + k_2 x = F = k_{eq} x$$

o

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

Para los resortes en serie [Figura 3-1(b)], la fuerza en cada resorte es la misma. Así,

$$k_1 y = F, \qquad k_2(x - y) = F$$

Si se elimina y de esas dos ecuaciones se obtiene

$$k_2\left(x - \frac{F}{k_1}\right) = F$$

o bien

$$k_2 x = F + \frac{k_2}{k_1} F = \frac{k_1 + k_2}{k_1} F$$

La constante equivalente del resorte k_{eq} para este caso es

$$k_{eq} = \frac{F}{x} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1}{\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}}$$

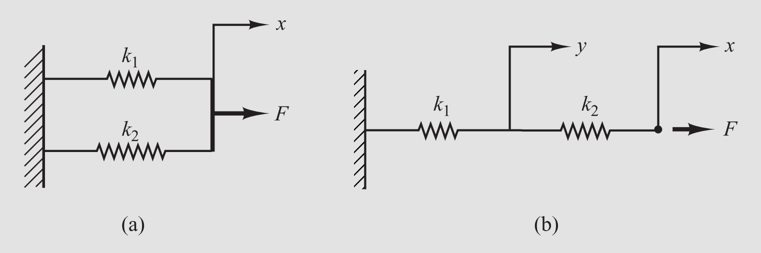


Figura 3-1. (a) Sistema formado por dos resortes en paralelo; (b) sistema formado por dos resortes en serie.

EJEMPLO 3-2 Se va a obtener el coeficiente de fricción viscosa equivalente b_{eq} para cada uno de los sistemas que se muestran en las Figuras 3-2(a) y (b). Un amortiguador es un dispositivo que proporciona fricción viscosa o amortiguamiento. Está formado por un pistón y un cilindro lleno de aceite. El aceite resiste cualquier movimiento relativo entre la varilla del pistón y el cilindro, debido a que el aceite debe fluir alrededor del pistón (o a través de orificios en el pistón) de un lado del pistón al otro. El amortiguador esencialmente absorbe energía. Esta energía absorbida se disipa como calor y el amortiguador no almacena energía cinética ni potencial.

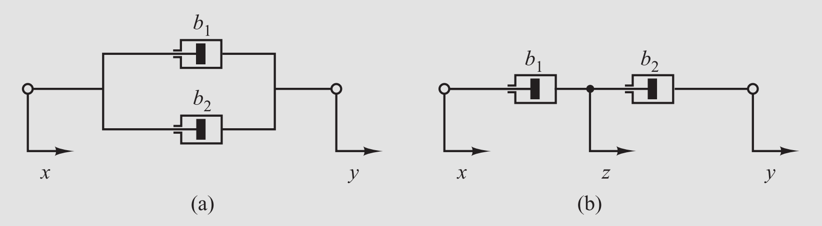


Figura 3-2. (a) Dos amortiguadores conectados en paralelo; (b) dos amortiguadores conectados en serie.

(a) La fuerza f debida a los amortiguadores es

$$f = b_1(\dot{y} - \dot{x}) + b_2(\dot{y} - \dot{x}) = (b_1 + b_2)(\dot{y} - \dot{x})$$

En términos del coeficiente de fricción viscosa equivalente b_{eq}, la fuerza f está dada por

$$f = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x})$$

De ahí,

$$b_{eq} = b_1 + b_2$$

(b) La fuerza f debida a los amortiguadores es

$$f = b_1(\dot{z} - \dot{x}) = b_2(\dot{y} - \dot{z}) \tag{3-1}$$

donde z es el desplazamiento de un punto entre el amortiguador b_1 y el amortiguador b_2. (Observe que la misma fuerza se transmite a través del eje.) De la Ecuación (3-1), se tiene

$$(b_1 + n_2)\dot{z} = b_2\dot{y} + b_1\dot{x}$$

o bien

$$\dot{z} = \frac{1}{b_1 + b_2}(b_2\dot{y} + b_1\dot{x}) \tag{3-2}$$

En términos del coeficiente de fricción viscosa equivalente b_{eq}, la fuerza f está dada por

$$f = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x})$$

Si se sustituye la Ecuación (3-2) en la Ecuación (3-1), se tiene

$$f = b_2(\dot{y} - \dot{z}) = b_2\left[\dot{y} - \frac{1}{b_1 + b_2}(b_2\dot{y} + b_1\dot{x})\right]$$

$$= \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}(\dot{y} - \dot{x})$$

Así,

$$f = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x}) = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}(\dot{y} - \dot{x})$$

De ahí,

$$b_{eq} = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} = \frac{1}{\dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2}}$$

EJEMPLO 3-3 Considérese el sistema masa-resorte-amortiguador montado en un carro, sin masa, que aparece en la Figura 3-3. Se va a obtener un modelo matemático de este sistema, suponiendo que el carro está inmóvil durante un $t < 0$ y que el sistema masa-resorte- amortiguador también está inmóvil durante un $t < 0$. En este sistema, $u(t)$ es el desplazamiento del carro y la entrada para el sistema. En $t = 0$, el carro se mueve a una velocidad constante o bien $\dot{u} =$ constante. El desplazamiento $y(t)$ de la masa es la salida. (El desplazamiento en relación con el piso.) En este sistema, m representa la masa, b denota el coeficiente de fricción viscosa y k es la constante del resorte. Se supone que la fuerza de fricción del amortiguador es proporcional a $\dot{y} - \dot{u}$ y que el resorte es lineal; es decir, la fuerza del resorte es proporcional a $y - u$.

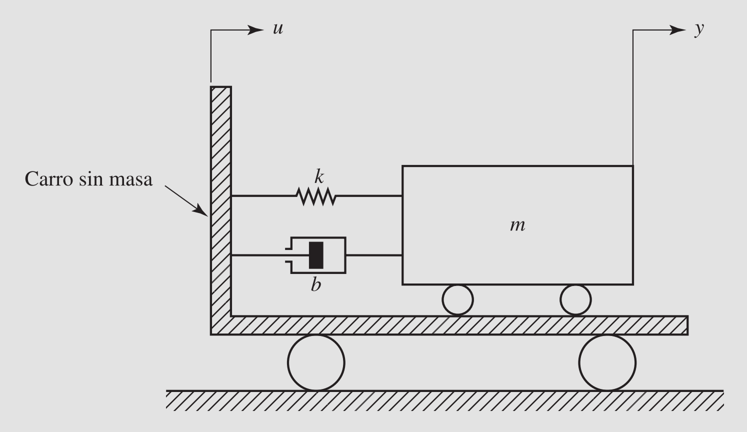


Figura 3-3. Sistema resorte-masa-amortiguador montado sobre un carro.

Para sistemas traslacionales, la segunda ley de Newton establece que

$$ma = \sum F$$

donde m es una masa, a es la aceleración de la masa y ΣF es la suma de las fuerzas que actúan sobre la masa. Aplicando la segunda ley de Newton al sistema presentado y considerando que el carro no tiene masa, se obtiene

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -b\left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt}\right) - k(y - u)$$

o bien

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku$$

La ecuación representa un modelo matemático del sistema considerado. Si se toma la transformada de Laplace de cada término de esta última ecuación se obtiene

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)U(s)$$

Si se toma el cociente entre $Y(s)$ y $U(s)$, se encuentra que la función de transferencia del sistema es

$$\text{Función de transferencia} = G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

Tal representación mediante la función de transferencia de un modelo matemático se usa con mucha frecuencia en la ingeniería de control.

A continuación se obtendrá un modelo en el espacio de estados de este sistema. Primero se comparará la ecuación diferencial para este sistema

$$\ddot{y} = \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

con la forma estándar

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

e identificaremos a_1, a_2, b_0, b_1 y b_2 del modo siguiente:

$$a_1 = \frac{b}{m}, \qquad a_2 = \frac{k}{m}, \qquad b_0 = 0, \qquad b_1 = \frac{b}{m}, \qquad b_2 = \frac{k}{m}$$

Refiriéndose a la Ecuación (2-35), se tiene que

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = \frac{b}{m}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$$

Por tanto, refiriéndose la Ecuación (2-34), se define

$$x_1 = y - \beta_0 u = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m}u$$

A partir de la Ecuación (2-36), se tiene que

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 = \frac{b}{m}u$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right]u$$

y la ecuación de salida se convierte en

$$y = x_1$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \end{bmatrix} u \tag{3-3}$$

y

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3-4}$$

Las Ecuaciones (3-3) y (3-4) dan una representación en el espacio de estados del sistema. (Observe que esta no es la única representación en el espacio de estados. Hay infinitas representaciones más en el espacio de estados para el sistema.)

EJEMPLO 3-4 Obtenga la función de transferencia $X_1(s)/U(s)$ del sistema mecánico que se muestra en la Figura 3-4.

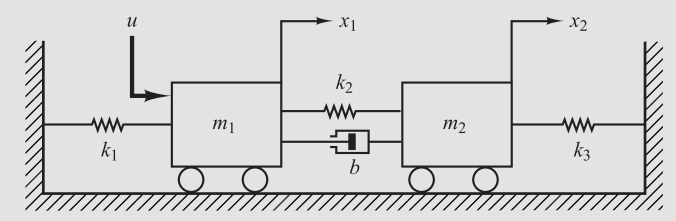


Figura 3-4. Sistema mecánico.

Las ecuaciones del movimiento para el sistema presentado en la Figura 3-4 son

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

Simplificando, se obtiene

$$m_1\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 = b\dot{x}_2 + k_2x_2 + u$$

$$m_2\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 = b\dot{x}_1 + k_2x_1$$

Tomando las transformadas de Laplace de estas dos ecuaciones, suponiendo condiciones iniciales nulas, se obtiene

$$[m_1s^2 + bs + (k_1 + k_2)]X_1(s) = (bs + k_2)X_2(s) + U(s) \qquad (3\text{-}5)$$

$$[m_2s^2 + bs + (k_2 + k_3)]X_2(x) = (bs + k_2)X_1(s) \qquad (3\text{-}6)$$

Si se resuelve la Ecuación (3-6) para $X_2(s)$, se sustituye en la Ecuación (3-5) y se simplifica, se obtiene

$$[(m_1s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2]X_1(s)$$
$$= (m_2s^2 + bs + k_2 + k_3)U(s)$$

de donde se sigue

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{m_2s^2 + bs + k_2 + k_3}{(m_1s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2} \qquad (3\text{-}7)$$

De las Ecuaciones (3-6) y (3-7) se tiene

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{bs + k_2}{(m_1s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2} \qquad (3\text{-}8)$$

Las Ecuaciones (3-7) y (3-8) son las funciones de transferencia $X_1(s)/U(s)$ y $X_2(s)/U(s)$, respectivamente.

EJEMPLO 3-5 Un péndulo invertido montado en un carro manejado por un motor aparece en la Figura 3-5(a). Este es un modelo del control de posición de un propulsor primario espacial para despegues. (El objetivo del problema del control de posición es conservar el propulsor primario espacial en una posición vertical.) El péndulo invertido es inestable porque puede girar en cualquier momento y en

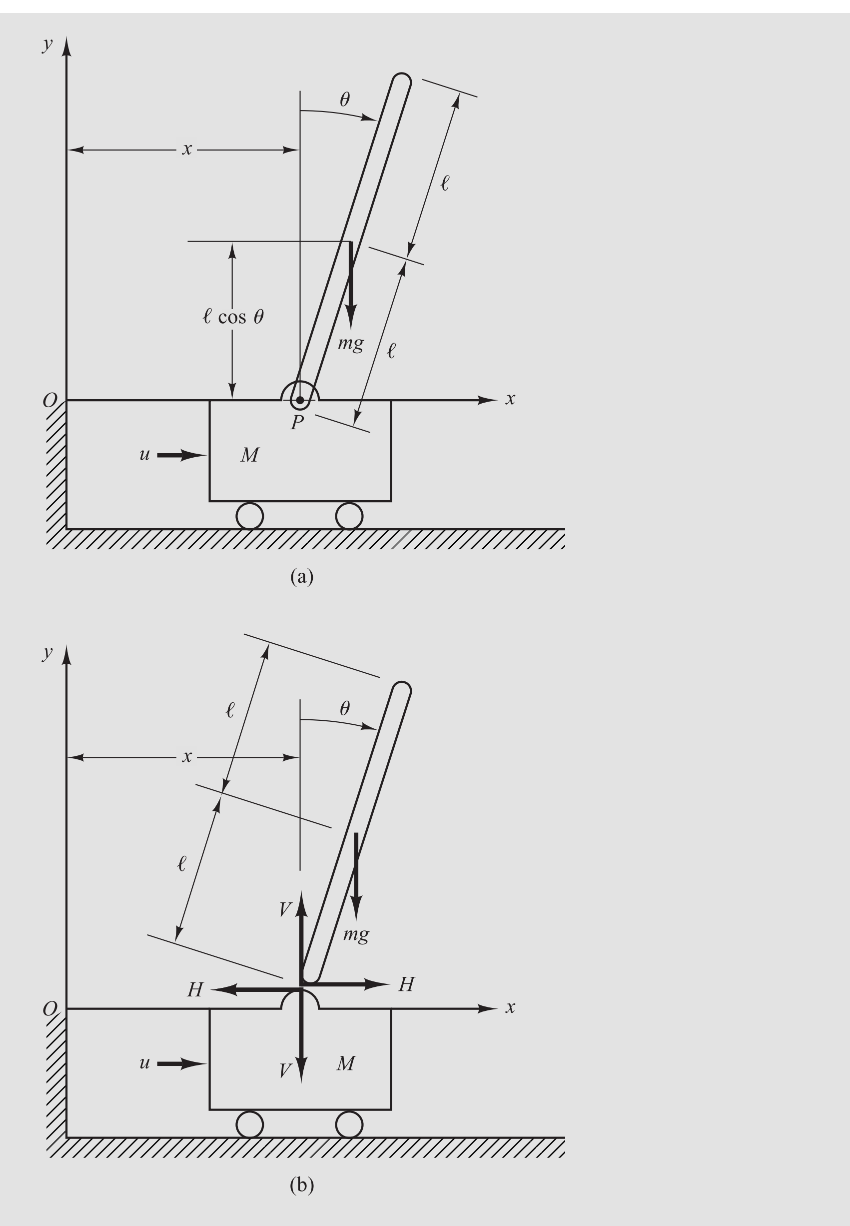


Figura 3-5. (a) Sistema de péndulo invertido; (b) diagrama de cuerpo libre.

cualquier dirección, a menos que se le aplique una fuerza de control conveniente. Aquí se considera sólo un problema en dos dimensiones, en el cual el péndulo sólo se mueve en el plano de la página. Se aplica al carro la fuerza de control u. Supóngase que el centro de gravedad de la barra del péndulo está en su centro geométrico. Obténgase un modelo matemático para este sistema.

Sea θ el ángulo de la barra respecto de la línea vertical. Sean además las coordenadas (x, y) del centro de gravedad de la barra del péndulo (x_G, y_G). De este modo,

$$x_G = x + l \operatorname{sen} \theta$$

$$y_G = l \cos \theta$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento para el sistema, considérese el diagrama de cuerpo libre que aparece en la Figura 3-5(b). El movimiento rotacional de la barra del péndulo alrededor de su centro de gravedad se describe mediante

$$I\ddot{\theta} = Vl \operatorname{sen} \theta - Hl \cos \theta \tag{3-9}$$

donde I es el momento de inercia de la barra alrededor de su centro de gravedad.

El movimiento horizontal del centro de gravedad de la barra del péndulo se obtiene mediante

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \operatorname{sen} \theta) = H \tag{3-10}$$

El movimiento vertical del centro de gravedad de la barra del péndulo es

$$m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \theta) = V - mg \tag{3-11}$$

El movimiento horizontal del carro se describe mediante

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = u - H \tag{3-12}$$

Como se debe mantener el péndulo invertido en posición vertical, se puede suponer que $\theta(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ son pequeños, de forma que $\operatorname{sen} \theta \doteq 0, \cos \theta = 1$ y $\theta\dot{\theta}^2 = 0$. Entonces, las Ecuaciones (3-9) a (3-11) se linealizan del modo siguiente:

$$I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl \tag{3-13}$$

$$m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H \tag{3-14}$$

$$0 = V - mg \tag{3-15}$$

A partir de las Ecuaciones (3-12) y (3-14), se obtiene

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \tag{3-16}$$

A partir de las Ecuaciones (3-13), (3-14) y (3-15), se obtiene

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= mgl\theta - Hl \\ &= mgl\theta - l(m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}) \end{aligned}$$

o bien

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \tag{3-17}$$

Las Ecuaciones (3-16) y (3-17) describen el movimiento del sistema del péndulo invertido en el carro. Constituyen un modelo matemático del sistema.

EJEMPLO 3-6 Considere el sistema de péndulo invertido que se muestra en la Figura 3-6. Como en este sistema la masa se concentra en lo alto de la varilla, el centro de gravedad es el centro de la bola del péndulo. Para este caso, el momento de inercia del péndulo respecto de su centro de gravedad es pequeño, y se supone que $I = 0$ en la Ecuación (3-17). Entonces el modelo matemático para este sistema es el siguiente:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \tag{3-18}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \tag{3-19}$$

Las Ecuaciones (3-18) y (3-19) se pueden modificar como

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \tag{3-20}$$

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \tag{3-21}$$

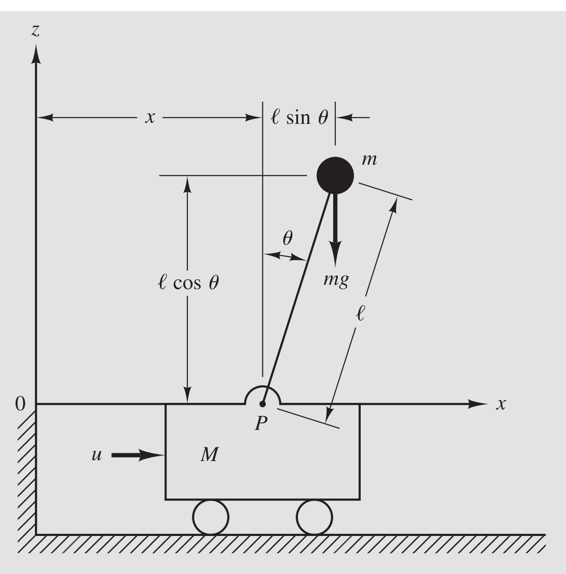


Figura 3-6. Sistema de péndulo invertido.

La Ecuación (3-20) se obtuvo eliminando $\ddot{x}$ de las Ecuaciones (3-18) y (3-19). La Ecuación (3-21) se obtuvo eliminando $\ddot{\theta}$ de las Ecuaciones (3-18) y (3-19). De la Ecuación (3-20) se obtiene que la función de transferencia de la planta es

$$\frac{\Theta(s)}{-U(s)} = \frac{1}{Mls^2 - (M+m)g} = \frac{1}{Ml\left(s + \sqrt{\dfrac{M+m}{Ml}}\,g\right)\left(s - \sqrt{\dfrac{M+m}{Ml}}\,g\right)}$$

La planta del péndulo invertido tiene un polo en el eje real negativo $[s = -(\sqrt{M+m}/\sqrt{Ml})\sqrt{g}]$ y otro en el eje real positivo $[s = (\sqrt{M+m}/\sqrt{Ml})\sqrt{g}]$. Por tanto, la planta es inestable en lazo abierto.

Sean las variables de estado x_1, x_2, x_3 y x_4 siguientes:

$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = \dot{\theta}$$
$$x_3 = x$$
$$x_4 = \dot{x}$$

Observe que el ángulo θ indica la rotación de la varilla del péndulo respecto al punto P, y x es la posición del carro. Si se consideran θ y x como las salidas del sistema, entonces

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(Observe que tanto θ como x son cantidades fácilmente medibles.) Entonces, a partir de la definición de variables de estado y de las Ecuaciones (3-20) y (3-21), se obtiene

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{M+m}{Ml}\,gx_1 - \frac{1}{Ml}\,u$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = -\frac{m}{M}\,gx_1 + \frac{1}{M}\,u$$

En términos de las ecuaciones vectoriales, se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{M+m}{Ml} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{m}{M} g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{Ml} \\ 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} u \tag{3-22}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{3-23}$$

Las Ecuaciones (3-22) y (3-23) dan una representación en el espacio de estados del sistema del péndulo invertido. (Observe que la representación en el espacio de estados del sistema no es única. Hay infinitas representaciones para este sistema.)

3-3 Modelado matemático de sistemas eléctricos

Las leyes fundamentales que gobiernan los circuitos eléctricos son las leyes de corrientes y voltajes de Kirchhoff. La ley de corrientes de Kirchhoff (la ley de nodos) plantea que la suma algebraica de todas las corrientes que entran y salen de un nodo es cero. (Esta ley también puede plantearse del modo siguiente: la suma de las corrientes que entran a un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen del mismo.) La ley de voltajes de Kirchhoff (la ley de mallas) establece que en cualquier instante determinado la suma algebraica de los voltajes alrededor de cualquier malla en un circuito eléctrico es cero. (Esta ley también se plantea del modo siguiente: la suma de las caídas de voltaje es igual a la suma de las elevaciones de voltaje alrededor de una malla.) Un modelo matemático de un circuito eléctrico se obtiene aplicando una o ambas leyes de Kirchhoff.

Esta sección trata primero los circuitos eléctricos sencillos y después presenta el modelado matemático de sistemas con amplificadores operacionales.

Circuito LRC. Considérese el circuito eléctrico que aparece en la Figura 3-7. El circuito está formado por una inductancia L (henrios), una resistencia R (ohmios) y una capacitancia C (faradios). Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff al sistema, se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e_i \tag{3-24}$$

$$\frac{1}{C}\int i\,dt = e_o \tag{3-25}$$

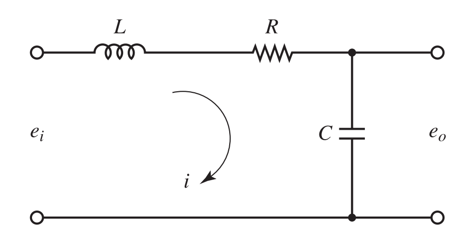


Figura 3-7. Circuito eléctrico.

Las Ecuaciones (3-24) y (3-25) dan un modelo matemático del circuito.

Un modelo mediante la función de transferencia del circuito también se obtiene del modo siguiente. Se toma la transformada de Laplace de las Ecuaciones (3-24) y (3-25) y se suponen condiciones iniciales iguales a cero, para obtener

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_o(s)$$

Si se supone que e_i es la entrada y e_o la salida, la función de transferencia de este sistema resulta ser

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \tag{3-26}$$

Un modelo en el espacio de estados del sistema, como el que aparece en la Figura 3-7, se obtiene del modo siguiente. Primero, se observa que la ecuación diferencial para el sistema se obtiene a partir de la Ecuación (3-26) como

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L}\dot{e}_o + \frac{1}{LC}e_o = \frac{1}{LC}e_i$$

Después, si se definen las variables de estado mediante

$$x_1 = e_o$$
$$x_2 = \dot{e}_o$$

y las variables de entrada y salida mediante

$$u = e_i$$
$$y = e_o = x_1$$

se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

y

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Estas dos ecuaciones dan un modelo matemático del sistema en el espacio de estados.

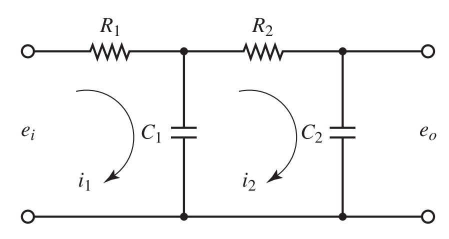


Figura 3-8. Sistema eléctrico.

Funciones de transferencia de elementos en cascada. Muchos sistemas realimentados tienen componentes que se cargan uno al otro. Considérese el sistema de la Figura 3-8. Supóngase que e_i es la entrada y e_o la salida. Las capacitancias C_1 y C_2 no cambian inicialmente. Se verá que en la segunda etapa del circuito (la parte R_2C_2) produce un efecto de carga en la primera etapa (la parte R_1C_1). Las ecuaciones para este sistema son

$$\frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)\,dt + R_1 i_1 = e_i \tag{3-27}$$

y

$$\frac{1}{C_1}\int (i_2 - i_1)\,dt + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = 0 \tag{3-28}$$

$$\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = e_o \tag{3-29}$$

Si se considera la transformada de Laplace de las Ecuaciones (3-27) a (3-29) y se suponen condiciones iniciales de cero, se obtiene

$$\frac{1}{C_1 s}[I_1(s) - I_2(s)] + R_1 I_1(s) = E_i(s) \tag{3-30}$$

$$\frac{1}{C_1 s}[I_2(s) - I_1(s)] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s) = 0 \tag{3-31}$$

$$\frac{1}{C_2 s} I_2(s) = E_o(s) \tag{3-32}$$

Si se elimina $I_1(s)$ de las Ecuaciones (3-30) y (3-31) y se escribe $E_i(s)$ en términos de $I_2(s)$, se encuentra que la función de transferencia entre $E_o(s)$ y $E_i(s)$ es

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)+R_1C_2s} = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1} \tag{3-33}$$

El término R_1C_2s en el denominador de la función de transferencia representa la interacción de dos circuitos RC sencillos. Como $(R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)^2 > 4R_1C_1R_2C_2$, las dos raíces del denominador de la Ecuación (3-33) son reales.

El análisis presente muestra que, si se conectan dos circuitos RC en cascada, de modo que la salida del primer circuito es la entrada del segundo, la función de transferencia general no es el producto de $1/(R_1C_1s + 1)$ y $1/(R_2C_2s + 1)$. Esto se debe a que, cuando se obtiene la función de transferencia para un circuito aislado, se supone implícitamente que la salida no está cargada.

En otras palabras, se supone que la impedancia de carga es infinita, lo cual significa que no se entrega potencia en la salida. Sin embargo, cuando se conecta el segundo circuito a la salida del primero, se entrega cierta cantidad de potencia y, por tanto, se viola la suposición de que no hay carga. Consecuentemente, si la función de transferencia de este sistema se obtiene bajo la suposición de que no hay carga, la suposición no es válida. El grado del efecto de carga determina la cantidad de modificación de la función de transferencia.

Impedancias complejas. En las funciones de transferencia para circuitos eléctricos, a menudo resulta conveniente escribir las ecuaciones transformadas directamente mediante el método de Laplace, sin escribir las ecuaciones diferenciales. Considérese el sistema que aparece en la Figura 3-9(a). En este sistema, Z_1 y Z_2 representan impedancias complejas. La impedancia compleja $Z(s)$ de un circuito de dos terminales es el cociente entre $E(s)$, la transformada de Laplace del voltaje a través de las terminales, e $I(s)$, la transformada de Laplace de la corriente a través del elemento, suponiendo que las condiciones iniciales son cero; por tanto, $Z(s) = E(s)/I(s)$. Si los elementos de dos terminales son una resistencia R, una capacitancia C o una inductancia L, la impedancia compleja se obtiene mediante R, $1/Cs$ o Ls, respectivamente. Si se conectan impedancias complejas en serie, la impedancia total es la suma de las impedancias complejas individuales.

Recuérdese que el enfoque de impedancias sólo es válido si todas las condiciones iniciales involucradas son cero. Como las funciones de transferencia requieren condiciones iniciales cero, el enfoque de impedancias se aplica para obtener la función de transferencia del circuito eléctrico. Este enfoque simplifica mucho la obtención de funciones de transferencia de circuitos eléctricos.

Considérese el circuito que aparece en la Figura 3-9(b). Supóngase que los voltajes e_i y e_o son la entrada y la salida del circuito, respectivamente. Por tanto, la función de transferencia de este circuito es

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

Para el sistema de la Figura 3-7,

$$Z_1 = Ls + R, \qquad Z_2 = \frac{1}{Cs}$$

Por tanto, la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ se encuentra del modo siguiente:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\dfrac{1}{Cs}}{Ls + R + \dfrac{1}{Cs}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

que es, por supuesto, idéntica a la Ecuación (3-26).

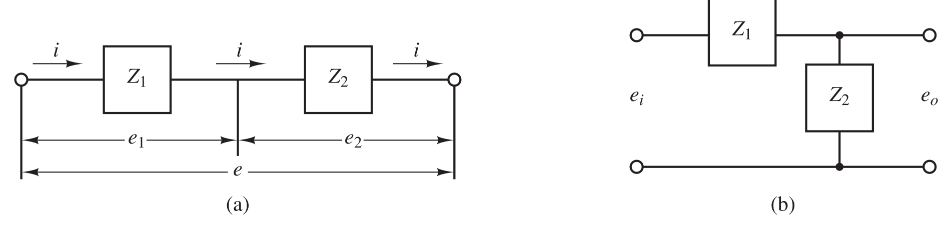


Figura 3-9. Circuitos eléctricos.

EJEMPLO 3-7 Considérese de nuevo el sistema que se muestra en la Figura 3-8. Obténgase la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ utilizando la aproximación de la impedancia compleja. (Los condensadores C_1 y C_2 no están cargados inicialmente.)

El circuito que se muestra en la Figura 3-8 se puede transformar tal y como se aprecia en la Figura 3-10(a), que a su vez se puede modificar como aparece en la Figura 3-10(b).

En el sistema que se muestra en la Figura 3-10(b) la corriente I se divide en dos corrientes, I_1 e I_2. Obsérvese que

$$Z_2 I_1 = (Z_3 + Z_4) I_2, \qquad I_1 + I_2 = I$$

se obtiene

$$I_1 = \frac{Z_3 + Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I, \qquad I_2 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I$$

Obsérvese que

$$E_i(s) = Z_1 I + Z_2 I_1 = \left[Z_1 + \frac{Z_2(Z_3 + Z_4)}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \right] I$$

$$E_o(s) = Z_4 I_2 = \frac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I$$

se obtiene

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)}$$

Si se sustituye $Z_1 = R_1$, $Z_2 = 1/(C_1 s)$, $Z_3 = R_2$ y $Z_4 = 1/(C_2 s)$ en esta última ecuación se obtiene

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\dfrac{1}{C_1 s} \, \dfrac{1}{C_2 s}}{R_1 \left(\dfrac{1}{C_1 s} + R_2 + \dfrac{1}{C_2 s} \right) + \dfrac{1}{C_1 s} \left(R_2 + \dfrac{1}{C_2 s} \right)}$$

$$= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$

que es la misma que se mostró en la Ecuación (3-33).

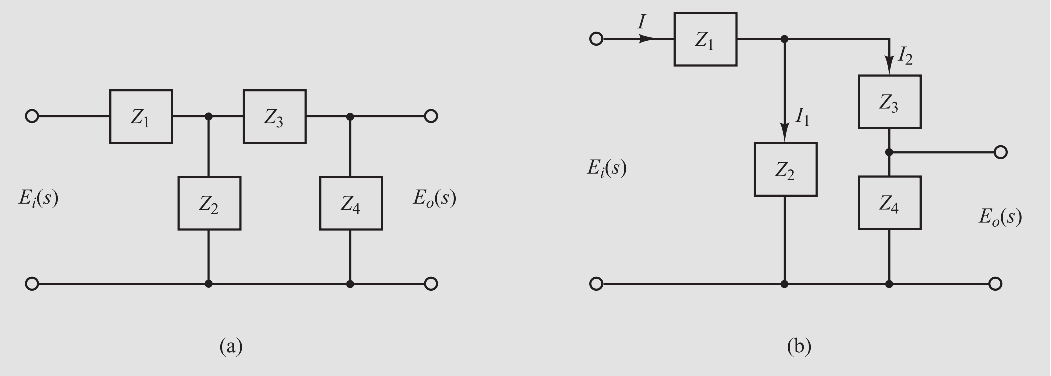


Figura 3-10. (a) El circuito de la Figura 3-8 en términos de impedancias; (b) diagrama del circuito equivalente.

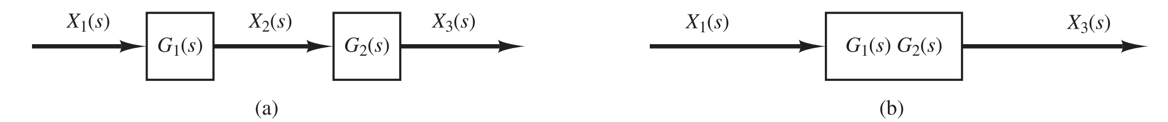


Figura 3-11. (a) Sistema formado por dos elementos en cascada sin carga; (b) un sistema equivalente.

Funciones de transferencia de elementos en cascada sin carga. La función de transferencia de un sistema formado por elementos en cascada sin carga se obtiene eliminando la entrada y la salida intermedias. Por ejemplo, considérese el sistema que aparece en la Figura 3-11(a). Las funciones de transferencia de los elementos son

$$G_1(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \quad \text{y} \quad G_2(s) = \frac{X_3(s)}{X_2(s)}$$

Si la impedancia de entrada del segundo elemento es infinita, la salida del primer elemento no se modifica si se conecta al segundo. En este caso, la función de transferencia del sistema completo se convierte en

$$G(s) = \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{X_2(s)X_3(s)}{X_1(s)X_2(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

Por tanto, la función de transferencia del sistema completo es el producto de las funciones de transferencia de los elementos individuales. Esto se aprecia en la Figura 3-11(b).

Como ejemplo, considérese el sistema que aparece en la Figura 3-12. La inserción de un amplificador de aislamiento entre los circuitos para obtener características sin carga se usa a menudo cuando se combinan circuitos. Como los amplificadores tienen impedancias de entrada muy altas, un amplificador de aislamiento insertado entre los dos circuitos justifica la suposición de que no hay carga.

Los dos circuitos *RC* sencillos, aislados mediante un amplificador como el que aparece en la Figura 3-12, tienen efectos de carga insignificantes y la función de transferencia de todo el circuito es igual al producto de las funciones de transferencia individuales. Por tanto, en este caso,

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \left(\frac{1}{R_1C_1s + 1}\right)(K)\left(\frac{1}{R_2C_2s + 1}\right)$$

$$= \frac{K}{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}$$

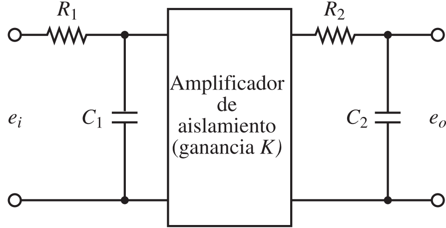


Figura 3-12. Sistema eléctrico.

Controladores electrónicos. En lo que sigue se analizan los controladores electrónicos que usan amplificadores operacionales. Se comienza por obtener las funciones de transferencia de los circuitos con amplificadores operacionales simples. A continuación se obtienen las funciones de transferencia de algunos de los controladores con amplificadores operacionales. Por último, se proporcionan en una tabla los controladores con amplificadores operacionales y sus funciones de transferencia.

Amplificadores operacionales. Los amplificadores operacionales, también conocidos como amp ops, se utilizan con frecuencia para amplificar las señales de los circuitos sensores. También se utilizan a menudo en los filtros que sirven para compensación. La Figura 3-13 muestra un amp op. Es una práctica común seleccionar la tierra como 0 volts y medir los voltajes de entrada e_1 y e_2 en relación con ella. La entrada e_1 hacia la terminal negativa del amplificador está invertida y la entrada e_2 hacia la terminal positiva no lo está. Por consiguiente, la entrada total al amplificador se convierte en $e_2 - e_1$. De este modo, para el circuito de la Figura 3-13, se tiene que

$$e_o = K(e_2 - e_1) = -K(e_1 - e_2)$$

donde las entradas e_1 y e_2 pueden ser señales de cd o ca y K es la ganancia diferencial o la ganancia de voltaje. La magnitud de K es, aproximadamente, de $10^5 \sim 10^6$ para las señales de cd y señales de ca que tienen frecuencias menores que unos 10 Hz. (La ganancia diferencial disminuye con la frecuencia de la señal y se estabiliza alrededor de la unidad para frecuencias de 1 MHz $\sim$ 50 MHz.) Obsérvese que el amp op amplifica la diferencia entre los voltajes e_1 y e_2. Tal amplificador se denomina amplificador diferencial. Como la ganancia del amp op es muy alta, es necesario tener una realimentación negativa de la salida hacia la entrada para hacer estable el amplificador. (La realimentación se lleva a cabo de la salida hacia la entrada inversora para que la realimentación sea negativa.)

En el amp op ideal no fluyen corrientes en los terminales de entrada y el voltaje de salida no se ve afectado por la carga conectada al terminal de salida. En otras palabras, la impedancia de entrada es infinita y la impedancia de salida es cero. En un amp op real, fluye una corriente muy pequeña (casi insignificante) hacia una terminal de entrada, y la salida no se carga demasiado. En el análisis que se hace aquí, se supone que los amp ops son ideales.

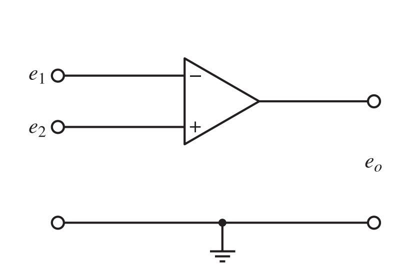


Figura 3-13. Amplificador operacional.

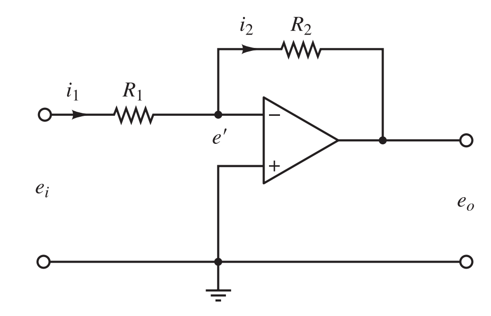


Figura 3-14. Amplificador inversor.

Amplificador inversor. Considérese el amplificador operacional de la Figura 3-14. Se va a obtener el voltaje de salida e_o.

La ecuación para este circuito se obtiene del modo siguiente. Se definen:

$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1}, \qquad i_2 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Como sólo fluye una corriente insignificante hacia el amplificador, la corriente i_1 debe ser igual a la corriente i_2. Por tanto,

$$\frac{e_i - e'}{R_1} = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Como $K(0 - e') = e_o$ y $K \gg 1$, e' debe ser casi cero, o $e' \doteqdot 0$. Por tanto, se tiene que

$$\frac{e_i}{R_1} = \frac{-e_o}{R_2}$$

o bien

$$e_o = -\frac{R_2}{R_1} e_i$$

De esta manera, el circuito que se muestra es un amplificador inversor. Si $R_1 = R_2$, el circuito amp op mostrado funciona como un inversor de signo.

Amplificador no inversor. La Figura 3-15(a) muestra un amplificador no inversor. La Figura 3-15(b) contiene un circuito equivalente a este último. Para el circuito de la Figura 3-15(b), se tiene que

$$e_o = K\left(e_i - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e_o\right)$$

donde K es la ganancia diferencial del amplificador. A partir de esta última ecuación, se obtiene

$$e_i = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{K}\right) e_o$$

Como $K \gg 1$, si $R_1/(R_1 + R_2) \gg 1/K$, entonces,

$$e_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) e_i$$

Esta ecuación obtiene el voltaje de salida e_o. Como e_o y e_i tienen los mismos signos, el circuito amp op de la Figura 3-15(a) es no inversor.

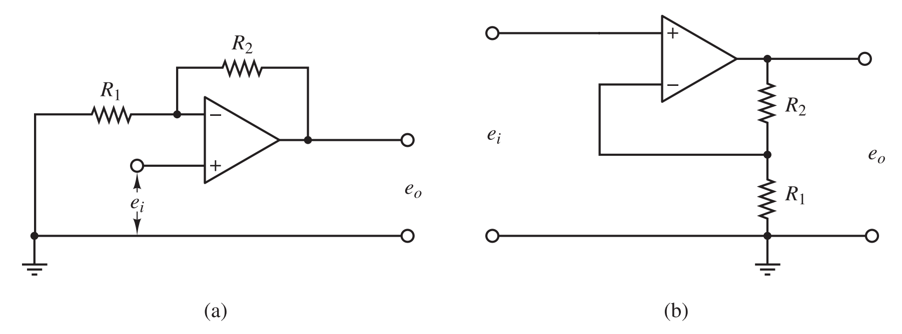


Figura 3-15. (a) Amplificador operacional no inversor; (b) circuito equivalente.

EJEMPLO 3-8 La Figura 3-16 muestra un circuito eléctrico que contiene un amplificador operacional. Obténgase la salida e_o.

Se definen

$$i_1 = \frac{e_i - e'}{R_1}, \qquad i_2 = C\frac{d(e' - e_o)}{dt}, \qquad i_3 = \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Si se considera que el flujo de la corriente hacia el amplificador es insignificante, se tiene que

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Por tanto,

$$\frac{e_i - e'}{R_1} = C\frac{d(e' - e_o)}{dt} + \frac{e' - e_o}{R_2}$$

Como $e' \doteqdot 0$, se tiene que

$$\frac{e_i}{R_1} = -C\frac{de_o}{dt} - \frac{e_o}{R_2}$$

Si se calcula la transformada de Laplace de esta última ecuación, y se supone una condición inicial cero, se tiene que

$$\frac{E_i(s)}{R_1} = -\frac{R_2Cs + 1}{R_2}E_o(s)$$

que se puede escribir como

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{R_2Cs + 1}$$

El circuito con amp op de la Figura 3-16 es un circuito de retardo de primer orden. (La Tabla 3-1 muestra otros circuitos que contienen amp ops junto con sus funciones de transferencia.)

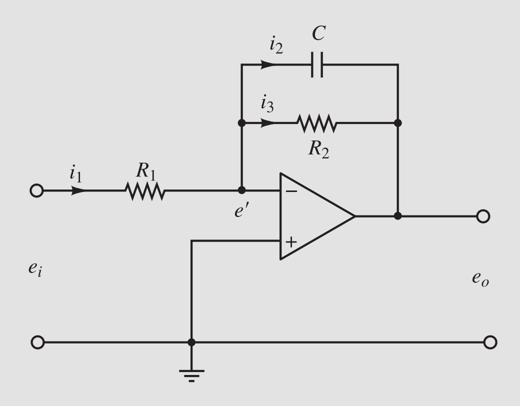


Figura 3-16. Circuito de retardo de primer orden utilizando un amplificador operacional.

Enfoque de impedancias para obtener funciones de transferencia. Considérese el circuito con amp op de la Figura 3-17. De forma similar al caso de los circuitos eléctricos que se analizaron antes, el enfoque de impedancias se aplica a los circuitos con amp op para obtener sus funciones de transferencia. Para el circuito de la Figura 3-17, se tiene que

$$\frac{E_i(s) - E'(s)}{Z_1} = \frac{E'(s) - E_o(s)}{Z_2}$$

Como $E'(s) \doteqdot 0$, se tiene

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \tag{3-34}$$

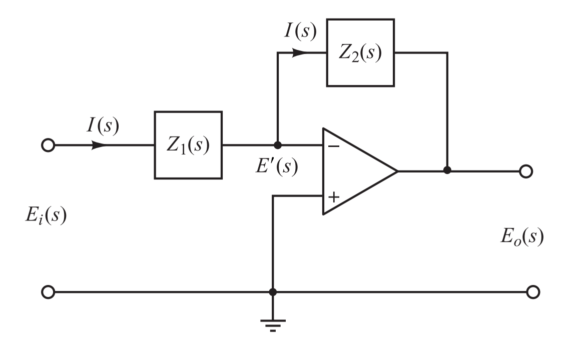


Figura 3-17. Circuito con amplificador operacional.

EJEMPLO 3-9 Remitiéndose al circuito con amp op de la Figura 3-16, obtenga la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ mediante el enfoque de impedancias.

Las impedancias complejas $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$ para el circuito son

$$Z_1(s) = R_1 \quad \text{y} \quad Z_2(s) = \frac{1}{Cs + \dfrac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_2Cs + 1}$$

Por tanto, la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ se obtiene como

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{R_2Cs + 1}$$

que es, por supuesto, igual a la obtenida en el Ejemplo 3-8.

Redes de adelanto o atraso que utilizan amplificadores operacionales. La Figura 3-18(a) muestra un circuito electrónico que utiliza un amplificador operacional. La fun-

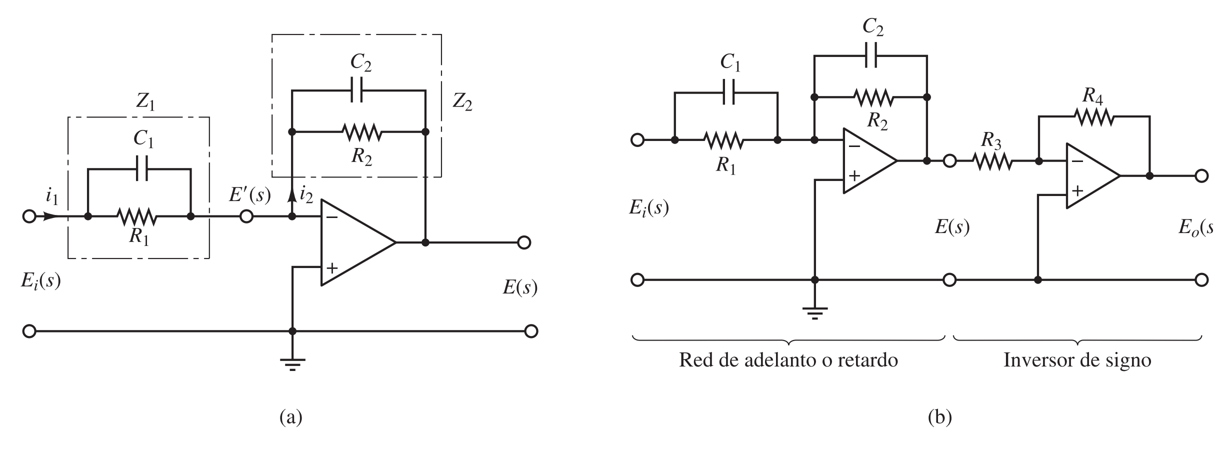


Figura 3-18. (a) Circuito con amplificador operacional; (b) circuito con amplificador operacional usado en redes de adelanto o retardo.

ción de transferencia para este circuito se obtiene del modo siguiente. Se define la impedancia de entrada y la impedancia de realimentación como Z_1 y Z_2, respectivamente. Entonces,

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1C_1s + 1}, \qquad Z_2 = \frac{R_2}{R_2C_2s + 1}$$

De ahí, refiriéndose a la Ecuación (3-34), se tiene

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{R_1C_1s + 1}{R_2C_2s + 1} = -\frac{C_1}{C_2}\frac{s + \dfrac{1}{R_1C_1}}{s + \dfrac{1}{R_2C_2}} \tag{3-35}$$

Obsérvese que la función de transferencia de la Ecuación (3-35) contiene un signo menos. En este caso, el circuito es de inversión de signo. Si tal inversión de signo no es conveniente en la aplicación actual, se conecta un inversor de signo a la entrada o a la salida del circuito de la Figura 3-18(a). En la Figura 3-18(b) se muestra un ejemplo. El inversor de signo tiene la función de transferencia de

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$$

El inversor de signo tiene la ganancia de $-R_4/R_3$. Por lo tanto, la red de la Figura 3-18(b) tiene la siguiente función de transferencia:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2R_4}{R_1R_3}\frac{R_1C_1s + 1}{R_2C_2s + 1} = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}\frac{s + \dfrac{1}{R_1C_1}}{s + \dfrac{1}{R_2C_2}}$$

$$= K_c\alpha\frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c\frac{s + \dfrac{1}{T}}{s + \dfrac{1}{\alpha T}} \tag{3-36}$$

donde

$$T = R_1C_1, \qquad \alpha T = R_2C_2, \qquad K_c = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}$$

Considérese que

$$K_c\alpha = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}\frac{R_2C_2}{R_1C_1} = \frac{R_2C_4}{R_1R_3}, \qquad \alpha = \frac{R_2C_2}{R_1C_1}$$

Esta red tiene una ganancia de $K_c\alpha = R_2R_4/(R_1R_3)$.

Obsérvese que esta red, cuya función de transferencia se muestra en la Ecuación (3-36), es una red de adelanto si $R_1C_1 > R_2C_2$, o $\alpha < 1$. Si $R_1C_1 < R_2C_2$ se trata de una red de atraso.

Controlador PID que utiliza amplificadores operacionales. La Figura 3-19 muestra un controlador electrónico proporcional-integral-derivativo (controlador PID) que utiliza amplificadores operacionales. La función de transferencia $E(s)/E_i(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

donde

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1C_1s + 1}, \qquad Z_2 = \frac{R_2C_2s + 1}{C_2s}$$

Por tanto

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\left(\frac{R_2C_2s + 1}{C_2s}\right)\left(\frac{R_1C_1s + 1}{R_1}\right)$$

Si se considera que

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$$

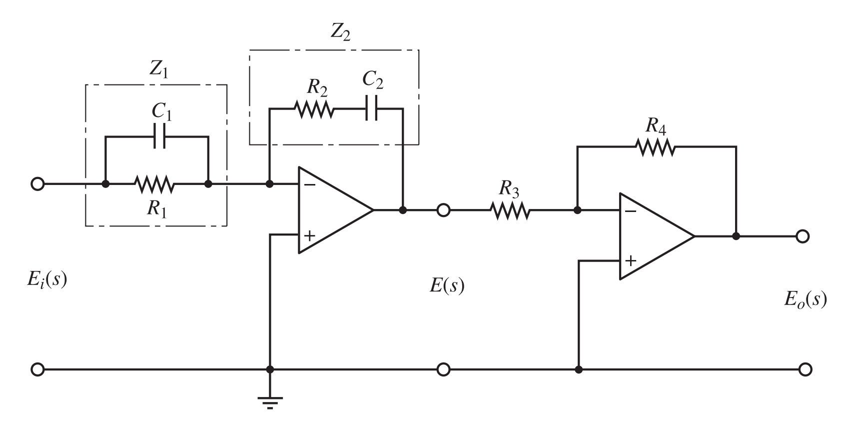


Figura 3-19. Controlador PID electrónico.

se tiene que

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{E_o(s)}{E(s)} \frac{E(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_2 C_2 s}$$

$$= \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} \left(\frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + R_1 C_1 s \right)$$

$$= \frac{R_4 (R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} \left[1 + \frac{1}{(R_1 C_1 + R_2 C_2) s} + \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} s \right] \tag{3-37}$$

Obsérvese que el segundo circuito con amplificador operacional funciona como un inversor de signo, al igual que como un ajustador de ganancia.

Cuando un controlador PID se expresa como

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \left(1 + \frac{T_i}{s} + T_d s \right)$$

K_p se denomina ganancia proporcional, T_i tiempo integral y T_d tiempo derivativo. A partir de la Ecuación (3-37) se obtiene que la ganancia proporcional K_p, el tiempo integral T_i y el tiempo derivativo T_d son

$$K_p = \frac{R_4 (R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2}$$

$$T_i = \frac{1}{R_1 C_1 + R_2 C_2}$$

$$T_d = \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2}$$

Cuando el controlador PID se expresa como

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

K_p se denomina ganancia proporcional, K_i ganancia integral y K_d ganancia derivativa. Para este controlador

$$K_p = \frac{R_4 (R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2}$$

$$K_i = \frac{R_4}{R_3 R_1 C_2}$$

$$K_d = \frac{R_4 R_2 C_1}{R_3}$$

La Tabla 3-1 muestra una lista de circuitos con amplificadores operacionales que se utilizan como controladores o compensadores.

Tabla 3-1. Circuitos amplificadores operacionales que se pueden utilizar como compensadores.

	Acción de control	$G(s) = \dfrac{E_o(s)}{E_i(s)}$	Circuitos de amplificador operacional
1	P	$\dfrac{R_4}{R_3}\dfrac{R_2}{R_1}$	
2	I	$\dfrac{R_4}{R_3}\dfrac{1}{R_1C_2s}$	
3	PD	$\dfrac{R_4}{R_3}\dfrac{R_2}{R_1}(R_1C_1s + 1)$	
4	PI	$\dfrac{R_4}{R_3}\dfrac{R_2}{R_1}\dfrac{R_2C_2s + 1}{R_2C_2s}$	
5	PID	$\dfrac{R_4}{R_3}\dfrac{R_2}{R_1}\dfrac{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{R_2C_2s}$	
6	Adelanto o retardo	$\dfrac{R_4}{R_3}\dfrac{R_2}{R_1}\dfrac{R_1C_1s + 1}{R_2C_2s + 1}$	
7	Adelanto-retardo	$\dfrac{R_6}{R_5}\dfrac{R_4}{R_3}\dfrac{[(R_1 + R_3)C_1s + 1](R_2C_2s + 1)}{(R_1C_1s + 1)[(R_2 + R_4)C_2s + 1]}$	

EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-3-1. La Figura 3-20(a) muestra un diagrama esquemático de un sistema de suspensión de un automóvil. Conforme el automóvil avanza por un camino, los desplazamientos verticales de las llantas funcionan como una excitación de movimiento para el sistema de suspensión del automóvil. El movimiento de este sistema consiste en un desplazamiento del centro de la masa y un giro alrededor del centro de la masa. El modelado matemático del sistema completo es bastante complicado.

Una versión muy simplificada del sistema de suspensión aparece en la Figura 3-20(b). Suponiendo que el movimiento x_i en el punto P es la entrada al sistema y el movimiento vertical x_o del cuerpo es la salida, obtenga la función de transferencia $X_o(s)/X_i(s)$. (Considere el movimiento del cuerpo sólo en la dirección vertical.) El desplazamiento x_o se mide a partir de la posición de equilibrio en ausencia de la entrada x_i.

Solución. La ecuación de movimiento para el sistema de la Figura 3-20(b) es

$$m\ddot{x}_o + b(\dot{x}_o - \dot{x}_i) + k(x_o - x_i) = 0$$

o bien

$$m\ddot{x}_o + b\dot{x}_o + kx_o = b\dot{x}_i + kx_i$$

Si se toma la transformada de Laplace de esta última ecuación, y se suponen condiciones iniciales de cero, se obtiene

$$(ms^2 + bs + k)X_o(s) = (bs + k)X_i(s)$$

Por tanto, la función de transferencia $X_o(s)/X_i(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

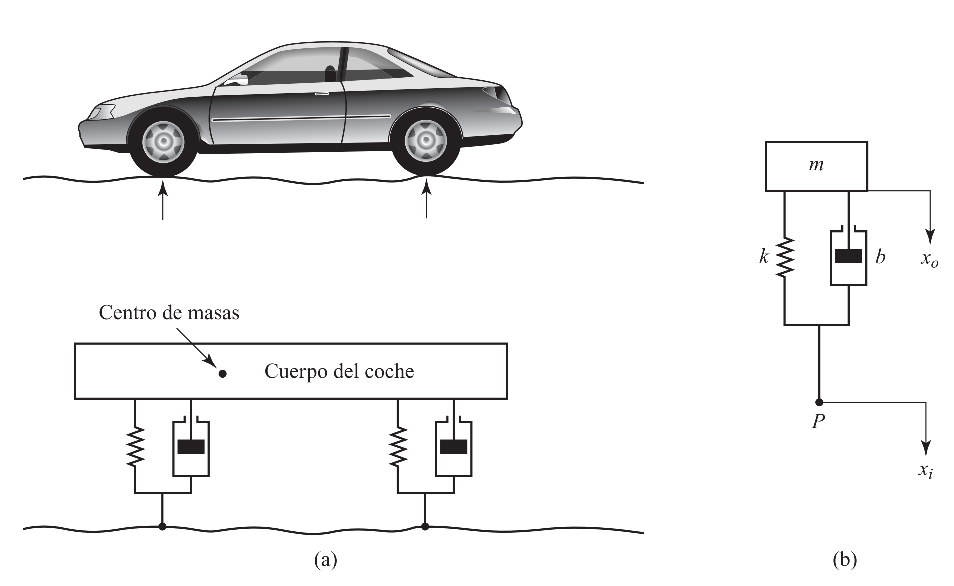


Figura 3-20. (a) Sistema de suspensión de un automóvil; (b) sistema de suspensión simplificado.

A-3-2. Obtenga la función de transferencia $Y(s)/U(s)$ del sistema de la Figura 3-21. La entrada u es un desplazamiento. (Al igual que el sistema del problema **A-3-1**, esta es una versión simplificada de un sistema de suspensión de un automóvil o una motocicleta.)

Solución. Suponga que los desplazamientos x e y se miden respectivamente a partir de las posiciones en estado estacionario en ausencia de entrada u. Aplicando la segunda ley de Newton al sistema, se obtiene

$$m_1\ddot{x} = k_2(y - x) + b(\dot{y} - \dot{x}) + k_1(u - x)$$

$$m_2\ddot{y} = -k_2(y - x) - b(\dot{y} - \dot{x})$$

Por tanto, se tiene que

$$m_1\ddot{x} + b\dot{x} + (k_1 + k_2)x = b\dot{y} + k_2y + k_1u$$

$$m_2\ddot{y} + b\dot{y} + k_2y = b\dot{x} + k_2x$$

Tomando la transformada de Laplace de estas dos ecuaciones y suponiendo condiciones iniciales de cero, se obtiene

$$[m_1s^2 + bs + (k_1 + k_2)]X(s) = (bs + k_2)Y(s) + k_1U(s)$$

$$[m_2s^2 + bs + k_2]Y(s) = (bs + k_2)X(s)$$

Eliminando $X(s)$ de las dos últimas ecuaciones, se tiene

$$(m_1s^2 + bs + k_1 + k_2)\frac{m_2s^2 + bs + k_2}{bs + k_2}Y(s) = (bs + k_2)Y(s) + k_1U(s)$$

de lo cual se deduce

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1(bs + k_2)}{m_1m_2s^4 + (m_1 + m_2)bs^3 + [k_1m_2 + (m_1 + m_2)k_2]s^2 + k_1bs + k_1k_2}$$

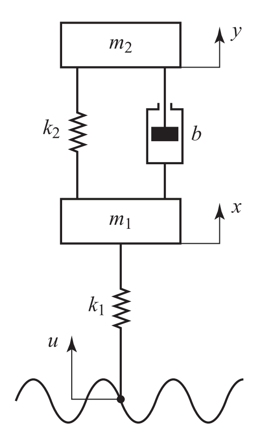


Figura 3-21. Sistema de suspensión.

A-3-3. Obtenga la representación en el espacio de estados del sistema mostrado en la Figura 3-22.

Solución. Las ecuaciones del sistema son

$$m_1\ddot{y}_1 + b\dot{y}_1 + k(y_1 - y_2) = 0$$

$$m_2\ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) = u$$

Las variables de salida para este sistema son y_1 e y_2. Se definen las variables de estado como

$$x_1 = y_1$$
$$x_2 = \dot{y}_1$$
$$x_3 = y_2$$
$$x_4 = \dot{y}_2$$

Entonces se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_1}[-b\dot{y}_1 - k(y_1 - y_2)] = -\frac{k}{m_1}x_1 - \frac{b}{m_1}x_2 + \frac{k}{m_1}x_3$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2}[-k(y_2 - y_1) + u] = \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_3 + \frac{1}{m_2}u$$

De ahí, la ecuación de estado es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{k}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u$$

y la ecuación de salida es

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

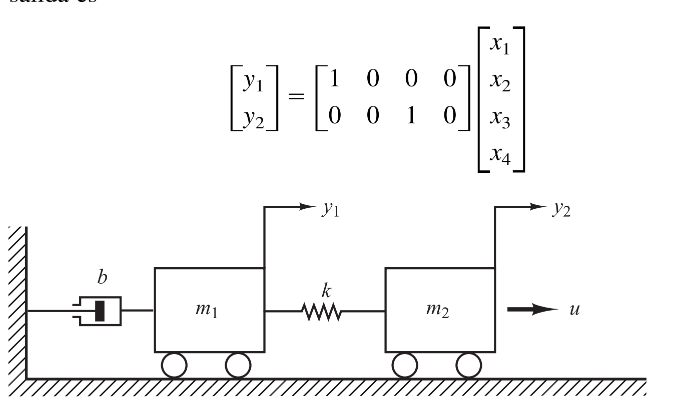


Figura 3-22. Sistema mecánico.

A-3-4. Obtenga la función de transferencia $X_o(s)/X_i(s)$ del sistema mecánico que aparece en la Figura 3-23(a). Calcúlese además la función de transferencia del circuito eléctrico de la Figura 3-23(b). Demuestre que las funciones de transferencia de los dos sistemas tienen una forma idéntica y, por tanto, son sistemas análogos.

Solución. En la Figura 3-23(a) se supone que los desplazamientos x_i, x_o e y se miden desde sus posiciones en reposo. Entonces las ecuaciones de movimiento para el sistema mecánico de la Figura 3-23(a) son

$$b_1(\dot{x}_i - \dot{x}_o) + k_1(x_i - x_o) = b_2(\dot{x}_o - \dot{y})$$
$$b_2(\dot{x}_o - \dot{y}) = k_2 y$$

Tomando la transformada de Laplace de estas dos ecuaciones y suponiendo condiciones iniciales de cero, tenemos

$$b_1[sX_i(s) - sX_o(s)] + k_1[X_i(s) - X_o(s)] = b_2[sX_o(s) - sY(s)]$$

$$b_2[sX_o(s) - sY(s)] = k_2 Y(s)$$

Si se elimina $Y(s)$ de las dos últimas ecuaciones, se obtiene

$$b_1[sX_i(s) - sX_o(s)] + k_1[X_i(s) - X_o(s)] = b_2 sX_o(s) - b_2 s\,\frac{b_2 sX_o(s)}{b_2 s + k_2}$$

o bien

$$(b_1 s + k_1)X_i(s) = \left(b_1 s + k_1 + b_2 s - b_2 s\,\frac{b_2 s}{b_2 s + k_2}\right)X_o(s)$$

Por tanto, la función de transferencia $X_o(s)/X_i(s)$ se obtiene como

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\left(\dfrac{b_1}{k_1}\,s + 1\right)\left(\dfrac{b_2}{k_2}\,s + 1\right)}{\left(\dfrac{b_1}{k_1}\,s + 1\right)\left(\dfrac{b_2}{k_2}\,s + 1\right) + \dfrac{b_2}{k_1}\,s}$$

Para el sistema eléctrico de la Figura 3-23(b), la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ resulta ser

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 + \dfrac{1}{C_1 s}}{\dfrac{1}{(1/R_2) + C_2 s} + R_1 + \dfrac{1}{C_1 s}} = \frac{(R_1C_1 s + 1)(R_2C_2 s + 1)}{(R_1C_1 s + 1)(R_2C_2 s + 1) + R_2C_1 s}$$

La comparación de las funciones de transferencia demuestra que los sistemas de las Figuras 3-23(a) y (b) son análogos.

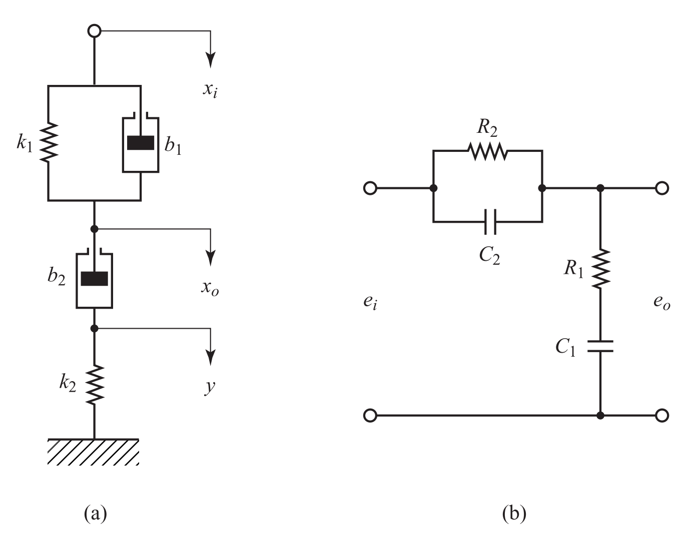


Figura 3-23. (a) Sistema mecánico; (b) sistema eléctrico análogo.

A-3-5. Obtenga las funciones de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ de las redes de puente en T que se muestra en las Figuras 3-24(a) y (b).

Solución. Ambas redes de puente en T pueden representarse por la red de la Figura 3-25(a), donde se utilizan impedancias complejas. Esta red se puede modificar como se muestra en la Figura 3-25(b).

En la Figura 3-25(b), observe que

$$I_1 = I_2 + I_3, \qquad I_2 Z_1 = (Z_3 + Z_4) I_3$$

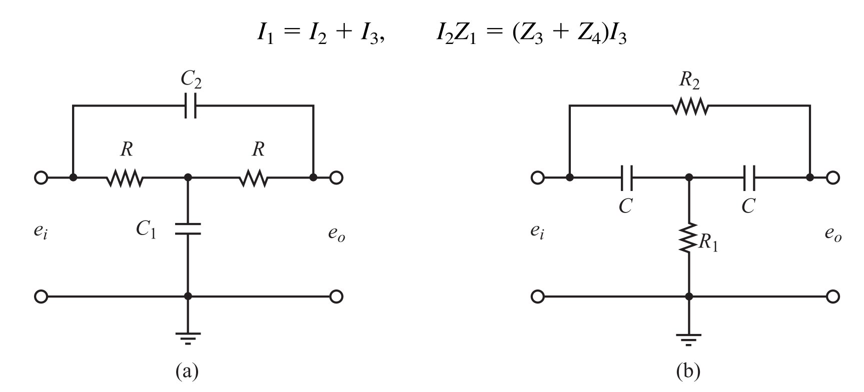


Figura 3-24. Circuitos de puente en T.

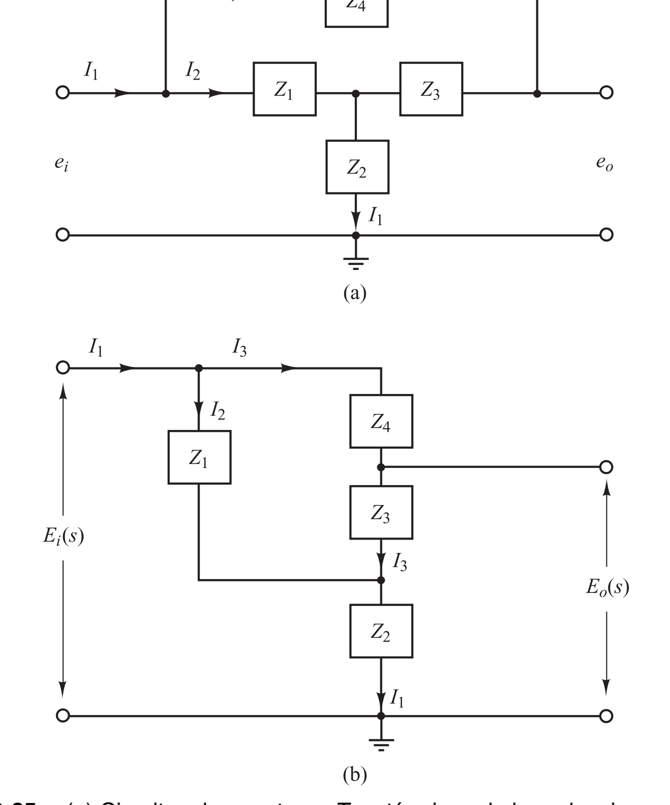


Figura 3-25. (a) Circuitos de puente en T en términos de impedancias complejas; (b) red equivalente.

De ahí,

$$I_2 = \frac{Z_3 + Z_4}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_1, \qquad I_3 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_1$$

Entonces los voltajes $E_i(s)$ y $E_o(s)$ se pueden obtener como

$$\begin{aligned} E_i(s) &= Z_1 I_2 + Z_2 I_1 \\ &= \left[Z_2 + \frac{Z_1(Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} \right] I_1 \\ &= \frac{Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4) + Z_1(Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_1 \\ E_o(s) &= Z_3 I_3 + Z_2 I_1 \\ &= \frac{Z_3 Z_1}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_1 + Z_2 I_1 \\ &= \frac{Z_3 Z_1 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} I_1 \end{aligned}$$

De ahí la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ de la red de la Figura 3-25(a) se obtiene como

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_3 Z_1 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4) + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4} \tag{3-38}$$

Para las redes de puente en T que se muestran en la Figura 3-24(a) se sustituye

$$Z_1 = R, \qquad Z_2 = \frac{1}{C_1 s}, \qquad Z_3 = R, \qquad Z_4 = \frac{1}{C_2 s}$$

en la Ecuación (3-38). Entonces, se obtiene que la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ es

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{R^2 + \dfrac{1}{C_1 s}\left(R + R + \dfrac{1}{C_2 s}\right)}{\dfrac{1}{C_1 s}\left(R + R + \dfrac{1}{C_2 s}\right) + R^2 + R\,\dfrac{1}{C_2 s}} \\ &= \frac{RC_1 RC_2 s^2 + 2RC_2 s + 1}{RC_1 RC_2 s^2 + (2RC_2 + RC_1)s + 1} \end{aligned}$$

De forma similar, para las redes de puente en T que se muestran en la Figura 3-24(b), se sustituye

$$Z_1 = \frac{1}{Cs}, \qquad Z_2 = R_1, \qquad Z_3 = \frac{1}{Cs}, \qquad Z_4 = R_2$$

en la Ecuación (3-38). Entonces la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ se obtiene como

$$\begin{aligned} \frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{\dfrac{1}{Cs}\,\dfrac{1}{Cs} + R_1\left(\dfrac{1}{Cs} + \dfrac{1}{Cs} + R_2\right)}{R_1\left(\dfrac{1}{Cs} + \dfrac{1}{Cs} + R_2\right) + \dfrac{1}{Cs}\,\dfrac{1}{Cs} + R_2\,\dfrac{1}{Cs}} \\ &= \frac{R_1 C R_2 C s^2 + 2R_1 Cs + 1}{R_1 C R_2 C s^2 + (2R_1 C + R_2 C)s + 1} \end{aligned}$$

A-3-6. Obtenga la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ del circuito con amplificador operacional de la Figura 3-26.

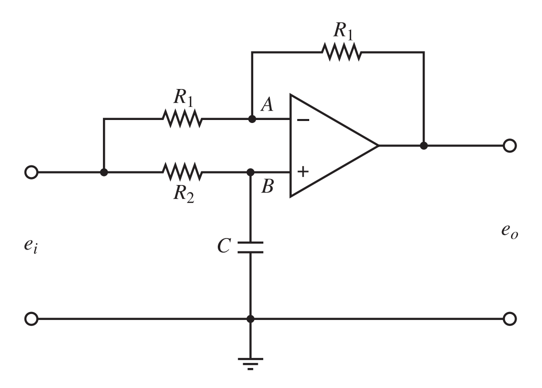


Figura 3-26. Circuito con amplificador operacional.

Solución. El voltaje del punto A es

$$e_A = \frac{1}{2}(e_i - e_o) + e_o$$

La versión transformada mediante el método de Laplace de esta última ecuación es

$$E_A(s) = \frac{1}{2}[E_i(s) + E_o(s)]$$

El voltaje en el punto B es

$$E_B(s) = \frac{\dfrac{1}{Cs}}{R_2 + \dfrac{1}{Cs}} E_i(s) = \frac{1}{R_2Cs + 1} E_i(s)$$

Como $[E_B(s) - E_A(s)]K = E_o(s)$ y $K \gg 1$, se debe tener $E_A(s) = E_B(s)$. Por tanto,

$$\frac{1}{2}[E_i(s) + E_o(s)] = \frac{1}{R_2Cs + 1} E_i(s)$$

De esta forma,

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2Cs - 1}{R_2Cs + 1} = -\frac{s - \dfrac{1}{R_2C}}{s + \dfrac{1}{R_2C}}$$

A-3-7. Obtenga la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ del circuito con amplificador operacional de la Figura 3-27 en función de las impedancias complejas Z_1, Z_2, Z_3 y Z_4. Utilice la ecuación calculada para obtener la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ del circuito con amplificador operacional que se muestra en la Figura 3-26.

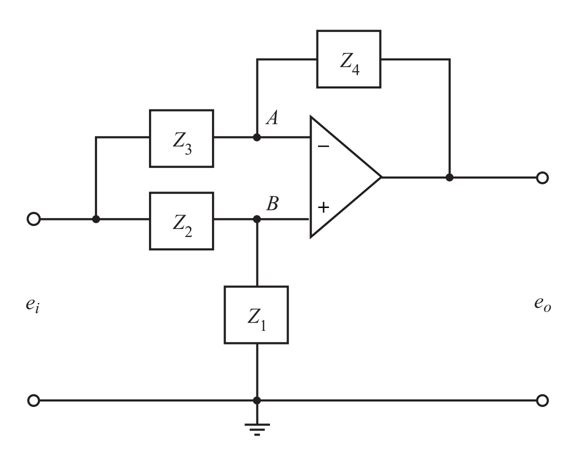


Figura 3-27. Circuito con amplificador operacional.

Solución. A partir de la Figura 3-27, se obtiene

$$\frac{E_i(s) - E_A(s)}{Z_3} = \frac{E_A(s) - E_o(s)}{Z_4}$$

o bien

$$E_i(s) - \left(1 + \frac{Z_3}{Z_4}\right)E_A(s) = -\frac{Z_3}{Z_4}E_o(s) \tag{3-39}$$

Como

$$E_A(s) = E_B(s) = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}E_i(s) \tag{3-40}$$

si se sustituye la Ecuación (3-40) en la Ecuación (3-39), se obtiene

$$\left[\frac{Z_4Z_1 + Z_4Z_2 - Z_4Z_1 - Z_3Z_1}{Z_4(Z_1 + Z_2)}\right]E_i(s) = -\frac{Z_3}{Z_4}E_o(s)$$

de la que se obtiene que la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ es

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_4Z_2 - Z_3Z_1}{Z_3(Z_1 + Z_2)} \tag{3-41}$$

Para encontrar la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ del circuito que se muestra en la Figura 3-26 se sustituye

$$Z_1 = \frac{1}{Cs}, \qquad Z_2 = R_2, \qquad Z_3 = R_1, \qquad Z_4 = R_1$$

en la Ecuación (3-41). El resultado es

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_1R_2 - R_1\dfrac{1}{Cs}}{R_1\left(\dfrac{1}{Cs} + R_2\right)} = -\frac{R_2Cs - 1}{R_2Cs + 1}$$

que es, por supuesto, el mismo que se obtuvo en el Problema **A-3-6.**

A-3-8. Obtenga la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ del circuito con amplificador operacional de la Figura 3-28.

Solución. En primer lugar se obtienen las corrientes i_1, i_2, i_3, i_4 e i_5. Después se utilizan las ecuaciones de los nodos en los nodos A y B.

$$i_1 = \frac{e_1 - e_A}{R_1}; \qquad i_2 = \frac{e_A - e_o}{R_3}, \qquad i_3 = C_1 \frac{de_A}{dt}$$

$$i_4 = \frac{e_A}{R_2}, \qquad i_5 = C_2 \frac{-de_o}{dt}$$

En el nodo A se tiene $i_1 = i_2 + i_3 + i_4$, o bien

$$\frac{e_i - e_A}{R_1} = \frac{e_A - e_o}{R_3} + C_1 \frac{de_A}{dt} + \frac{e_A}{R_2} \tag{3-42}$$

En el nodo B se tiene $i_4 = i_5$, o bien

$$\frac{e_A}{R_2} = C_2 \frac{-de_o}{dt} \tag{3-43}$$

Reescribiendo la Ecuación (3-42) se tiene

$$C_1 \frac{de_A}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) e_A = \frac{e_i}{R_1} + \frac{e_o}{R_3} \tag{3-44}$$

De la Ecuación (3-43), se sigue

$$e_A = -R_2 C_2 \frac{de_o}{dt} \tag{3-45}$$

Si se sustituye la Ecuación (3-45) en la Ecuación (3-44), se obtiene

$$C_1\left(-R_2C_2 \frac{d^2e_o}{dt^2}\right) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)(-R_2C_2)\frac{de_o}{dt} = \frac{e_i}{R_1} + \frac{e_o}{R_3}$$

Tomando la transformada de Laplace de esta última ecuación, suponiendo condiciones iniciales nulas, se obtiene

$$-C_1C_2R_2s^2E_o(s) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)(-R_2C_2)sE_o(s) - \frac{1}{R_3}E_o(s) = \frac{E_i(s)}{R_1}$$

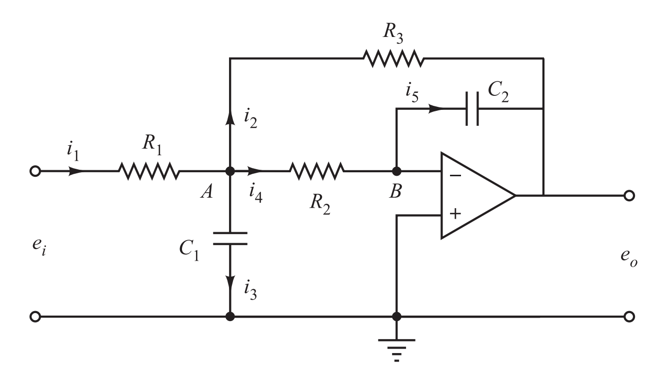


Figura 3-28. Circuito con amplificador operacional.

A partir de la cual se obtiene la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ como

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + [R_2C_2 + R_1C_2 + (R_1/R_3)R_2C_2]s + (R_1/R_3)}$$

A-3.9. Considere el servo sistema que se muestra en la Figura 3-29(a). El motor mostrado es un servomotor, un motor de cc diseñado específicamente para utilizarse en un sistema de control. El sistema opera de la forma siguiente. Un par de potenciómetros actúan como instrumentos de medida del error. Estos convierten las posiciones de entrada y salida en señales eléctricas proporcionales. La orden de la señal de entrada determina la posición angular r del contacto deslizante del potenciómetro de la entrada. La posición angular r es la entrada de referencia al sistema, y el potencial eléctrico del brazo es proporcional a la posición angular del brazo. El desplazamiento de la posición de salida determina la posición angular del contacto deslizante del potenciómetro de salida. La diferencia entre la posición angular de entrada r y la posición angular de la salida es la señal de error e, o bien

$$e = r - c$$

La diferencia de potencial $e_r - e_c = e_v$ es el error de voltaje, donde e_r es proporcional a r y e_c es proporcional a c; esto es, $e_r = K_0 r$ y $e_c = K_0 c$, donde K_0 es una constante de proporcionalidad. El error de voltaje que aparece en las terminales del potenciómetro se amplifica por el amplificador cuya ganancia constante es K_1. El voltaje de salida de este amplificador se aplica al inducido del circuito del motor de cc. Se aplica un voltaje fijo al arrollamiento de excitación. Si existe un error, el motor desarrolla un par para rotar la carga de salida de forma que se reduzca el error a cero. Para una corriente de campo constante, el par desarrollado por el motor es

$$T = K_2 i_a$$

donde K_2 es la constante del par del motor e i_a es la corriente del inducido.

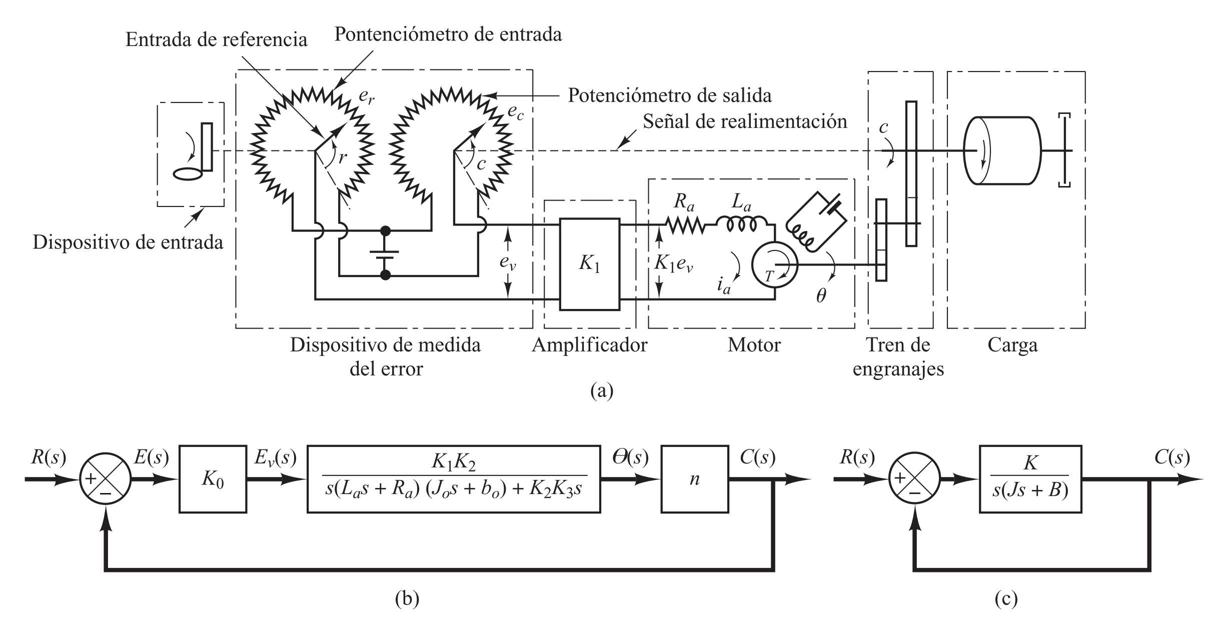


Figura 3-29. (a) Diagrama esquemático de un servo sistema; (b) diagrama de bloques del sistema; (c) diagrama de bloques simplificado.

Cuando el inducido está girando, se induce en el inducido un voltaje proporcional al producto del flujo y la velocidad angular. Para un flujo constante, el voltaje inducido e_b es directamente proporcional a la velocidad angular $d\theta/dt$, o bien

$$e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt}$$

donde e_b es el fuerza contraelectromotriz, K_3 es la constante de la fuerza contraelectromotriz del motor, y θ es el desplazamiento angular del eje del motor.

Obtenga la función de transferencia entre el desplazamiento angular del eje del motor θ y el voltaje error e_v. Obtenga también un diagrama de bloques para este sistema y un diagrama de bloques simplificado cuando L_a es despreciable.

Solución. La velocidad de un servomotor cc controlado por inducido está controlada por la tensión del inducido e_a. (La tensión del inducido $e_a = K_1 e_v$ es la salida del amplificador.) La ecuación diferencial para el circuito del inducido es

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

o bien

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e_v \tag{3-46}$$

La ecuación para el equilibrio del par es

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_0 \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_a \tag{3-47}$$

donde J_0 es la inercia de la combinación del motor, carga y tren de engranaje referido al eje del motor y b_0 es el coeficiente de fricción viscosa de la combinación del motor, carga y tren de engranaje referido al eje del motor.

Eliminando i_a de las Ecuaciones (3-46) y (3-47), se obtiene

$$\frac{\Theta(s)}{E_v(s)} = \frac{K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3 s} \tag{3-48}$$

Se supone que la razón de engranaje del tren de engranaje es tal que el eje de salida gira n veces en cada revolución del eje del motor. Así,

$$C(s) = n\Theta(s) \tag{3-49}$$

La relación entre $E_v(s)$, $R(s)$ y $C(s)$ es

$$E_v(s) = K_0[R(s) - C(s)] = K_0 E(s) \tag{3-50}$$

El diagrama de bloques de este sistema se puede construir a partir de las Ecuaciones (3-48), (3-49) y (3-50) como se muestra en la Figura 3-29(b). La función de transferencia en el camino directo de este sistema es

$$G(s) = \frac{C(s)}{\Theta(s)} \frac{\Theta(s)}{E_v(s)} \frac{E_v(s)}{E(s)} = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3]}$$

Cuando L_a es pequeño, se puede despreciar, y la función de transferencia $G(s)$ en el camino directo se convierte en

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[R_a(J_0 s + b_0) + K_2 K_3]} = \frac{K_0 K_1 K_2 n/R_a}{J_0 s^2 + \left(b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right)s} \tag{3-51}$$

El término $[b_0 + (K_2K_3/R_a)]s$ indica que efectivamente la fuerza contraelectromotriz del motor incrementa la fricción viscosa del sistema. La inercia J_0 y el coeficiente de fricción viscosa $b_0 + (K_2K_3/R_a)$ se refieren al eje del motor. Cuando se multiplican J_0 y $b_0 + (K_2K_3/R_a)$ por $1/n^2$, la inercia y el coeficiente de fricción viscosa se expresan en función de la salida del eje. Si se introducen nuevos parámetros definidos por

$J = J_0/n^2$ = momento de inercia referido a la salida del eje

$B = [b_0 + (K_2K_3/R_a)]/n^2$ = coeficiente de fricción viscosa referido a la salida del eje

$K = K_0K_1K_2/nR_a$

la función de transferencia $G(s)$ dada por la Ecuación (3-51) se simplifica de la forma

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs}$$

o bien

$$G(s) = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

donde

$$K_m = \frac{K}{B}, \qquad T_m = \frac{J}{B} = \frac{R_a J_0}{R_a b_0 + K_2K_3}$$

Así, el diagrama de bloques del sistema de la Figura 3-29(b) se puede simplificar al que aparece en la Figura 3-29(c).

PROBLEMAS

B-3-1. Obtenga el coeficiente de fricción viscosa equivalente b_{eq} del sistema de la Figura 3-30.

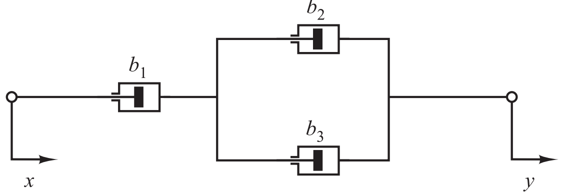
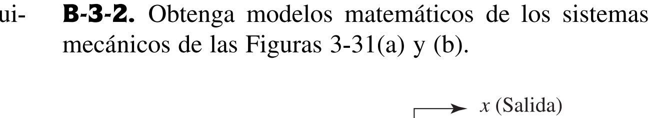


Figura 3-30. Sistema de amortiguadores.

B-3-2. Obtenga modelos matemáticos de los sistemas mecánicos de las Figuras 3-31(a) y (b).



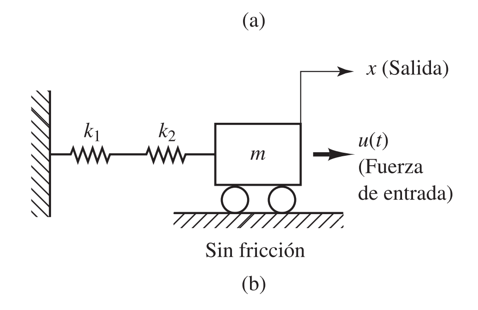


Figura 3-31. Sistemas mecánicos.

B-3-3. Obtenga una representación en el espacio de estados del sistema mecánico de la Figura 3-32, donde u_1 y u_2 son entradas e y_1 e y_2 son salidas.

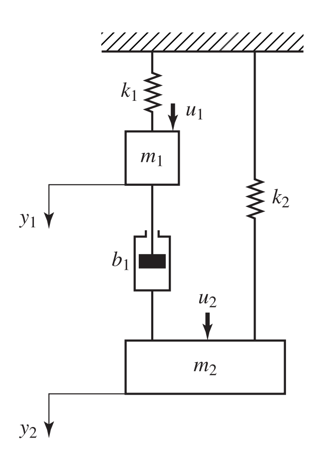


Figura 3-32. Sistema mecánico.

B-3-4. Considere el sistema del péndulo accionado por resorte de la Figura 3-33. Suponga que la fuerza del resorte que actúa sobre el péndulo es cero cuando el péndulo está vertical, o bien $\theta = 0$. Suponga también que la fricción involucrada es insignificante y que el ángulo de oscilación θ es pequeño. Obtenga un modelo matemático del sistema.

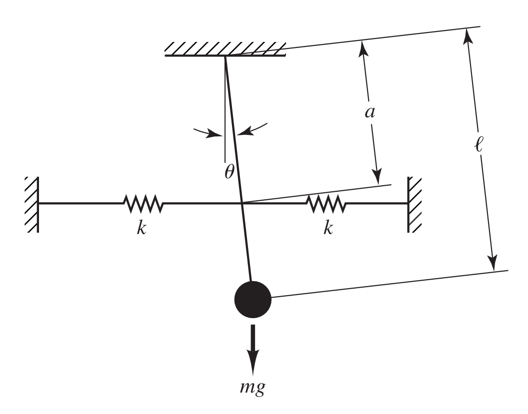


Figura 3-33. Sistema de péndulo carga-resorte.

B-3-5. Remitiéndose a los Ejemplos 3-5 y 3-6, considere el sistema del péndulo invertido de la Figura 3-34. Suponga que la masa del péndulo invertido es m y que está distribuida equitativamente a lo largo de la longitud de la barra. (El centro de gravedad del péndulo se ubica en el centro de la barra.) Suponiendo que θ es pequeño, obtenga modelos matemáticos para el sistema en forma de ecuaciones diferenciales, funciones de transferencia y ecuaciones en el espacio de estado.

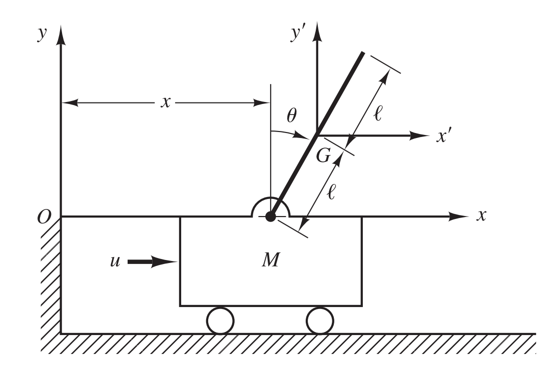


Figura 3-34. Sistema de péndulo invertido.

B-3-6. Obtenga la función de transferencia $X_1(s)/U(s)$ y $X_2(s)/U(s)$ del sistema mecánico que se muestra en la Figura 3-35.

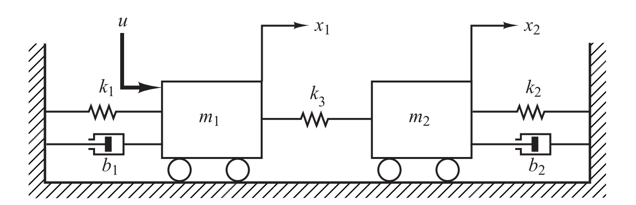


Figura 3-35. Sistema mecánico.

B-3-7. Obtenga la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ del circuito eléctrico que se muestra en la Figura 3-36.

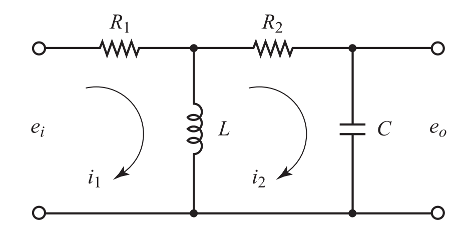


Figura 3-36. Circuito eléctrico.

B-3-8. Considere el circuito eléctrico que se muestra en la Figura 3-37. Obtenga la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ utilizando la aproximación de diagramas de bloques.

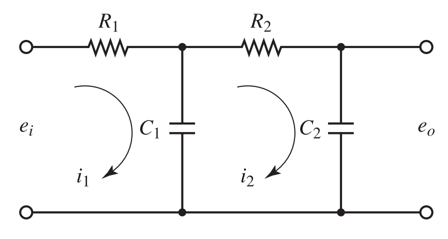


Figura 3-37. Circuito eléctrico.

B-3-9. Obtenga la función de transferencia del sistema eléctrico de la Figura 3-38. Dibuje un diagrama esquemático de un sistema mecánico análogo.

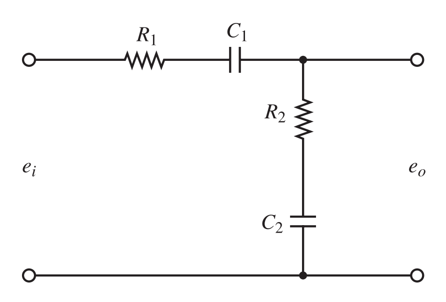


Figura 3-38. Circuito eléctrico.

B-3-10. Obtenga la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ del circuito con amplificador operacional de la Figura 3-39.

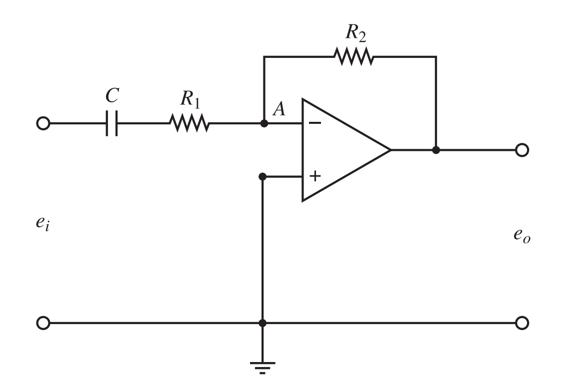


Figura 3-39. Circuito con amplificador operacional.

B-3-11. Obtenga la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ del circuito con amplificador operacional de la Figura 3-40.

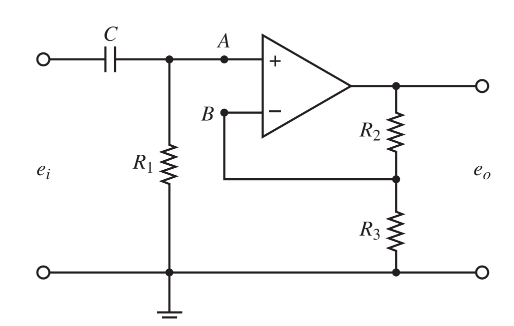


Figura 3-40. Cicuito con amplificador operacional.

B-3-12. Utilizando la aproximación de impedancias, obtenga la función de transferencia $E_o(s)/E_i(s)$ del circuito con amplificador operacional de la Figura 3-41.

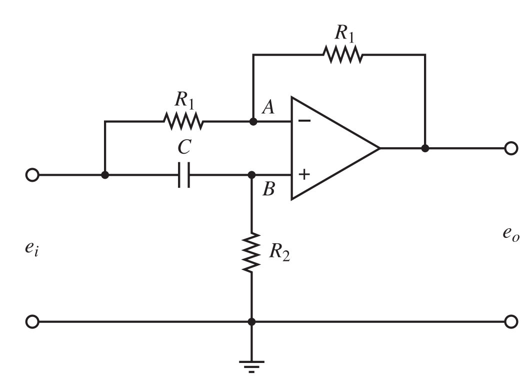


Figura 3-41. Circuito con amplificador operacional.

B-3-13. Considere el sistema que se muestra en la Figura 3-42. Un servomotor cc controlado por inducido mueve una carga con un momento de inercia J_L. El par desarrollado por el motor es T. El momento de inercia del rotor del motor es J_m. Los desplazamientos angulares del rotor del motor y del elemento de carga son θ_m y θ, respectivamente. La razón de engranaje es $n = \theta/\theta_m$. Obtenga la función de transferencia $\Theta(s)/E_i(s)$.

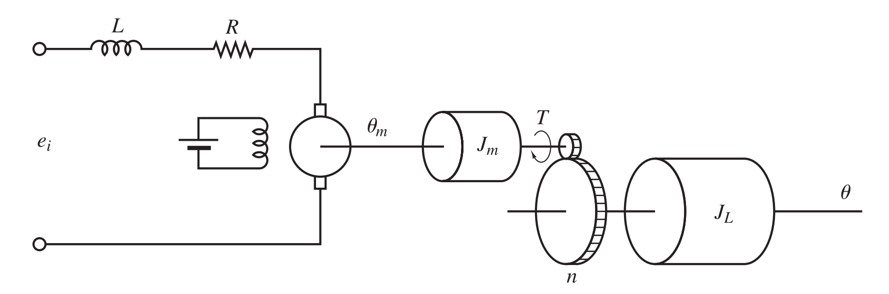


Figura 3-42. Sistema servomotor de controlado por armadura.



Modelado matemático de sistemas de fluidos y sistemas térmicos

4-1 Introducción

Este capítulo trata el modelado matemático de sistemas de fluidos y sistemas térmicos. Debido a que son el medio más versátil para transmitir señales y potencia, los fluidos —ya sean líquidos o gases—, tienen un amplio uso en la industria. Los líquidos y los gases se diferencian entre sí básicamente por su falta de compresibilidad relativa y por el hecho de que un líquido puede tener una superficie libre, en tanto que un gas se expande para llenar su recipiente. En el campo de la ingeniería, el término *neumático* describe los sistemas de fluidos que usan aire o gases e *hidráulico* describe los sistemas que usan aceite.

En primer lugar se presentan los sistemas de nivel de líquido que se utilizan frecuentemente en los procesos de control. Después se introducen los conceptos de resistencia y capacitancia para describir la dinámica de tales sistemas. Entonces se tratan los sistemas neumáticos. Estos sistemas se emplean mucho en la automatización de la maquinaria de producción y en el campo de los controladores automáticos. Por ejemplo, tienen un amplio uso los circuitos neumáticos que convierten la energía del aire comprimido en energía mecánica, y se encuentran diversos tipos de controladores neumáticos en la industria. Después se presentan los servosistemas hidráulicos. Éstos son ampliamente utilizados en las maquinarias de las herramientas de sistemas, los sistemas de control aéreos, etc. Se discuten los aspectos básicos de los servosistemas hidráulicos y los controladores hidráulicos. Tanto los sistemas neumáticos como los hidráulicos se pueden modelar fácilmente utilizando los conceptos de resistencia y capacitancia. Por último se tratan sistemas térmicos simples. Tales sistemas involucran transferencia de calor de una sustancia a otra. Los modelos matemáticos de estos sistemas se pueden obtener utilizando resistencias y capacitancias térmicas.

Contenido del capítulo. La Sección 4-1 acaba de presentar el material introductorio del capítulo. La Sección 4-2 trata la respuesta de los sistemas de nivel de líquido. La Sección 4-3

aborda los sistemas neumáticos —en particular los principios básicos de los controladores neumáticos. La Sección 4.4 estudia en primer lugar los sistemas servohidráulicos y después presenta los controladores hidráulicos. Por último, la Sección 4-5 analiza los sistemas térmicos y obtiene modelos matemáticos para tales sistemas.

4-2 Sistemas de nivel de líquido

Al analizar sistemas que implican el flujo de líquidos, resulta necesario dividir los regímenes de flujo en laminar y turbulento, de acuerdo con la magnitud del número de Reynolds. Si el número de Reynolds es mayor que entre 3000 y 4000, el flujo es turbulento. El flujo es laminar si el número de Reynolds es menor que unos 2000. En el caso laminar, tiene lugar un flujo estable en las corrientes, sin turbulencia. Los sistemas que contienen un flujo laminar se pueden representar mediante ecuaciones diferenciales lineales.

Con frecuencia los procesos industriales implican un flujo de líquidos a través de tubos y tanques conectados. El flujo en tales procesos resulta a menudo turbulento y no laminar. Los sistemas que contienen un flujo turbulento se representan a menudo mediante ecuaciones diferenciales no lineales. Sin embargo, si la región de operación está limitada, tales ecuaciones diferenciales no lineales se pueden linealizar. En esta sección se discutirán modelos reales matemáticos linealizados de sistemas de nivel de líquido. Si se introduce el concepto de resistencia y capacitancia para tales sistemas de nivel de líquido, es posible describir en formas simples las características dinámicas de tales sistemas.

Resistencia y capacitancia de sistemas de nivel de líquido. Considérese el flujo a través de un tubo corto que conecta dos tanques. La resistencia R para el flujo de líquido en tal tubo se define como el cambio en la diferencia de nivel (la diferencia entre el nivel de líquido en los dos tanques) necesaria para producir un cambio de una unidad en el caudal; es decir,

$$R = \frac{\text{cambio en la diferencia de nivel, m}}{\text{cambio en la velocidad de flujo, m}^3\text{/seg}}$$

Como la relación entre el caudal y la diferencia de nivel es distinta para el flujo laminar y el flujo turbulento, en lo sucesivo se consideran ambos casos.

Considérese el sistema de nivel de líquidos que aparece en la Figura 4-1(a). En este sistema el líquido sale a chorros a través de la válvula de carga a un lado del tanque. Si el flujo a través de esta restricción es laminar, la relación entre el caudal en estado estable y la altura en estado estable en el nivel de la restricción se obtiene mediante

$$Q = KH$$

donde Q = caudal del líquido en estado estable, $\text{m}^3\text{/seg}$

K = coeficiente, $\text{m}^2\text{/seg}$

H = altura en estado estable, m

Para el flujo laminar, la resistencia R_l se obtiene como

$$R_l = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q}$$

La resistencia del flujo laminar es constante y análoga a la resistencia eléctrica.

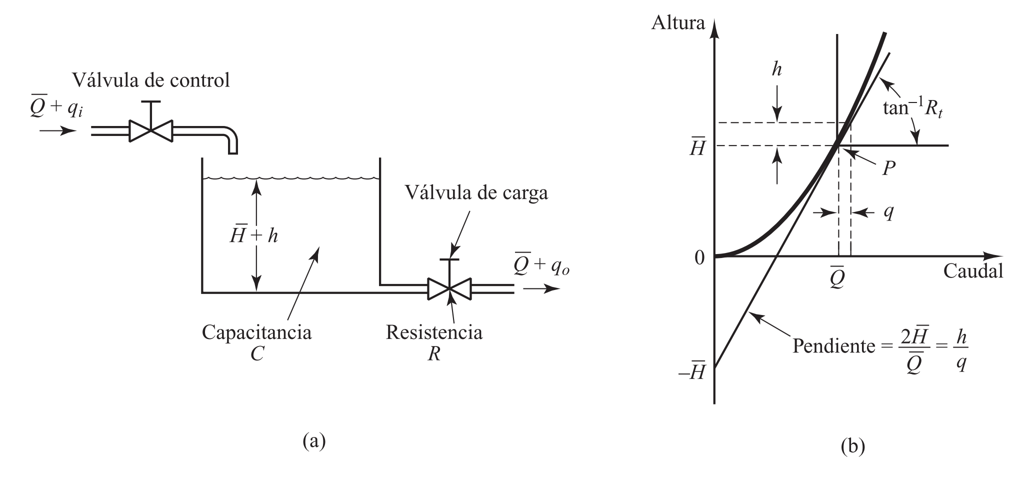


Figura 4-1. (a) Sistema de nivel de líquidos; (b) curva de altura frente al caudal.

Si el flujo es turbulento a través de la restricción, el caudal en estado estable se obtiene mediante

$$Q = K\sqrt{H} \tag{4-1}$$

donde Q = caudal del líquido en estado estable, m^3/seg
K = coeficiente, $m^{2,5}$/seg
H = altura en estado estable, m

La resistencia R_t para el flujo turbulento se obtiene a partir de

$$R_t = \frac{dH}{dQ}$$

Como de la Ecuación (4-1) se obtiene

$$dQ = \frac{K}{2\sqrt{H}}\,dH$$

se tiene que

$$\frac{dH}{dQ} = \frac{2\sqrt{H}}{K} = \frac{2\sqrt{H}\sqrt{H}}{Q} = \frac{2H}{Q}$$

Por tanto,

$$R_t = \frac{2H}{Q}$$

El valor de la resistencia de flujo turbulento R_t depende del caudal y la altura. Sin embargo, el valor de R_l se considera constante si los cambios en la altura y en el caudal son pequeños.

Usando la resistencia de flujo turbulento, la relación entre Q y H se obtiene mediante

$$Q = \frac{2H}{R_t}$$

Tal linealización es válida, siempre y cuando los cambios en la altura y en el caudal, a partir de sus valores respectivos en estado estable, sean pequeños.

En muchos casos prácticos, se desconoce el valor del coeficiente K de la Ecuación (4-1), que depende del coeficiente de flujo y del área de restricción. En tales casos, la resistencia se deter-

mina mediante una gráfica de la curva de la altura frente al caudal, basada en datos experimentales y midiendo la pendiente de la curva en la condición de operación. Un ejemplo de tal gráfica aparece en la Figura 4-1(b). En la figura, el punto P es el punto de operación en estado estable. La línea tangente a la curva en el punto P intersecta la ordenada en el punto $(0, -\bar{H})$. Por tanto, la pendiente de esta línea tangente es $2\bar{H}/\bar{Q}$. Como la resistencia R_t en el punto de operación P se obtiene mediante $2\bar{H}/\bar{Q}$, la resistencia R_t es la pendiente de la curva en el punto de operación.

Considérese la condición de operación en la vecindad del punto P. Se define como h una desviación pequeña de la altura a partir del valor en estado estable y como q el pequeño cambio correspondiente del flujo. A continuación, la pendiente de la curva en el punto P está dada por

$$\text{Pendiente de la curva en el punto } P = \frac{h}{q} = \frac{2\bar{H}}{\bar{Q}} = R_t$$

La aproximación lineal se basa en el hecho de que la curva real no difiere mucho de su línea tangente si la condición de operación no varía mucho.

La capacitancia C de un tanque se define como el cambio necesario en la cantidad de líquido almacenado, para producir un cambio de una unidad en el potencial (altura). (El potencial es la cantidad que indica el nivel de energía del sistema.)

$$C = \frac{\text{cambio en el líquido almacenado, m}^3}{\text{cambio en la altura, m}}$$

Debe señalarse que la capacidad (m^3) y la capacitancia (m^2) son diferentes. La capacitancia del tanque es igual a su área transversal. Si esta es constante, la capacitancia es constante para cualquier altura.

Sistemas de nivel de líquido. Considérese el sistema que aparece en la Figura 4-1(a). Las variables se definen del modo siguiente:

$\bar{Q}$ = caudal en estado estable (antes de que haya ocurrido un cambio), m^3/seg
q_i = desviación pequeña de la velocidad de entrada de su valor en estado estable, m^3/seg
q_o = desviación pequeña de la velocidad de salida de su valor en estado estable, m^3/seg
$\bar{H}$ = altura en estado estable (antes de que haya ocurrido un cambio), m
h = desviación pequeña de la altura a partir de su valor en estado estable, m

Como se señaló antes, un sistema se considera lineal si el flujo es laminar. Aunque el flujo sea turbulento, el sistema se puede linealizar si los cambios en las variables se mantienen pequeños. A partir de la suposición de que el sistema es lineal o linealizado, la ecuación diferencial de este sistema se obtiene del modo siguiente. Como el caudal de entrada menos el caudal de salida durante el pequeño intervalo de tiempo dt es igual a la cantidad adicional almacenada en el tanque, se observa que

$$C\,dh = (q_i - q_o)\,dt$$

A partir de la definición de resistencia, la relación entre q_o y h se obtiene mediante

$$q_o = \frac{h}{R}$$

La ecuación diferencial para este sistema para un valor constante de R se convierte en

$$RC\frac{dh}{dt} + h = Rq_i \tag{4-2}$$

Obsérvese que RC es la constante de tiempo del sistema. Si se toma la transformada de Laplace en ambos miembros de la Ecuación (4-2), y se supone la condición inicial de cero, se obtiene

$$(RCs + 1)H(s) = RQ_i(s) \qquad \text{donde} \qquad H(s) = \mathscr{L}[h] \quad \text{y} \quad Q_i(s) = \mathscr{L}[q_i]$$

Si q_i se considera la entrada y h la salida, la función de transferencia del sistema es

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

No obstante, si q_o se toma como la salida, y la entrada es la misma, la función de transferencia es

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

donde se ha usado la relación

$$Q_o(s) = \frac{1}{R} H(s)$$

Sistemas de nivel de líquido con interacción. Considérese el sistema que aparece en la Figura 4-2. En este sistema interactúan los dos tanques. Por tanto, la función de transferencia del sistema no es el producto de las dos funciones de transferencia de primer orden.

En lo sucesivo, sólo se supondrán variaciones pequeñas de las variables a partir de los valores en estado estable. Usando los símbolos definidos en la Figura 4-2, se obtienen las ecuaciones siguientes para este sistema:

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1 \tag{4-3}$$

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q - q_1 \tag{4-4}$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_2 \tag{4-5}$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 \tag{4-6}$$

Si q se considera la entrada y q_2 la salida, la función de transferencia del sistema es

$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)s + 1} \tag{4-7}$$

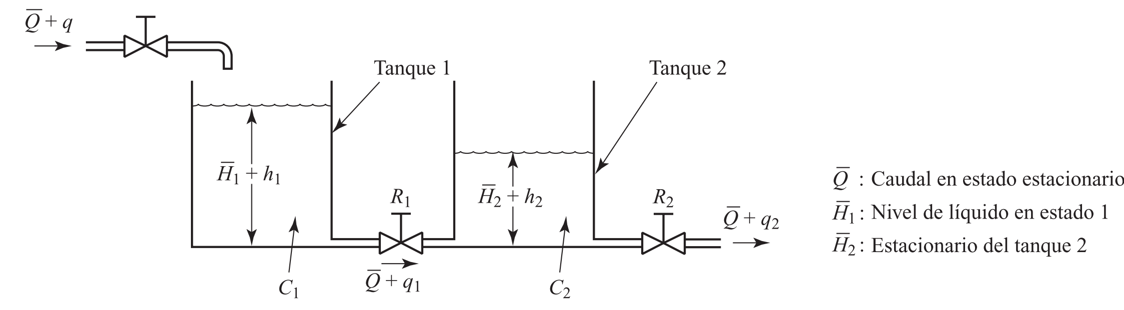


Figura 4-2. Sistema de nivel de líquidos con interacción.

Es instructivo obtener la Ecuación (4-7), función de transferencia de los sistemas que interactúan, mediante una reducción del diagrama de bloques. A partir de las Ecuaciones (4-3) a (4-6), se obtienen los elementos del diagrama de bloques, tal como aparece en la Figura 4-3(a). Si se conectan las señales de manera adecuada, se puede construir un diagrama de bloques, como el de la Figura 4-3(b). Es posible simplificar este diagrama de bloques, tal como aparece en la Figura 4-3(c). Simplificaciones adicionales llevan a cabo en las Figuras 4-3(d) y (e). La Figura 4-3(e) es equivalente a la Ecuación (4-7).

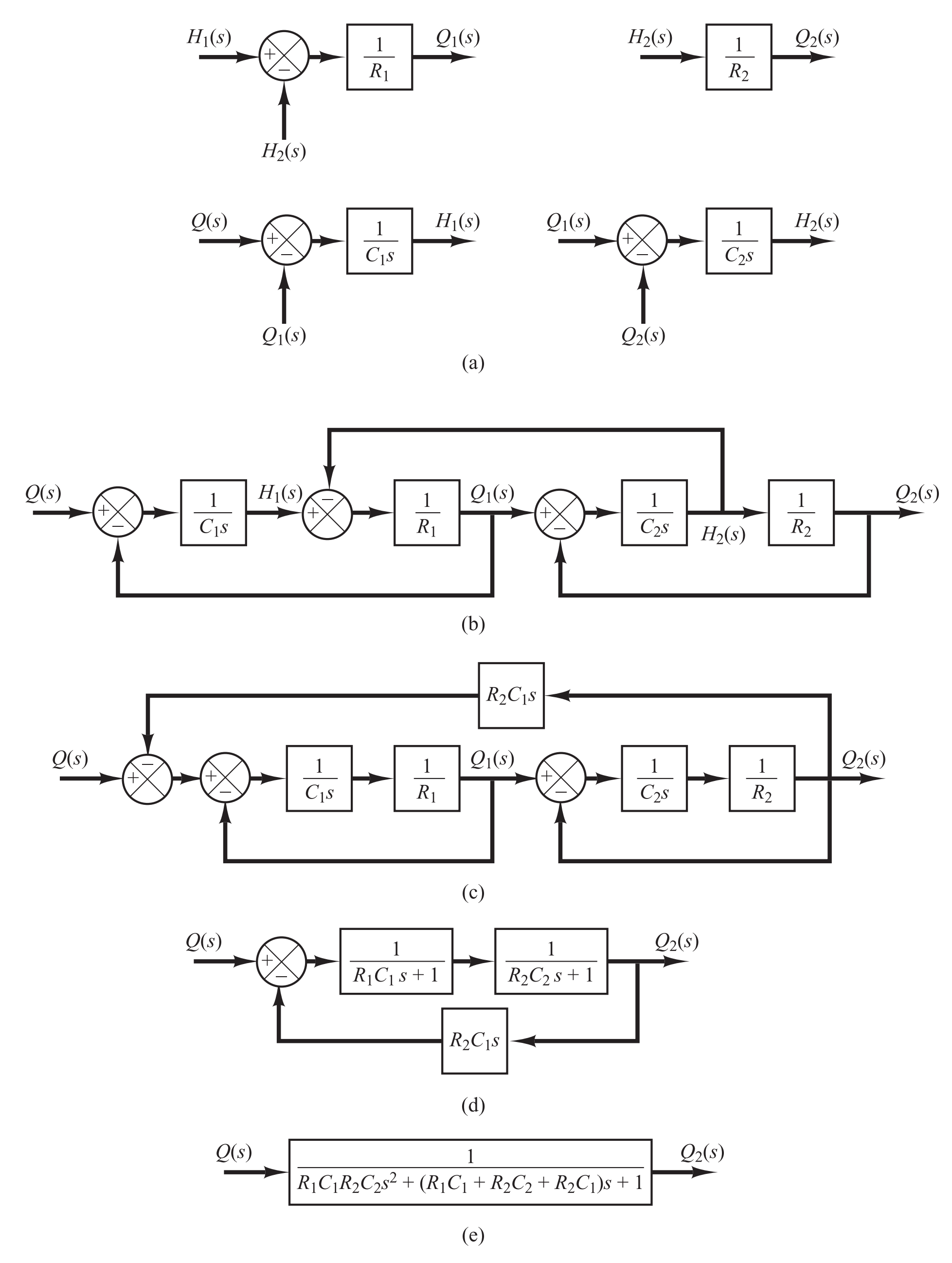


Figura 4-3. (a) Elementos del diagrama de bloques del sistema mostrado en la Figura 4-2; (b) diagrama de bloques del sistema; (c)-(e) reducciones sucesivas del diagrama de bloques.

Obsérvese la similitud y la diferencia entre la función de transferencia obtenida mediante la Ecuación (4-7) y la que se obtuvo con la Ecuación (3-33). El término R_2C_1s que aparece en el denominador de la Ecuación (4-7) ejemplifica la interacción entre los dos tanques. Asimismo, el término R_1C_2s en el denominador de la Ecuación (3-33) representa la interacción entre los dos circuitos *RC* de la Figura 3-8.

4-3 Sistemas neumáticos

En las aplicaciones industriales es frecuente equiparar los sistemas neumáticos y los sistemas hidráulicos. A continuación se ofrece una breve comparación de estos dos tipos de sistemas.

Comparación entre sistemas neumáticos y sistemas hidráulicos. El fluido que suele encontrarse en los sistemas neumáticos es el aire; en los sistemas hidráulicos es el aceite. Y son principalmente las propiedades distintas de los fluidos incorporados las que caracterizan las diferencias entre estos dos sistemas. A continuación se listan estas diferencias:

1. El aire y los gases son compresibles, en tanto que el aceite no lo es.
2. El aire carece de la propiedad lubricante y siempre contiene vapor de agua. El aceite funciona como un fluido hidráulico al igual que como lubricante.
3. La presión de operación normal de los sistemas neumáticos es mucho más baja que la de los sistemas hidráulicos.
4. Las potencias de salida de los sistemas neumáticos son considerablemente menores que las de los sistemas hidráulicos.
5. La precisión de los actuadores neumáticos es deficiente a bajas velocidades, en tanto que la precisión de los actuadores hidráulicos es satisfactoria en todas las velocidades.
6. En los sistemas neumáticos, se permite un cierto grado de escape externo, pero debe evitarse el escape interno debido a que la diferencia de presión efectiva es bastante pequeña. En los sistemas hidráulicos se permite un cierto grado de escape interno, pero debe evitarse el escape externo.
7. En los sistemas neumáticos no se requieren tubos de recuperación cuando se usa aire, en tanto que siempre se necesitan en los sistemas hidráulicos.
8. La temperatura de operación normal de los sistemas neumáticos es de 5 a 60 °C (41 a 140 °F). Sin embargo, el sistema neumático opera en el rango de 0 a 200 °C (32 a 392 °F). Los sistemas neumáticos son insensibles a los cambios de temperatura, a diferencia de los sistemas hidráulicos, en los cuales la fricción de los fluidos provocada por la viscosidad depende en gran parte de la temperatura. La temperatura de operación normal de los sistemas hidráulicos es de 20 a 70 °C (68 a 158 °F).
9. Los sistemas neumáticos no corren el riesgo de incendiarse o explotar, al contrario que los sistemas hidráulicos.

A continuación se empieza con un modelado matemático de los sistemas neumáticos. Después se presentarán los controladores neumáticos proporcionales.

Se ofrecerá un análisis detallado del principio mediante el cual operan los controladores proporcionales. Después, se tratarán los métodos para obtener acciones de control derivativa e integral. En todos los análisis, se enfatizarán los principios fundamentales en lugar de los detalles de la operación de los mecanismos reales.

Sistemas neumáticos. Las últimas décadas han visto un gran desarrollo de los controladores neumáticos de baja presión para sistemas de control industrial, que en la actualidad se usan ampliamente en los procesos industriales. Entre las razones para que estos controladores resulten atractivos están que son a prueba de explosiones, son sencillos y son fáciles de mantener.

Resistencia y capacitancia de los sistemas de presión. Muchos procesos industriales y controladores neumáticos incluyen el flujo de un gas, que puede ser aire, en recipientes a presión conectados a través de tuberías.

Considérese el sistema a presión de la Figura 4-4(a). El caudal del gas a través de la restricción es una función de la diferencia de presión del gas $p_i - p_o$. Tal sistema de presión se caracteriza en términos de una resistencia y una capacitancia.

La resistencia R del flujo de gas se define del modo siguiente:

$$R = \frac{\text{cambio en la diferencia de presión del gas, Ib}_\text{f}\text{/ft}^2}{\text{cambio en el caudal, lb/seg}}$$

o bien

$$R = \frac{d(\Delta P)}{dq} \tag{4-8}$$

donde $d(\Delta P)$ es un cambio pequeño en la diferencia de presión del gas y dq es un cambio pequeño en el caudal. El cálculo del valor de la resistencia R del flujo de gas puede llevar mucho tiempo. Sin embargo, experimentalmente se determina con facilidad a partir de una gráfica de la diferencia de presión frente al caudal, calculando la pendiente de la curva en una condición de operación determinada, como se aprecia en la Figura 4-4(b).

La capacitancia del recipiente a presión se define mediante

$$C = \frac{\text{cambio en el gas almacenado, lb}}{\text{cambio en la presión del gas, lb}_\text{f}\text{/ft}^2}$$

o bien

$$C = \frac{dm}{dp} = V\frac{d\rho}{dp} \tag{4-9}$$

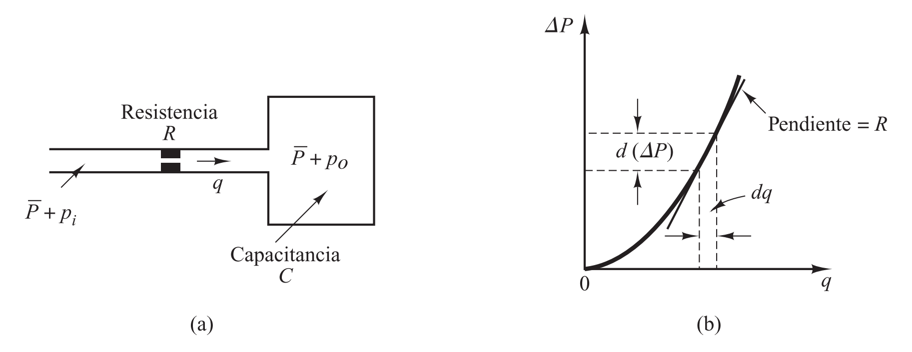


Figura 4-4. (a) Diagrama esquemático de un sistema de presión; (b) curva de la diferencia de presión frente al caudal.

donde C = capacitancia, lb-ft^2/lb$_f$
m = masa del gas en el recipiente, lb
p = presión del gas, lb$_f$/ft^2
V = volumen del recipiente, ft^3
ρ = densidad, lb/ft^3

La capacitancia del sistema de presión depende del tipo de proceso de expansión implícito. La capacitancia se calcula mediante la ley de los gases ideales. Si el proceso de expansión del gas es politrópico y el cambio de estado del mismo está entre isotérmico y adiabático, entonces

$$p\left(\frac{V}{m}\right)^n = \frac{p}{\rho^n} = \text{constante} = K \tag{4-10}$$

donde n = exponente politrópico.

Para los gases ideales,

$$p\bar{v} = \bar{R}T \quad \text{o} \quad pv = \frac{\bar{R}}{M}T$$

donde p = presión absoluta, lb$_f$/ft^2
$\bar{v}$ = volumen ocupado por 1 mol de un gas, ft^3/lb-mol
$\bar{R}$ = constante universal de los gases, ft-lb$_f$/lb-mol °R
T = temperatura absoluta, °R
v = volumen específico del gas, ft^3/lb
M = peso molecular del gas por mol, lb/lb-mol

Por tanto

$$pv = \frac{p}{\rho} = \frac{\bar{R}}{M}T = R_{\text{gas}}T \tag{4-11}$$

donde R_{gas} = constante de gas, ft-lb$_f$/lb °R.

El exponente politrópico n es unitario para la expansión isotérmica. Para la expansión adiabática, n es igual al cociente entre los calores específicos c_p/c_v, donde c_p es el calor específico a presión constante y c_v es el calor específico a volumen constante. En muchos casos prácticos, el valor de n es aproximadamente constante y, por ende, la capacitancia se considera constante.

El valor de $d\rho/dp$ se obtiene a partir de las Ecuaciones (4-10) y (4-11). De la Ecuación (4-10) se tiene

$$dp = Kn\rho^{n-1}\,d\rho$$

o bien

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{Kn\rho^{n-1}} = \frac{\rho^n}{pn\rho^{n-1}} = \frac{\rho}{pn}$$

Sustituyendo la Ecuación (4-11) en esta última ecuación se obtiene

$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{nR_{\text{gas}}T}$$

La capacitancia C se obtiene como

$$C = \frac{V}{nR_{\text{gas}}T} \tag{4-12}$$

La capacitancia de un recipiente determinado es constante si la temperatura permanece constante. (En muchos casos prácticos, el exponente politrópico n es aproximadamente $1.0 \sim 1.2$ para gases en recipientes metálicos sin aislamiento.)

Sistemas de presión. Considérese el sistema de la Figura 4-4(a). Si sólo se suponen desviaciones pequeñas en las variables a partir de sus valores en estado estable respectivos, este sistema se considera lineal.

Se definen

$\bar{P}$ = presión del gas en el recipiente en estado estable (antes de que ocurran cambios en la presión), lb_f/ft^2
p_i = cambio pequeño en la presión del gas que entra, lb_f/ft^2
p_o = cambio pequeño en la presión del gas en el recipiente, lb_f/ft^2
V = volumen del recipiente, ft^3
m = masa del gas en el recipiente, lb
q = caudal del gas, lb/seg
p = densidad del gas, lb/ft^3

Para valores pequeños de p_i y p_o, la resistencia R obtenida mediante la Ecuación (4-8) se vuelve constante y se escribe como

$$R = \frac{p_i - p_o}{q}$$

La capacitancia C se obtiene mediante la Ecuación (4-9), o bien

$$C = \frac{dm}{dp}$$

Como el cambio de presión dp_o multiplicado por la capacitancia C es igual al gas añadido al recipiente durante dt segundos, se obtiene

$$C\,dp_o = q\,dt$$

o bien

$$C\frac{dp_o}{dt} = \frac{p_i - p_o}{R}$$

lo cual se escribe como

$$RC\frac{dp_o}{dt} + p_o = p_i$$

Si p_i y p_o se consideran la entrada y la salida, respectivamente, la función de transferencia del sistema es

$$\frac{P_o(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

donde RC tiene la dimensión del tiempo y es la constante de tiempo del sistema.

Amplificadores neumáticos de tobera-aleta. La Figura 4-5(a) muestra un diagrama esquemático de un amplificador neumático de tobera-aleta. La fuente de potencia para este amplificador es un suministro de aire a una presión constante. El amplificador de tobera-aleta convierte los cambios pequeños en la posición de la aleta en cambios grandes en la presión trasera de la tobera. Por tanto, una salida de energía grande se controla por medio de la pequeña cantidad de energía necesaria para posicionar la aleta.

En la Figura 4-5(a) el aire presurizado se alimenta a través del orificio y se expulsa de la tobera hacia la aleta. En general, la presión de suministro P_s para tal controlador es de 20 psig (una gravitacional de 1.4 kg_f/cm^2). El diámetro del orificio está en el orden de 0.01 in (0.25 mm) y el de la tobera está en el orden de 0.016 in (0.4 mm). Para asegurar un funcionamiento adecuado del amplificador, el diámetro de la tobera debe ser más grande que el diámetro del orificio.

Al operar este sistema, la aleta se posiciona contra la abertura de la tobera. La presión trasera de la tobera P_b se controla mediante la distancia X tobera-aleta. Conforme la aleta se acerca a la tobera, aumenta la oposición al flujo del aire a través de la tobera y, en consecuencia, aumenta la presión trasera P_b de la tobera. Si la tobera está completamente cerrada por medio de la aleta, su presión trasera P_b se vuelve igual a la presión de suministro P_s. Si la aleta se aleja de la tobera, de modo que la distancia tobera-aleta sea amplía (en el orden de 0.01 in), prácticamente no hay restricción para el flujo, y la presión trasera P_b de la tobera adquiere un valor mínimo que depende del dispositivo tobera-aleta. (La presión posible más baja será la presión ambiental P_a.)

Obsérvese que, debido a que el chorro de aire opone una fuerza contra la aleta, es necesario trazar lo más pequeño posible el diámetro de la tobera.

La Figura 4-5(b) contiene una curva típica que relaciona la presión trasera P_b de la tobera con la distancia X tobera-aleta. La parte con gran inclinación y casi lineal de la curva se utiliza en la operación real del amplificador de tobera-aleta. Debido a que el rango de los desplazamientos de la aleta está limitado a un valor pequeño, también es pequeño el cambio en la presión de salida, a menos que la curva esté muy inclinada.

El amplificador de tobera-aleta convierte el desplazamiento en una señal de presión. Como los sistemas de control de procesos industriales requieren una potencia de salida grande para operar válvulas con actuadores neumáticos grandes, por lo general es insuficiente el incremento de potencia del amplificador de tobera-aleta. En consecuencia, un relé neumático funciona por lo general como un amplificador de potencia conectado con el amplificador de tobera-aleta.

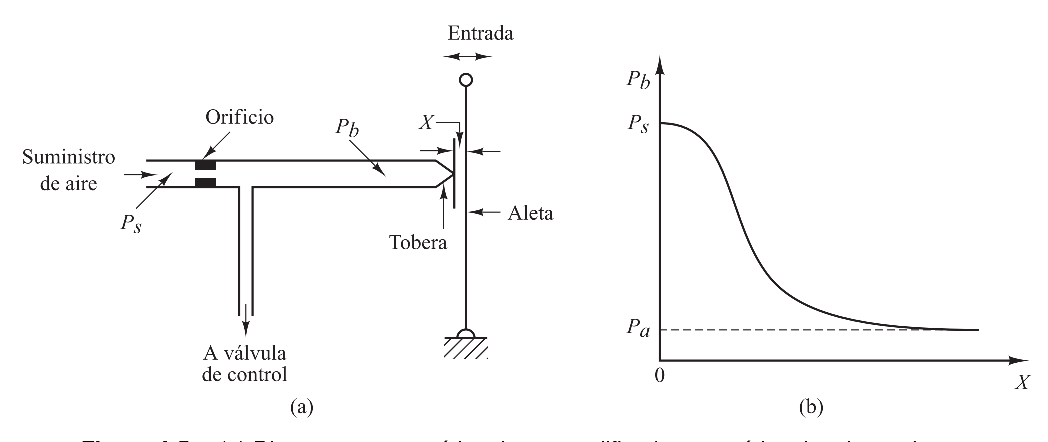


Figura 4-5. (a) Diagrama esquemático de un amplificador neumático de tobera-aleta; (b) curva característica asociada a la presión de la tobera trasera y a la distancia tobera-aleta.

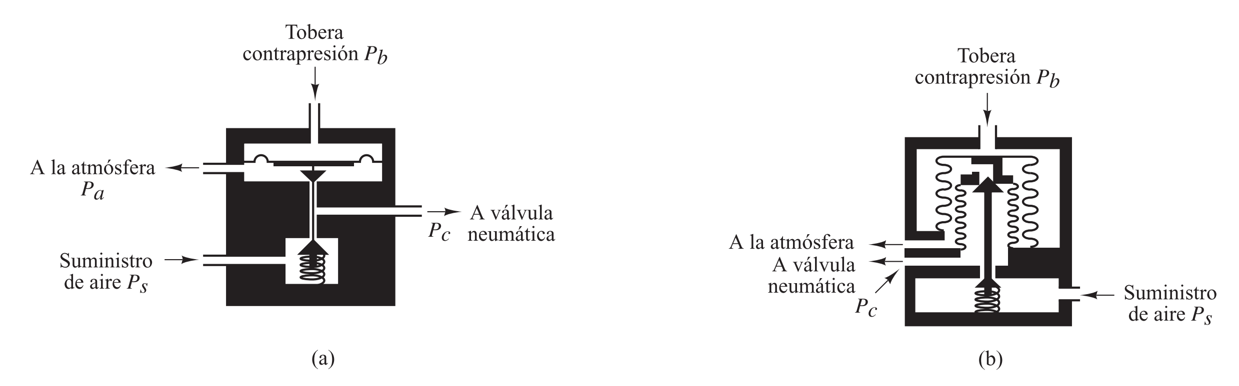


Figura 4-6. (a) Diagrama esquemático de un relevador con escape; (b) diagrama esquemático de un relevador sin escape.

Relés neumáticos. En la práctica, en un controlador neumático, el amplificador de tobera-aleta actúa como el amplificador de primera etapa y el relé neumático como el amplificador de segunda etapa. El relé neumático es capaz de manejar un flujo de aire grande.

La Figura 4-6(a) contiene un diagrama esquemático de un relé neumático. Conforme aumenta la presión trasera de la tobera P_b, la válvula del diafragma se mueve hacia abajo. La apertura hacia la atmósfera disminuye y la apertura para la válvula neumática aumenta, por lo cual aumenta la presión de control P_c. Cuando la válvula de diafragma cierra la abertura hacia la atmósfera, la presión de control P_c se vuelve igual a la presión de suministro P_s. Cuando disminuye la presión trasera de la tobera P_b, y la válvula de diafragma se mueve hacia arriba y cierra el suministro de aire, la presión de control P_c disminuye hasta la presión ambiental P_a. Por tal razón, se hace que varíe la presión de control P_c de 0 psig a una presión de suministro completa, por lo general de 20 psig.

El movimiento total de la válvula de diafragma es muy pequeño. En todas las posiciones de la válvula, excepto en la posición en la que se cierra el suministro de aire, el aire continúa escapando a la atmósfera, incluso después de que se obtiene la condición de equilibrio entre la presión trasera de la tobera y la presión de control. Por tanto, el de la Figura 4-6(a) es un tipo de relé con escape.

Existe otro tipo de relé, sin escape. En este, el escape del aire se detiene cuando se obtiene la condición de equilibrio y, por tanto, no hay una pérdida de aire presurizado en una operación en estado estable. Sin embargo, obsérvese que el relé sin escape debe tener un alivio atmosférico para liberar la presión de control P_c de la válvula con actuador neumático. La Figura 4-6(b) muestra un diagrama esquemático de un relé sin escape.

En cualquier tipo de relé, el suministro de aire se controla mediante una válvula, que a su vez se controla mediante la presión trasera de la tobera. Por tanto, la presión trasera de la tobera se convierte en una presión de control con la amplificación de la potencia.

Como la presión de control P_c cambia casi instantáneamente con las modificaciones en la presión trasera de la tobera P_b, la constante del tiempo del relé neumático es insignificante en comparación con las otras constantes de tiempo más grandes del controlador neumático y la planta.

Obsérvese que algunos relés neumáticos funcionan en acción inversa. Por ejemplo, el relé de la Figura 4-7 es un relé de acción inversa. En él, conforme aumenta la presión trasera de la tobera P_b, la válvula de esfera es impulsada hacia el asiento inferior, por lo cual disminuye la presión de control P_c. Por consiguiente, se trata de un relé de acción inversa.

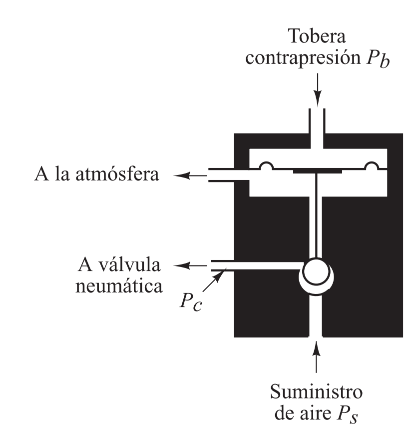


Figura 4-7. Relevador de acción inversa.

Controladores neumáticos proporcionales (de tipo fuerza-distancia). En la industria se usan dos tipos de controladores neumáticos, el denominado de fuerza-distancia y el de fuerza-balance. Sin tener en cuenta lo distintos que pueden parecer los controladores neumáticos industriales, un estudio cuidadoso mostrará la estrecha similitud en las funciones del circuito neumático. Aquí se considerarán controladores neumáticos del tipo de fuerza-distancia.

La Figura 4-8(a) muestra un diagrama esquemático de semejante controlador proporcional. El amplificador de tobera-aleta es el amplificador de la primera etapa y la presión trasera de la tobera se controla mediante la distancia de la tobera-aleta. El amplificador de tipo relé constituye el amplificador de la segunda etapa. La presión trasera de la tobera determina la posición de la válvula de diafragma para el amplificador de la segunda etapa, que es capaz de manejar una cantidad grande de flujo de aire.

En la mayor parte de los controladores neumáticos, se emplea algún tipo de realimentación neumática. La realimentación de la salida neumática reduce la cantidad de movimiento real de la aleta. En lugar de montar la aleta en un punto fijo, como se aprecia en la Figura 4-8(b), suele colocarse como pivote en los fuelles de realimentación, como se observa en la Figura 4-8(c). La cantidad de realimentación se regula introduciendo un enlace variable entre el fuelle de realimentación y el punto de conexión de la aleta. A su vez la aleta se convierte en un enlace flotante. Se mueve tanto por la señal de error como por la señal de realimentación.

La operación del controlador de la Figura 4-8(a) es la siguiente. La señal de entrada para el amplificador neumático de dos etapas es la señal de error. El incremento en la señal de error mueve la aleta hacia la izquierda. Este movimiento, a su vez, aumenta la presión trasera de la tobera y la válvula de diafragma se mueve hacia abajo. Esto provoca un aumento en la presión de control. Este incremento hace que el fuelle F se expanda y mueva la aleta hacia la derecha, con lo cual se abre la tobera. Debido a esta realimentación, el desplazamiento de tobera-aleta es muy pequeño, pero el cambio en la presión de control puede ser grande.

Debe señalarse que la operación adecuada del controlador requiere que el fuelle de realimentación mueva la aleta menos que el movimiento provocado por la pura señal de error. (Si estos dos movimientos son iguales, no se producirá una acción de control.)

Las ecuaciones para este controlador se obtienen del modo siguiente. Cuando el error es cero, o $e = 0$, existe un estado de equilibrio con la distancia tobera-aleta igual a $\bar{X}$, el desplazamiento del fuelle igual a $\bar{Y}$, el desplazamiento del diafragma igual a $\bar{Z}$, la presión trasera de la tobera

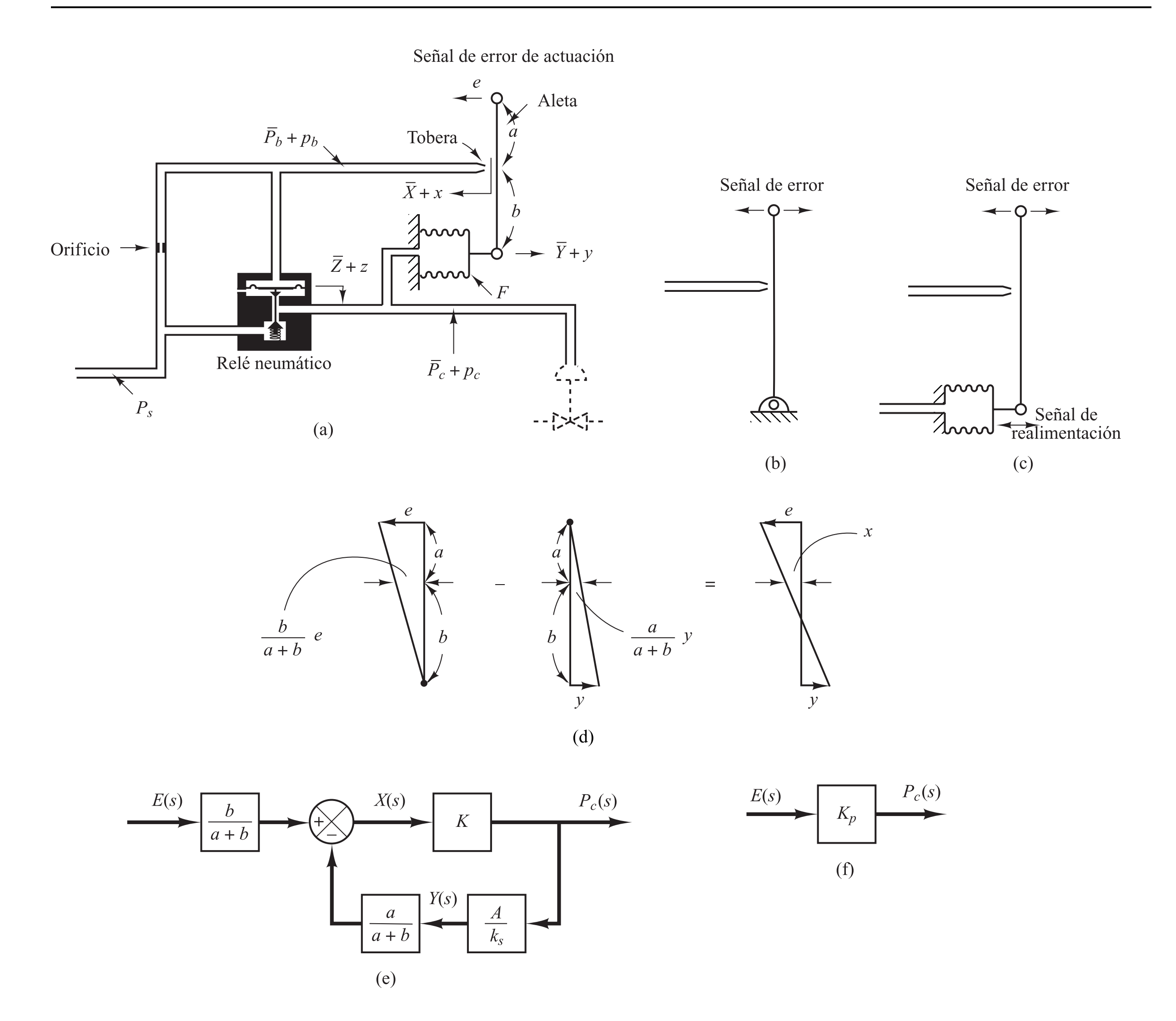


Figura 4-8. (a) Diagrama esquemático de un controlador proporcional neumático de tipo fuerza-distancia; (b) aleta montada en un punto fijo; (c) aleta montada en los fuelles de realimentación; (d) desplazamiento x como resultado de la suma de dos pequeños desplazamientos; (e) diagrama de bloques para el controlador; (f) diagrama de bloques simplificado para el controlador.

igual a $\bar{P}_b$, y la presión de control igual a $\bar{P}_c$. Cuando existe un error, la distancia tobera-aleta, el desplazamiento del fuelle, el desplazamiento del diafragma, la presión trasera de la tobera y la presión de control se desvían de sus valores de equilibrio respectivos. Supóngase que estas desviaciones son x, y, z, p_b y p_c, respectivamente. (La dirección positiva para cada variable de desplazamiento se indica mediante una punta de flecha en el diagrama.)

Suponiendo que la relación entre la variación en la presión trasera de la tobera y la variación en la distancia tobera-aleta es lineal, se tiene que

$$p_b = K_1 x \tag{4-13}$$

donde K_1 es una constante positiva. Para la válvula de diafragma,

$$p_b = K_2 z \tag{4-14}$$

donde K_2 es una constante positiva. La posición de la válvula de diafragma determina la presión de control. Si la válvula de diafragma es tal que la relación entre p_c y z es lineal, entonces

$$p_c = K_3 z \tag{4-15}$$

donde K_3 es una constante positiva. A partir de las Ecuaciones (4-13), (4-14) y (4-15), se obtiene

$$p_c = \frac{K_3}{K_2} p_b = \frac{K_1 K_3}{K_2} x = Kx \tag{4-16}$$

donde $K = K_1 K_3 / K_2$ es una constante positiva. Para el movimiento de la aleta, se tiene que

$$x = \frac{b}{a+b} e - \frac{a}{a+b} y \tag{4-17}$$

El fuelle funciona como un resorte y la ecuación siguiente es pertinente:

$$A p_c = k_s y \tag{4-18}$$

donde A es el área efectiva del fuelle y k_s es la constante de elasticidad equivalente, que es la rigidez provocada por la acción del lado corrugado del fuelle.

Suponiendo que todas las variaciones de las variables están dentro de un rango lineal, se obtiene un diagrama de bloques para este sistema a partir de las Ecuaciones (4-16), (4-17) y (4-18) como se aprecia en la Figura 4-8(e). En la Figura 4-8(e) se aprecia con claridad que el mismo controlador neumático de la Figura 4-8(a) es un sistema de realimentación. La función de transferencia entre p_c y e se obtiene mediante

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b} K}{1 + K \dfrac{a}{a+b} \dfrac{A}{k_s}} = K_p \tag{4-19}$$

La Figura 4-8(f) contiene un diagrama de bloques simplificado. Como p_c y e son proporcionales, el controlador neumático de la Figura 4-8(a) se denomina *controlador neumático proporcional*. Como se observa en la Ecuación (4-19), la ganancia del controlador neumático proporcional varía en gran medida si se ajusta el enlace que conecta la aleta. [El enlace que conecta la aleta no aparece en la Figura 4-8(a).] En casi todos los controladores proporcionales comerciales existe una perilla de ajuste u otro mecanismo para variar la ganancia ajustando este enlace.

Como señaló antes, la señal de error movió la aleta en una dirección y el fuelle de realimentación la movió en la dirección opuesta, pero en un grado más pequeño. Por tanto, el efecto del fuelle de realimentación es reducir la sensibilidad del controlador. El principio de realimentación se usa con frecuencia para obtener controladores de banda proporcional amplia.

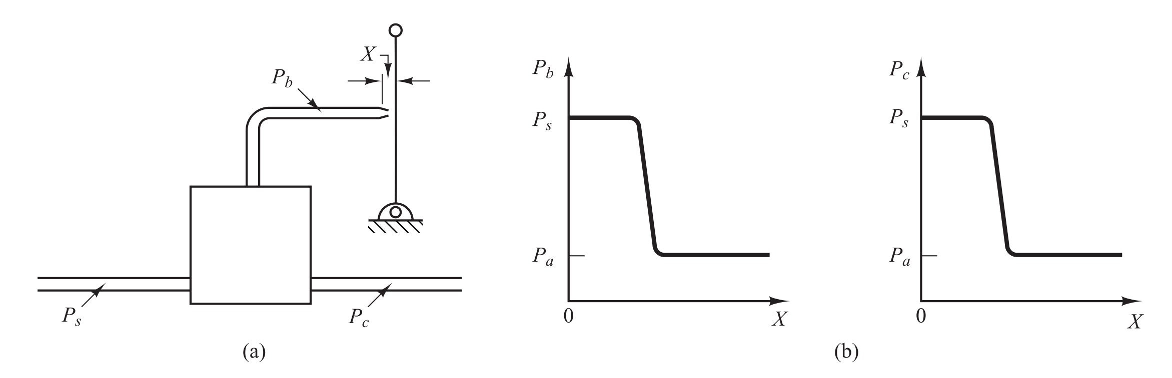


Figura 4-9. (a) Controlador neumático sin mecanismo de realimentación; (b) curvas P_b frente a X y P_c frente a X.

Los controladores neumáticos que no tienen mecanismos de realimentación [lo que significa que un extremo de la aleta está fijo, tal como en la Figura 4-9(a)] tienen una alta sensibilidad y se denominan *controladores neumáticos de dos posiciones* o *controladores neumáticos de encendido y apagado*. En semejante tipo de controlador, sólo se requiere un pequeño movimiento entre la tobera y la aleta para generar un cambio completo de la presión de control máxima a la mínima. Las curvas que relacionan P_b con X, y P_c con X se presentan en la Figura 4-9(b). Obsérvese que un cambio pequeño en X provoca un cambio grande en P_b, lo que hace que la válvula de diafragma quede completamente abierta o cerrada.

Controladores neumáticos proporcionales (del tipo fuerza-balance). La Figura 4-10 muestra un diafragma esquemático de un controlador neumático proporcional de fuerza-balance. Los controladores de fuerza-balance se usan ampliamente en la industria. Se los conoce como controladores apilados. El principio de operación básico no es diferente del que emplea el controlador de fuerza-distancia. La principal ventaja del controlador fuerza-balance es que elimina muchos enlaces mecánicos y uniones de pivote, con lo cual reduce los efectos de la fricción.

A continuación se considera el principio del controlador de fuerza-balance. En el controlador de la Figura 4-10, la presión de la entrada de referencia P_r y la presión de salida P_o se alimentan hacia grandes cámaras de diafragma. Obsérvese que un controlador neumático de fuerza-balance sólo opera sobre señales de presión. Por tanto, es necesario convertir la entrada de referencia y la salida del sistema en las señales de presión correspondientes.

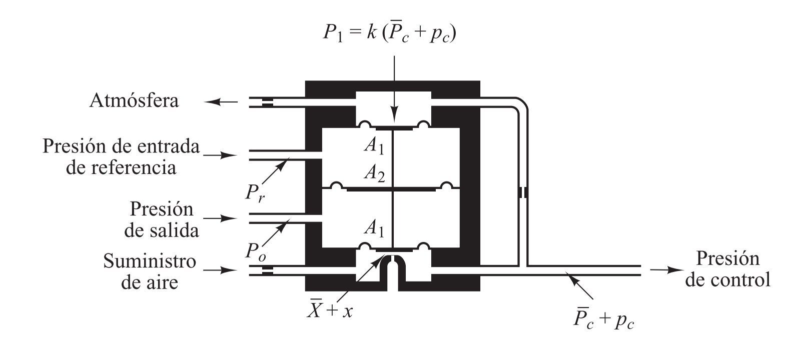


Figura 4-10. Diagrama esquemático de un controlador neumático proporcional de tipo fuerza-balance.

Al igual que en el caso del controlador de fuerza-distancia, este controlador emplea una aleta, una tobera y algunos orificios. En la Figura 4-10, la abertura perforada en la cama inferior es la tobera. El diafragma que aparece justo encima de la tobera funciona como una aleta.

La operación del controlador fuerza-balance de la Figura 4-10 se resume así: 20 psig de aire fluyen desde un suministro a través de un orificio, provocando una presión reducida en la cámara inferior. El aire de esta cámara escapa a la atmósfera a través de la tobera. El flujo a través de la tobera depende de la brecha y la disminución de la presión a través de la misma. Un incremento en la presión de la entrada de referencia P_r al tiempo que la presión de salida P_o permanece igual, provoca que el vástago de la válvula se mueva hacia abajo, disminuyendo la brecha entre la tobera y el diafragma de la aleta. Esto provoca que la presión de control P_c aumente. Supóngase que

$$p_e = P_r - P_o \tag{4-20}$$

Si $p_c = 0$, existe un estado de equilibrio con la distancia tobera-aleta igual a $\bar{X}$ y la presión de control igual a $\bar{P}_c$. En este estado de equilibrio, $P_1 = \bar{P}_c k$ (donde $k < 1$) y

$$\bar{X} = \alpha(\bar{P}_c A_1 - \bar{P}_c k A_1) \tag{4-21}$$

donde α es una constante.

Se supone que $p_e \neq 0$ y se definen las pequeñas variaciones en la distancia tobera-aleta y la presión de control como x y p_c, respectivamente. En este caso se obtiene la ecuación siguiente:

$$\bar{X} + x = \alpha[(\bar{P}_c + p_c)A_1 - (\bar{P}_c + p_c)kA_1 - p_e(A_2 - A_1)] \tag{4-22}$$

De las Ecuaciones (4-21) y (4-22), se obtiene

$$x = \alpha[p_c(1 - k)A_1 - p_e(A_2 - A_1)] \tag{4-23}$$

En este punto, se debe examinar la cantidad x. En el diseño de los controladores neumáticos, la distancia tobera-aleta se hace muy pequeña. En vista de que x/α es un término mucho más pequeño que $p_c(1 - k)A_1$ o $p_c(A_2 - A_1)$, es decir, para $p_e \neq 0$

$$\frac{x}{\alpha} \ll p_c(1 - k)A_1$$

$$\frac{x}{\alpha} \ll p_e(A_2 - A_1)$$

es posible no considerar el término x en nuestro análisis. A continuación se vuelve a escribir la Ecuación (4-23) para que refleje esta suposición del modo siguiente:

$$p_c(1 - k)A_1 = p_e(A_2 - A_1)$$

y la función de transferencia entre p_c y p_e se convierte en

$$\frac{P_c(s)}{P_e(s)} = \frac{A_2 - A_1}{A_1}\frac{1}{1 - k} = K_p$$

donde p_e se define mediante la Ecuación (4-20). El controlador de la Figura 4-10 es proporcional. El valor del aumento de la ganancia K_p se incrementa conforme k tiende a uno. Obsérvese que el valor de k depende de los diámetros de los orificios de los tubos de entrada y salida de la cámara de realimentación. (El valor de k tiende a la unidad conforme la resistencia al flujo en el orificio de tubo de entrada se hace más pequeña.)

Válvulas con actuador neumático. Una característica de los controles neumáticos es que emplean casi exclusivamente válvulas con actuador neumático. Una válvula con actuador neumático proporciona una gran potencia de salida. (Como un actuador neumático requiere una entrada de potencia grande para producir una salida de potencia grande, es necesario contar con una cantidad suficiente de aire presurizado.) En las válvulas con actuador neumático prácticas, las características de la válvula tal vez no sean lineales; es decir, es posible que el flujo no sea directamente proporcional a la posición del vástago de la válvula y también pueden existir otros efectos no lineales, como la histéresis.

Considérese el diagrama esquemático de una válvula con actuador neumático como la de la Figura 4-11. Supóngase que el área del diafragma es A. Suponga también, que cuando el error es cero la presión de control es igual a $\bar{P}_c$ y el desplazamiento de la válvula es igual a $\bar{X}$.

En el análisis siguiente, se consideran algunas variaciones pequeñas en las variables y se linealiza la válvula con actuador neumático. Se definen las variaciones pequeñas en la presión de control y en el desplazamiento de la válvula correspondiente como p_c y x, respectivamente. Como un cambio pequeño en la fuerza de presión neumática aplicada al diafragma vuelve a posicionar la carga, formada por el resorte, la fricción viscosa y la masa, la ecuación de balance de la fuerza se convierte en

$$Ap_c = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

donde m = masa de la válvula y vástago de la válvula
b = coeficiente de fricción viscosa
k = constante del resorte

Si las fuerzas producidas por la masa y la fricción viscosa son insignificantes, entonces esta última ecuación se simplifica a

$$Ap_c = kx$$

La función de transferencia entre x y p_c se convierte en

$$\frac{X(s)}{P_c(s)} = \frac{A}{k} = K_c$$

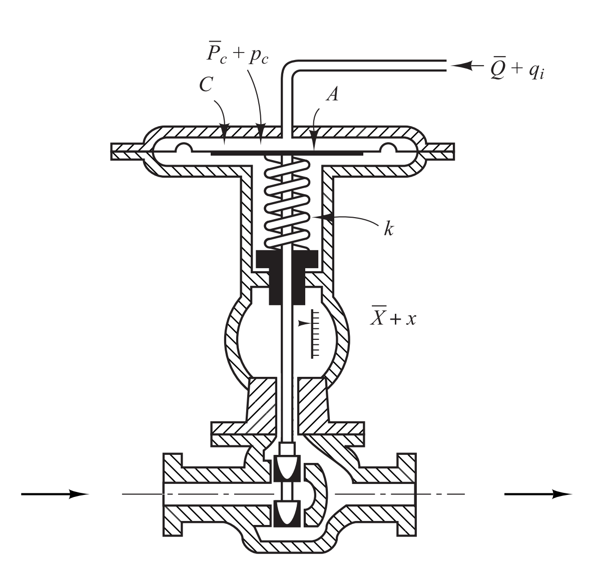


Figura 4-11. Diagrama esquemático de una válvula actuadora neumática.

donde $X(s) = \mathscr{L}[x]$ y $P_c(s) = \mathscr{L}[p_c]$. Si q_i, el cambio en el flujo a través de la válvula con actuador neumático, es proporcional a x, el cambio en el desplazamiento del vástago de la válvula, entonces,

$$\frac{Q_i(s)}{X(s)} = K_q$$

donde $Q_i(s) = \mathscr{L}(q_i)$ y K_q es una constante. La función de transferencia entre q_i y p_c se convierte en

$$\frac{Q_i(s)}{P_c(s)} = K_c K_q = K_v$$

donde K_v es una constante.

La presión de control estándar para este tipo de válvula con actuador neumático está entre 3 y 15 psig. El desplazamiento del vástago de la válvula está limitado por la carrera que se permite al diafragma y sólo es de unas cuantas pulgadas. Si se necesita un viaje más largo, es posible emplear una combinación de pistón-resorte.

En las válvulas con actuador neumático, la fuerza de fricción-estática debe limitarse a un valor bajo para no provocar una histéresis excesiva. Debido a la compresibilidad del aire, la acción de control tal vez no sea positiva; es decir, puede producirse un error en la posición del vástago de la válvula. El uso de un posicionador de válvula mejora el comportamiento de una válvula con actuador neumático.

Principio básico para obtener una acción de control derivativa. Ahora se presentarán los métodos para obtener una acción de control derivativa. Se volverá a enfatizar el principio y no los detalles del mecanismo real.

El principio básico para generar la acción de control que se requiere es insertar el inverso de la función de transferencia deseada en la trayectoria de realimentación. Para el sistema de la Figura 4-12, la función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Si $|G(s)H(s)| \gg 1$, entonces $C(s)/R(s)$ se puede modificar de la forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{H(s)}$$

Por tanto, si se desea una acción de control proporcional-derivativa, se insertará un elemento que tenga la función de transferencia $1/(Ts + 1)$ en el camino de realimentación.

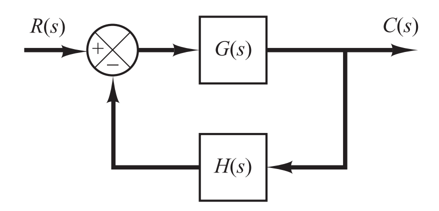


Figura 4-12. Sistema de control.

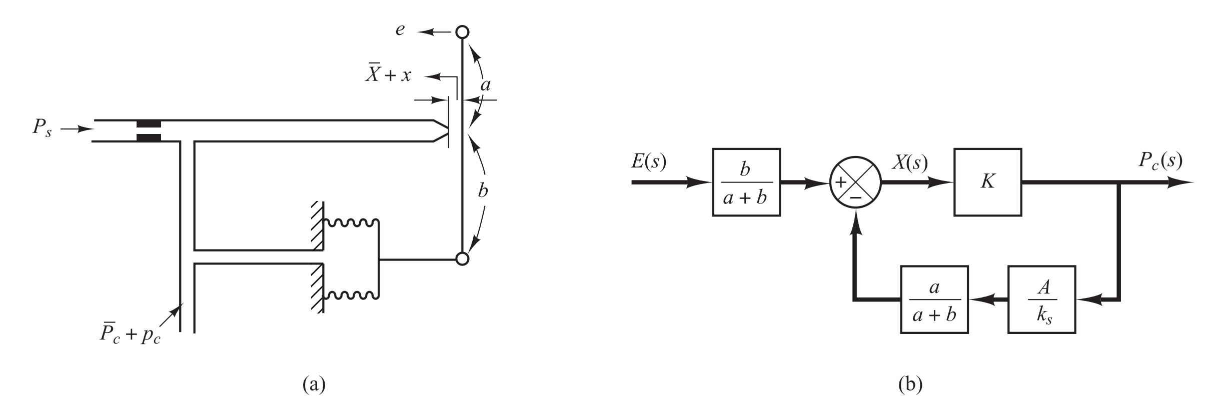


Figura 4-13. (a) Controlador proporcional neumático; (b) diagrama de bloques del controlador.

Considérese el controlador neumático de la Figura 4-13(a). Si se consideran cambios pequeños en las variables, se puede dibujar un diagrama de bloques de este controlador, como se muestra en la Figura 4-13(b). A partir del diagrama de bloques se observa que el controlador es de tipo proporcional.

Ahora se mostrará que la adición de una restricción en la trayectoria de realimentación negativa cambia el controlador proporcional en un controlador proporcional-derivativo, el cual se conoce como controlador PD.

Considérese el controlador neumático de la Figura 4-14(a). Si se suponen de nuevo cambios pequeños en el error, la distancia tobera-aleta y la presión de control, podemos resumir la operación de este controlador del modo siguiente. Se supone primero un cambio escalón pequeño en *e*.

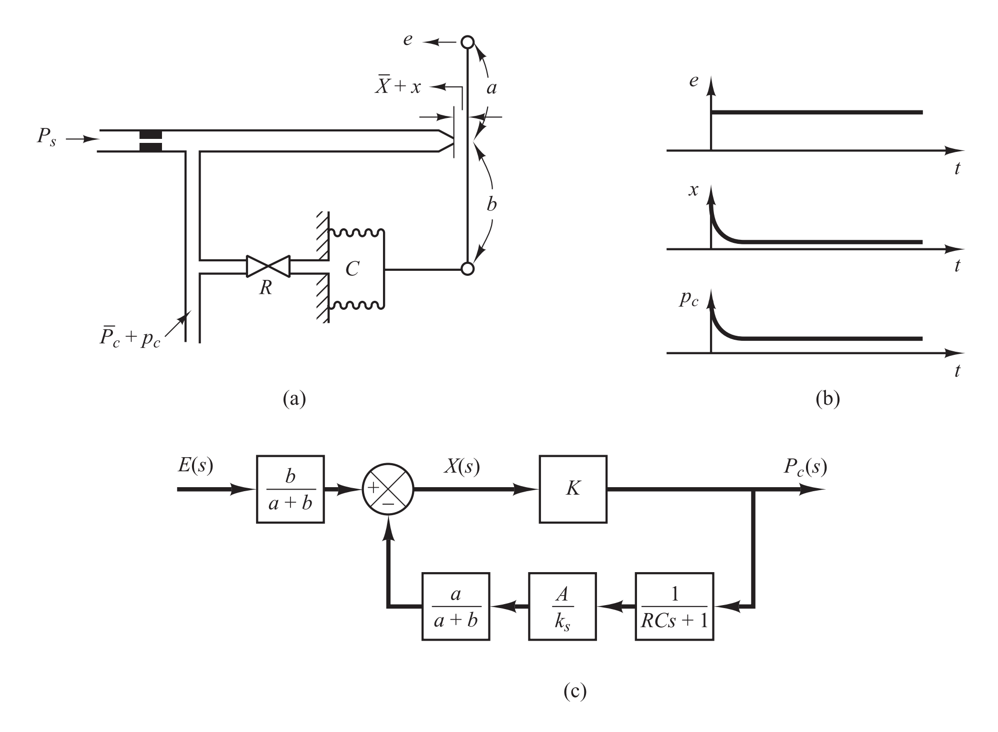


Figura 4-14. (a) Controlador neumático proporcional-derivativo; (b) cambio escalón en e y los cambios asociados en x y p_c frente a t; (c) diagrama de bloques del controlador.

En este caso, el cambio en la presión de control p_c será instantáneo. La restricción R evitará momentáneamente que el fuelle de realimentación detecte el cambio de presión p_c. Por tanto, el fuelle de realimentación no responderá momentáneamente y la válvula con actuador neumático detectará el efecto completo del movimiento de la aleta. Conforme pasa el tiempo, el fuelle de realimentación se expandirá o se contraerá. El cambio en la distancia tobera-aleta x y el cambio en la presión de control p_c, se dibujan frente al tiempo t, como en la Figura 4-14(b). En estado estable, el fuelle de realimentación funciona como un mecanismo de realimentación ordinario. La curva de p_c frente a t muestra claramente que este controlador es de tipo proporcional-derivativo.

La Figura 4-14(c) muestra el diagrama de bloques que corresponde a este controlador neumático. En el diagrama de bloques, K es una constante, A es el área del fuelle y k_s es la constante del resorte equivalente del fuelle. La función de transferencia entre p_c y e se obtiene a partir del diagrama de bloques, del modo siguiente:

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}K}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\dfrac{A}{k_s}\dfrac{1}{RCs+1}}$$

En semejante controlador, la ganancia de lazo $|KaA/[(a+b)k_s(RCs+1)]|$ suele ser mucho más grande que la unidad. Por tanto, la función de transferencia $P_c(s)/E(s)$ se simplifica para producir

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)$$

donde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}, \qquad T_d = RC$$

Por tanto, el retraso en la realimentación negativa, o la función de transferencia $1/(RCs+1)$ en el camino de realimentación, modifica el controlador proporcional a un controlador proporcional-derivativo.

Obsérvese que, si la válvula de realimentación está completamente abierta, la acción de control se vuelve proporcional. Si la válvula de realimentación está completamente cerrada, la acción de control se vuelve proporcional (de encendido y apagado) de banda estrecha.

Obtención de una acción de control neumática proporcional-integral. Considérese el controlador proporcional de la Figura 4-13(a). Suponiendo cambios pequeños en las variables, se demostrará que la adición de un retardo en la realimentación positiva cambia este controlador proporcional a un controlador proporcional-integral, conocido como controlador PI.

Considérese el controlador neumático de la Figura 4-15(a), cuya operación es la siguiente: el fuelle representado por I se conecta a la fuente de presión de control sin ninguna restricción. El fuelle representado por II se conecta a la fuente de presión de control a través de una restricción. Supóngase un cambio escalón pequeño en el error. Esto provocará que la presión trasera en la tobera cambie de manera instantánea. Por ende, también ocurrirá instantáneamente un cambio en la presión de control p_c. Debido a la restricción de la válvula en la trayectoria al fuelle II, habrá un descenso en la presión a través de la válvula. Conforme pasa el tiempo, el aire fluirá a través de la válvula, de un modo tal que el cambio en la presión del fuelle II alcanzará el valor de p_c. Por lo tanto, el fuelle II se expandirá o contraerá, de modo que moverá la aleta una cantidad adicional en la dirección del desplazamiento original e. Esto provocará que la presión trasera p_c en la tobera cambie de forma continua, como se observa en la Figura 4-15(b).

Obsérvese que la acción de control integral en el controlador adopta una forma tal que cancela lentamente la realimentación que aportó originalmente el control proporcional.

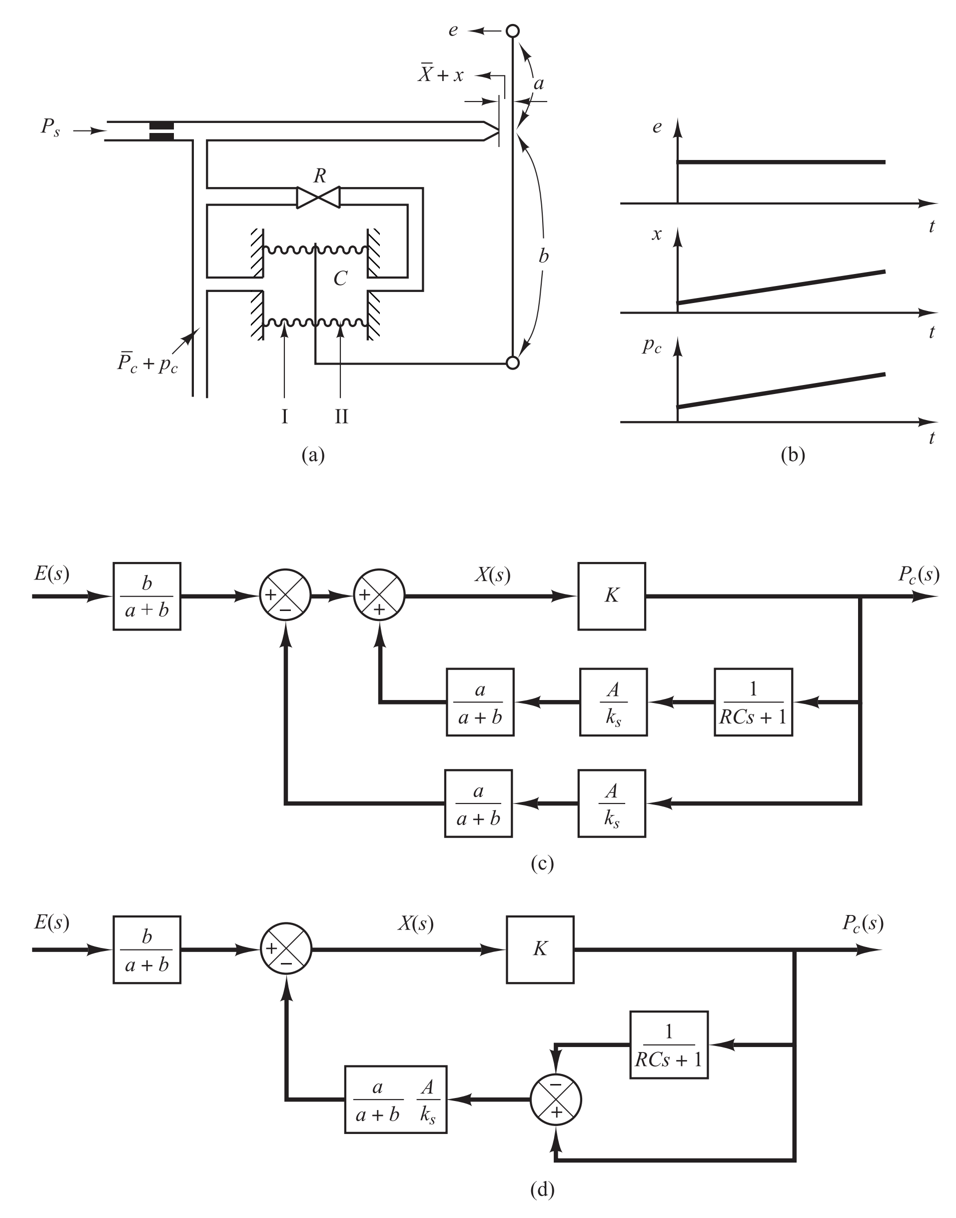


Figura 4-15. (a) Controlador neumático proporcional-integral; (b) cambio escalón en e y los cambios asociados en x y p_c frente a t; (c) diagrama de bloques del controlador; (d) diagrama de bloques simplificado.

La Figura 4-15(c) muestra un diagrama de bloques de este controlador, suponiendo variaciones pequeñas en las variables. Una simplificación de este diagrama de bloques produce la Figura 4-15(d). La función de transferencia de este controlador es

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}\,K}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\,\dfrac{A}{k_s}\left(1 - \dfrac{1}{RCs+1}\right)}$$

donde K es una constante, A es el área del fuelle y k_s es la constante del resorte equivalente del fuelle combinado. Si $|KaARCs/[(a + b)k_s(RCs + 1)]| \gg 1$, lo cual ocurre con regularidad, la función de transferencia se simplifica a

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

donde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}, \qquad T_i = RC$$

Obtención de una acción de control neumática proporcional-integral-derivativa. Una combinación de los controladores neumáticos de las Figuras 4-14(a) y 4-15(a) produce un controlador proporcional-integral-derivativo, conocido como controlador PID. La Figura 4-16(a) muestra un diagrama esquemático de dicho controlador. La Figura 4-16(b) muestra un diagrama de bloques de este controlador en el supuesto de variaciones pequeñas en las variables.

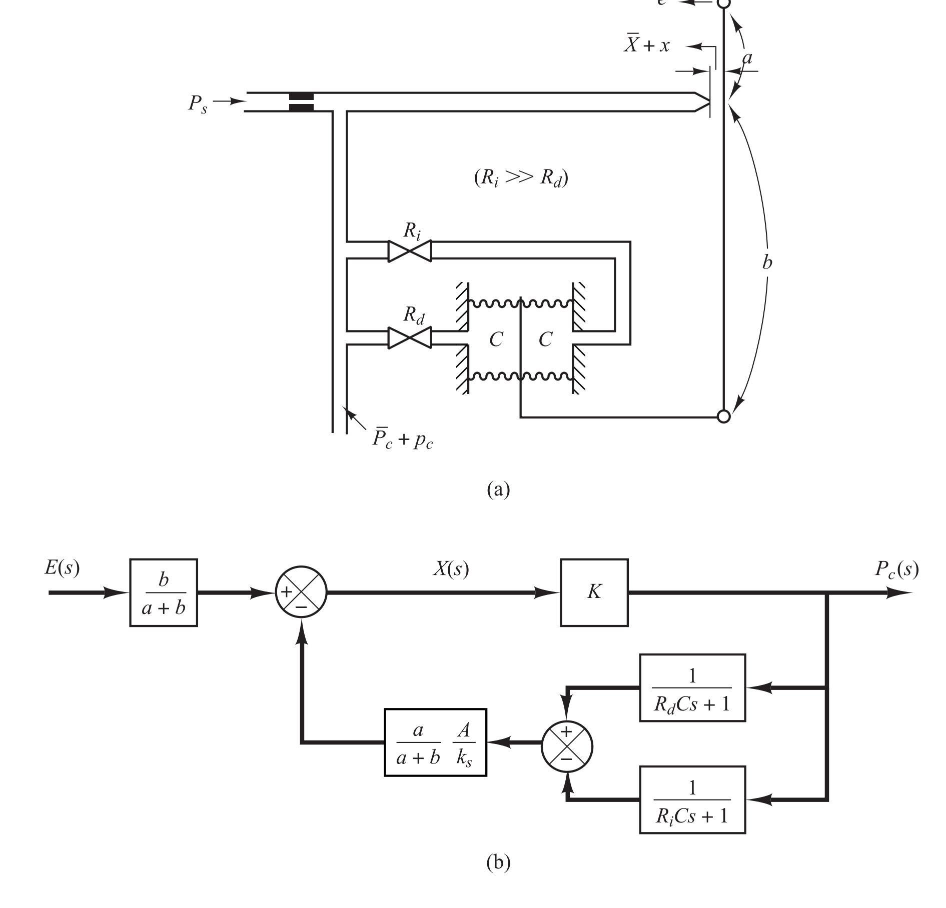


Figura 4-16. (a) Controlador neumático proporcional-integral-derivativo; (b) diagrama de bloques del controlador.

La función de transferencia de este controlador es

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{bK}{a+b}}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\dfrac{A}{k_s}\dfrac{(R_iC - R_dC)s}{(R_dCs+1)(R_iCs+1)}}$$

Si se define

$$T_i = R_iC, \qquad T_d = R_dC$$

y se considera que, bajo una operación normal, $|KaA(T_i - T_d)s/[(a+b)k_s(T_ds+1)(T_is+1)]| \gg 1$ y $T_i \gg T_d$, se obtiene

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} \doteq \frac{bk_s}{aA}\frac{(T_ds+1)(T_is+1)}{(T_i - T_d)s}$$

$$\doteq \frac{bk_s}{aA}\frac{T_dT_is^2 + T_is + 1}{T_is}$$

$$= K_p\left(1 + \frac{1}{T_is} + T_ds\right) \tag{4-24}$$

donde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}$$

La Ecuación (4-24) indica que el controlador de la Figura 4-16(a) es un controlador proporcional-integral-derivativo (un controlador PID).

4-4 Sistemas hidráulicos

Excepto para los controladores neumáticos de baja presión, rara vez se ha usado el aire comprimido para el control continuo del movimiento de dispositivos que tienen masas significativas sujetas a fuerzas de carga externas. Para estos casos, por lo general se prefieren los controladores hidráulicos.

Sistemas hidráulicos. El uso de la circuitería hidráulica en las máquinas-herramienta, los sistemas de control de aeronaves y operaciones similares se ha extendido debido a factores tales como su positividad, precisión, flexibilidad, una alta razón de peso-potencia, sus rápidos arranques, paro e inversión, que realiza con suavidad y precisión, así como la simplicidad de sus operaciones.

La presión de operación en los sistemas hidráulicos está en algún punto entre 145 y 5000 lb_f/plg^2 (entre 1 y 35 MPa). En algunas aplicaciones especiales, la presión de operación puede subir hasta 10 000 lb_f/plg^2 (70 MPa). Por el mismo requerimiento de potencia, el peso y el tamaño de la unidad hidráulica se reducen a fin de aumentar la presión del suministro. Los sistemas hidráulicos de alta presión proporcionan una fuerza muy grande. Permiten un posicionamiento preciso de acción rápida de cargas pesadas. Es común una combinación de sistemas electrónicos e hidráulicos debido a que así se combinan las ventajas del control electrónico y la potencia hidráulica.

Ventajas y desventajas de los sistemas hidráulicos. Hay ciertas ventajas y desventajas en el uso de los sistemas hidráulicos en lugar de otros. Algunas de las ventajas son las siguientes:

1. El fluido hidráulico funciona como lubricante, además de disipar el calor generado en el sistema hacia un intercambiador de calor conveniente.
2. Los actuadores hidráulicos de un tamaño comparativamente pequeño pueden desarrollar fuerzas o pares grandes.
3. Los actuadores hidráulicos tienen una velocidad de respuesta más alta para arranques, paros e inversiones de velocidad rápidos.
4. Los actuadores hidráulicos operan sin daño bajo condiciones continuas, intermitentes, invertidas y de pérdida de velocidad.
5. La disponibilidad de actuadores lineales y rotacionales aporta flexibilidad al diseño.
6. Debido a los bajos escapes en los actuadores hidráulicos, la disminución de la velocidad cuando se aplica una carga es pequeña.

Sin embargo, varias desventajas tienden a limitar su uso.

1. No es tan sencillo contar con la potencia hidráulica como con la potencia eléctrica.
2. El costo de un sistema hidráulico puede ser más alto que el de un sistema eléctrico comparable que realice una función similar.
3. Existen riesgos de incendio y explosión, a menos que se usen fluidos resistentes al fuego.
4. Debido a que es difícil mantener un sistema hidráulico libre de escapes, el sistema tiende a ser complicado.
5. El aceite contaminado puede provocar fallos en el funcionamiento adecuado de un sistema hidráulico.
6. Como resultado de las características no lineales y otras condiciones complejas implícitas, el diseño de los sistemas hidráulicos complejos es muy complicado.
7. Por lo general, los circuitos hidráulicos tienen características deficientes de amortiguamiento. Si un circuito hidráulico no se diseña de forma adecuada, pueden ocurrir o desaparecer fenómenos inestables, dependiendo de las condiciones de operación.

Comentarios. Es necesaria una atención especial a fin de asegurar que el sistema hidráulico sea estable y satisfactorio en todas las condiciones de operación. Como la viscosidad del fluido hidráulico afecta de manera significativa los efectos del amortiguamiento y la fricción de los circuitos hidráulicos, deben realizarse pruebas de estabilidad a la temperatura de operación más alta posible.

Obsérvese que casi todos los sistemas hidráulicos son no lineales. Sin embargo, en ocasiones es posible linealizar los sistemas no lineales con el fin de reducir su complejidad y permitir soluciones suficientemente precisas para gran parte de los propósitos. La Sección 2-7 contiene una técnica de linealización útil para tratar los sistemas no lineales.

Servosistema hidráulico. La Figura 4-17(a) muestra un servomotor hidráulico. Es esencialmente un amplificador de potencia hidráulico controlado por una válvula piloto y un actuador. La válvula piloto es balanceada, en el sentido de que las fuerzas de presión que actúan sobre ella están balanceadas. Una salida de potencia muy grande se controla mediante una válvula piloto, que se posiciona con muy poca potencia.

En la práctica, los puertos que aparecen en la Figura 4-17(a) suelen fabricarse más anchos que las válvulas correspondientes. En este caso, siempre hay un escape a través de las válvulas.

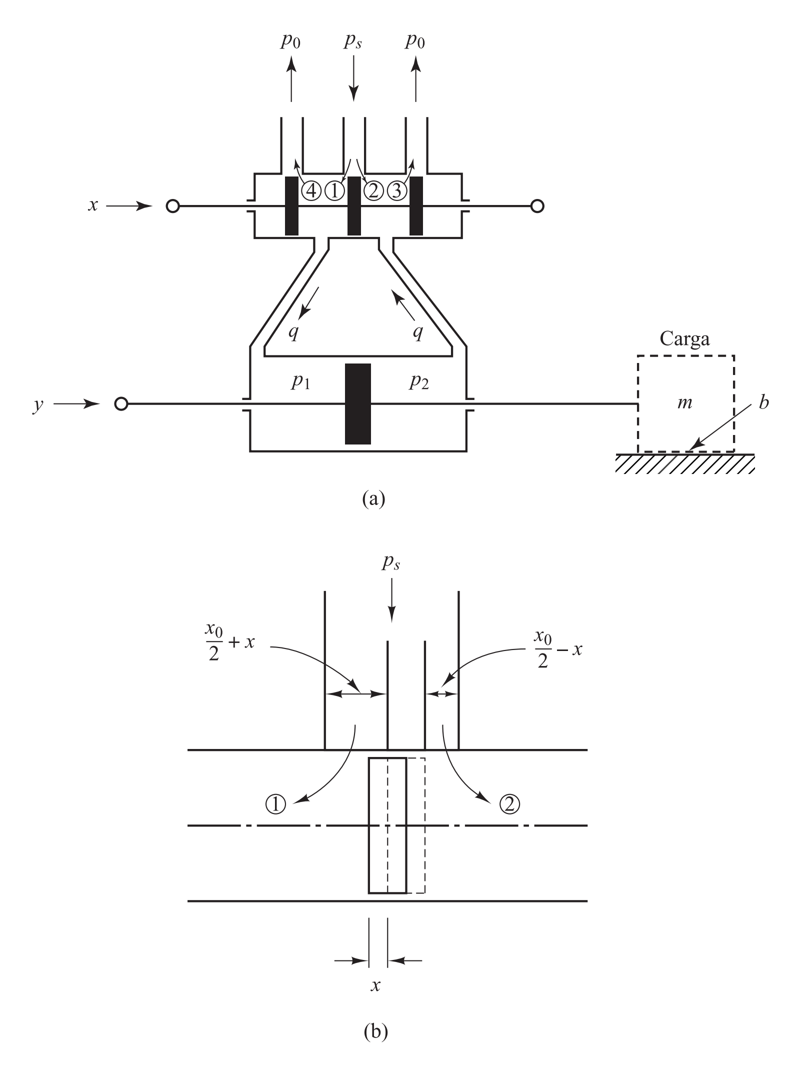


Figura 4-17. (a) Servosistema hidráulico; (b) diagrama ampliado del área del orificio de la válvula.

Tal escape mejora tanto la sensibilidad como la linealidad del servomotor hidráulico. En el análisis siguiente se supone que los puertos se han hecho más anchos que las válvulas, es decir, que las válvulas están subajustadas. [Obsérvese que, en ocasiones, una señal intermitente, señal de alta frecuencia de amplitud muy pequeña (con respecto al desplazamiento máximo de la válvula), está sobreimpuesta al movimiento de la válvula piloto. Esto también mejora la sensibilidad y la linealidad. Asimismo, en este caso hay un escape a través de la válvula.]

Se aplicará la técnica de linealización que se presentó en la Sección 2-7 para obtener un modelo matemático linealizado del servomotor hidráulico. Se supone que la válvula está subajustada, que es simétrica y que admite un fluido hidráulico sometido a una presión alta dentro de un cilindro de potencia que contiene un pistón grande, a fin de que se establezca una fuerza hidráulica grande con el propósito de mover una carga.

En la Figura 4-17(b) se tiene un diagrama ampliado del área del orificio de la válvula. Se definen las áreas de los orificios de la válvula en los puertos 1, 2, 3, 4, como A_1, A_2, A_3, A_4, respectivamente. Asimismo, se definen los caudales a través de los puertos 1, 2, 3, 4, como q_1,

q_2, q_3, q_4, respectivamente. Obsérvese que, como la válvula es simétrica, $A_1 = A_3$ y $A_2 = A_4$. Si se supone que el desplazamiento x es pequeño, se obtiene

$$A_1 = A_3 = k\left(\frac{x_0}{2} + x\right)$$

$$A_2 = A_4 = k\left(\frac{x_0}{2} - x\right)$$

donde k es una constante.

Además, se supondrá que la presión de retorno p_o en la línea de retorno es pequeña y, por tanto, que puede pasarse por alto. Entonces, remitiéndose a la Figura 4-17(a), los caudales a través de los orificios de la válvula son

$$q_1 = c_1 A_1 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}\,(p_s - p_1)} = C_1 \sqrt{p_s - p_1}\left(\frac{x_0}{2} + x\right)$$

$$q_2 = c_2 A_2 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}\,(p_s - p_2)} = C_2 \sqrt{p_s - p_2}\left(\frac{x_0}{2} - x\right)$$

$$q_3 = c_1 A_3 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}\,(p_2 - p_0)} = C_1 \sqrt{p_2 - p_0}\left(\frac{x_0}{2} + x\right) = C_1 \sqrt{p_2}\left(\frac{x_0}{2} + x\right)$$

$$q_4 = c_2 A_4 \sqrt{\frac{2g}{\gamma}\,(p_1 - p_0)} = C_2 \sqrt{p_1 - p_0}\left(\frac{x_0}{2} - x\right) = C_2 \sqrt{p_1}\left(\frac{x_0}{2} - x\right)$$

donde $C_1 = c_1 k \sqrt{2g/\gamma}$ y $C_2 = c_2 k \sqrt{2g/\gamma}$, y γ es el peso específico, que se obtiene mediante $\gamma = \rho \mathrm{g}$, donde ρ es la densidad de la masa y g es la aceleración de la gravedad. El caudal q para el lado izquierdo del pistón de potencia es

$$q = q_1 - q_4 = C_1 \sqrt{p_s - p_1}\left(\frac{x_0}{2} + x\right) - C_2 \sqrt{p_1}\left(\frac{x_0}{2} - x\right) \tag{4-25}$$

El caudal del lado derecho del pistón de potencia al drenaje es igual a este q y se obtiene mediante

$$q = q_3 - q_2 = C_1 \sqrt{p_2}\left(\frac{x_0}{2} + x\right) - C_2 \sqrt{p_s - p_2}\left(\frac{x_0}{2} - x\right)$$

En el análisis presente se supone que el fluido es incompresible. Puesto que la válvula es simétrica se tiene que $q_1 = q_3$ y $q_2 = q_4$. Igualando q_1 y q_3, se obtiene

$$p_s - p_1 = p_2$$

o bien

$$p_s = p_1 + p_2$$

Si se define la diferencia de presión a través del pistón de potencia como Δp o

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

entonces

$$p_1 = \frac{p_s + \Delta p}{2}, \qquad p_2 = \frac{p_s - \Delta p}{2}$$

Para la válvula simétrica de la Figura 4-17(a), la presión en cada lado del pistón de potencia es $(1/2)p_s$ cuando no se aplica una carga, o $\Delta p = 0$. Conforme se desplaza la válvula de bobina, la presión en una línea aumenta, a medida que la presión en la otra línea disminuye en la misma cantidad.

En términos de p_s y Δp, se vuelve a escribir el caudal q obtenido mediante la Ecuación (4-25), como

$$q = q_1 - q_4 = C_1 \sqrt{\frac{p_s - \Delta p}{2}} \left(\frac{x_0}{2} + x\right) - C_2 \sqrt{\frac{p_s + \Delta p}{2}} \left(\frac{x_0}{2} - x\right)$$

Considerando que la presión de suministro p_s es constante, el caudal q se vuelve a escribir como una función del desplazamiento de la válvula x y la diferencia de presión Δp, o bien

$$q = C_1 \sqrt{\frac{p_s - \Delta p}{2}} \left(\frac{x_0}{2} + x\right) - C_2 \sqrt{\frac{p_s + \Delta p}{2}} \left(\frac{x_0}{2} - x\right) = f(x, \Delta p)$$

Aplicando la técnica de linealización para este caso presentada en la Sección 2-7, la ecuación linealizada alrededor del punto $x = \bar{x}$, $\Delta p = \Delta\bar{p}$, $q = \bar{q}$ es

$$q - \bar{q} = a(x - \bar{x}) + b(\Delta p - \Delta\bar{p}) \tag{4-26}$$

donde

$$\bar{q} = f(\bar{x}, \Delta\bar{q})$$

$$a = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x = \bar{x},\ \Delta p = \Delta\bar{p}} = C_1 \sqrt{\frac{p_s - \Delta\bar{p}}{2}} + C_2 \sqrt{\frac{p_s + \Delta\bar{p}}{2}}$$

$$b = \left.\frac{\partial f}{\partial \Delta p}\right|_{x = \bar{x},\ \Delta p = \Delta\bar{p}} = -\left[\frac{C_1}{2\sqrt{2}\sqrt{p_s - \Delta\bar{p}}}\left(\frac{x_0}{2} + \bar{x}\right) + \frac{C_2}{2\sqrt{2}\sqrt{p_s + \Delta\bar{p}}}\left(\frac{x_0}{2} - \bar{x}\right)\right] < 0$$

Los coeficientes a y b se denominan *coeficientes de válvula*. La Ecuación (4-26) es un modelo matemático linealizado de la válvula de bobina cerca de un punto de operación $x = \bar{x}$, $\Delta p = \Delta\bar{p}$, $q = \bar{q}$. Los valores de los coeficientes de válvula a y b varían con el punto de operación. Obsérvese que $\partial f/\partial \Delta p$ es negativo y, por tanto, b es negativo.

Como el punto de operación normal es aquel en el que $\bar{x} = 0$, $\Delta\bar{p} = 0$, $\bar{q} = 0$, cerca del punto de operación normal, la Ecuación (4-26) se convierte en

$$q = K_1 x - K_2 \Delta p \tag{4-27}$$

donde

$$K_1 = (C_1 + C_2)\sqrt{\frac{p_s}{2}} > 0$$

$$K_2 = (C_1 + C_2)\frac{x_0}{4\sqrt{2}\sqrt{p_s}} > 0$$

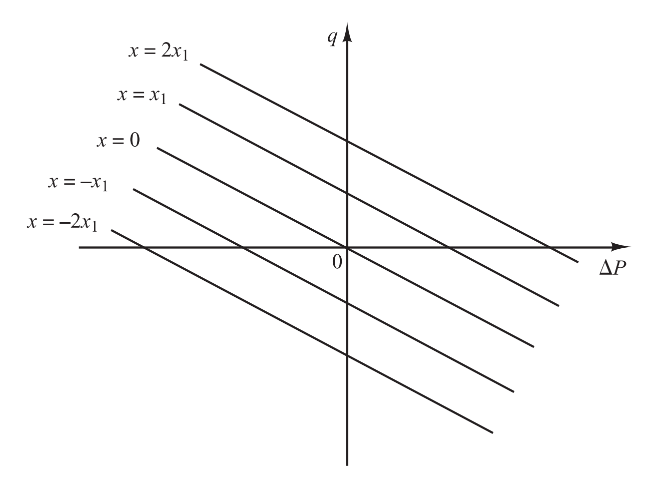


Figura 4-18. Curvas características del servomotor hidráulico linealizado.

La Ecuación (4-27) es un modelo matemático linealizado de la válvula de bobina cerca del origen ($\bar{x} = 0$, $\Delta\bar{p} = 0$, $\bar{q} = 0$). Obsérvese que, en este tipo de sistema, es más importante la región cercana al origen porque la operación del sistema, por lo general, ocurre cerca de este punto.

La Figura 4-18 muestra esta relación linealizada entre q, x y ΔP. Las líneas rectas son las curvas características del servomotor hidráulico linealizado. Esta familia de curvas consiste en líneas rectas paralelas parametrizadas por x.

En este análisis, se supone que las fuerzas reactivas de carga son pequeñas, de forma que el escape y la compresibilidad del aceite se pueden pasar por alto.

Refiriéndose a la Figura 4-17(a), se observa que el caudal de aceite q durante un tiempo dt es igual a la potencia del desplazamiento del pistón dy veces el área del pistón A veces la densidad del aceite ρ. Así, se obtiene

$$A\rho\, dy = q\, dt$$

Obsérvese que para un caudal q dado cuanto más grande sea el área del pistón A, menor será la velocidad dy/dt. Por tanto, si el área A del pistón se hace menor, las otras variables permanecen constantes, pero la velocidad dy/dt se hará mayor. Además, un aumento en el caudal q producirá un aumento en la velocidad de la potencia del pistón, lo que originará un tiempo de respuesta menor.

La Ecuación (4-27) se puede escribir ahora como

$$\Delta P = \frac{1}{K_2}\left(K_1 x - A\rho \frac{dy}{dt}\right)$$

La fuerza desarrollada por la potencia del pistón es igual a la diferencia de presión ΔP veces el área del pistón A o bien

$$\text{Fuerza desarrollada por el pistón} = A\,\Delta P$$

$$= \frac{A}{K_2}\left(K_1 x - A\rho \frac{dy}{dt}\right)$$

Para una fuerza máxima dada, si la diferencia de presión es suficientemente alta, el área del pistón, o el volumen de aceite en el cilindro, se pueden hacer pequeños. Por lo tanto, para minimizar el peso del controlador, se debe proporcionar una presión suficientemente elevada.

Supóngase que la potencia del pistón mueve una carga que consiste en una masa y una fuerza viscosa. Entonces, la fuerza desarrollada por la potencia del pistón se aplica a la carga masa y fricción, y se obtiene

$$m\ddot{y} + b\dot{y} = \frac{A}{K_2}(K_1 x - A\rho\dot{y})$$

o bien

$$m\ddot{y} + \left(b + \frac{A^2\rho}{K_2}\right)\dot{y} = \frac{AK_1}{K_2}x \tag{4-28}$$

donde m es la masa de la carga y b el coeficiente de fricción viscosa.

Supóngase que el desplazamiento de la válvula piloto x es la entrada y el desplazamiento del pistón de potencia y es la salida, a partir de la Ecuación (4-28) se observa que la función de transferencia para el servomotor hidráulico es

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s\left[\left(\frac{mK_2}{AK_1}\right)s + \frac{bK_2}{AK_1} + \frac{A\rho}{K_1}\right]}$$

$$= \frac{K}{s(Ts + 1)} \tag{4-29}$$

donde

$$K = \frac{1}{\frac{bK_2}{AK_1} + \frac{A\rho}{K_1}} \quad \text{y} \quad T = \frac{mK_2}{bK_2 + A^2\rho}$$

En la Ecuación (4-29) se observa que la función de transferencia es de segundo orden. Si el cociente $mK_2/(bK_2 + A^2\rho)$ es despreciable o lo es la constante de tiempo T, la función de transferencia $Y(s)/X(s)$ se puede simplificar de la forma

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s}$$

Obsérvese que un análisis más detallado muestra que si se tienen en cuenta el escape de aceite, la compresibilidad (incluyendo los efectos del aire disuelto), la expansión de las tuberías y efectos parecidos, la función de transferencia es

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

donde T_1 y T_2 son constantes de tiempo. De hecho, esas constantes de tiempo dependen del volumen del aceite que opera en el circuito. Cuanto menor sea el volumen, menores serán las constantes de tiempo.

Controladores hidráulicos integrales. El servomotor hidráulico de la Figura 4-19 es un amplificador y actuador de la potencia hidráulica, controlado por una válvula piloto. De forma similar al servosistema hidráulico que se muestra en la Figura 4-17, para masas de carga insignificantes, el servomotor de la Figura 4-19 funciona como un integrador o un controlador integral. Dicho servomotor constituye la base del circuito de control hidráulico.

En el servomotor hidráulico de la Figura 4-19, la válvula piloto (una válvula de cuatro vías) tiene dos áreas en la bobina. Si el ancho del área es menor que el puerto en el manguito de la válvula, se dice que esta última es *sin solape*. Las válvulas *con solape* son más anchas que el puerto. Una válvula con *solape cero* tiene un área cuyo ancho es idéntico al del puerto. (Si la válvula piloto es una válvula con solape cero, el análisis de los servomotores hidráulicos se simplifica.)

En el análisis presente, se supone que el fluido hidráulico es incompresible y que la fuerza de inercia del pistón de potencia y de la carga es insignificante en comparación con la fuerza hidráulica del pistón de potencia. También se supone que la válvula piloto es una válvula con solape cero y que la velocidad del flujo del aceite es proporcional al desplazamiento de la válvula piloto.

La operación de este servomotor hidráulico es la siguiente. Si la entrada x mueve la válvula piloto a la derecha, se descubre el puerto II y, por tanto, se introduce aceite a alta presión en el lado derecho del pistón de potencia. Como el puerto I está conectado al puerto de drenaje, el aceite del lado izquierdo del pistón de potencia regresa al drenaje. El aceite que fluye hacia el cilindro de potencia está a alta presión; el aceite que fluye fuera del cilindro de potencia hacia el drenaje está a baja presión. La diferencia resultante en la presión de ambos lados del pistón de potencia provocará que se mueva a la izquierda.

Obsérvese que el caudal de aceite q(kg/seg) por dt(seg) es igual al desplazamiento del pistón de potencia dy(m) por el área del pistón A(m^2) por la densidad del aceite ρ(kg/m^3). Por tanto,

$$A\rho \, dy = q \, dt \tag{4-30}$$

Debido a la suposición de que el caudal de aceite q es proporcional al desplazamiento x de la válvula piloto, se tiene que

$$q = K_1 x \tag{4-31}$$

donde K_1 es una constante positiva. A partir de las Ecuaciones (4-30) y (4-31) se obtiene

$$A\rho \frac{dy}{dt} = K_1 x$$

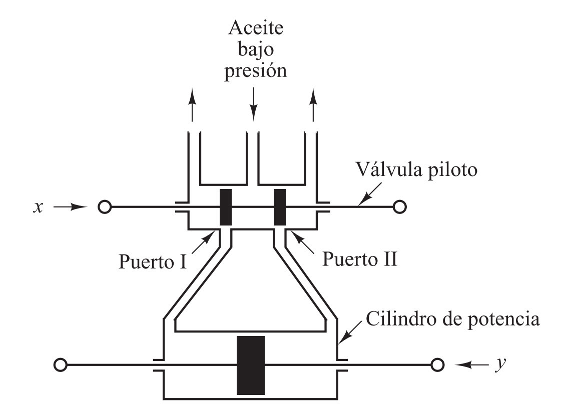


Figura 4-19. Servomotor hidráulico.

La transformada de Laplace de esta última ecuación, suponiendo una condición inicial nula, produce

$$A\rho sY(s) = K_1X(s)$$

o bien

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_1}{A\rho s} = \frac{K}{s}$$

donde $K = K_1/(A\rho)$. Por ende, el servomotor hidráulico de la Figura 4-19 funciona como un controlador integral.

Controladores hidráulicos proporcionales. Se ha mostrado que el servomotor de la Figura 4-19 funciona como un controlador integral. Este servomotor se modifica en un controlador proporcional mediante un enlace de realimentación. Considérese el controlador hidráulico de la Figura 4-20(a). El lado izquierdo de la válvula piloto está unido al lado izquierdo del pistón de potencia mediante un enlace *ABC*. Este enlace es flotante y, por tanto, no se mueve alrededor de un pivote fijo.

En este caso, el controlador opera del modo siguiente. Si la entrada *e* mueve la válvula piloto a la derecha, se descubrirá el puerto II y el aceite a alta presión fluirá a través del puerto II hacia el lado derecho del pistón de potencia e impulsará éste a la izquierda. El pistón de potencia, al moverse a la izquierda, arrastrará el enlace de realimentación *ABC* con él, con lo cual moverá la válvula piloto a la izquierda. Esta acción continúa hasta que el pistón del piloto cubre otra vez los puertos I y II. En la Figura 4-20(b) se dibuja un diagrama de bloques del sistema. La función de transferencia entre $Y(s)$ y $E(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}\dfrac{K}{s}}{1 + \dfrac{K}{s}\dfrac{a}{a+b}}$$

Considerando que, en condiciones de operación normales, se tiene que $|Ka/[s(a+b)]| \gg 1$, esta última ecuación se simplifica a

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a} = K_p$$

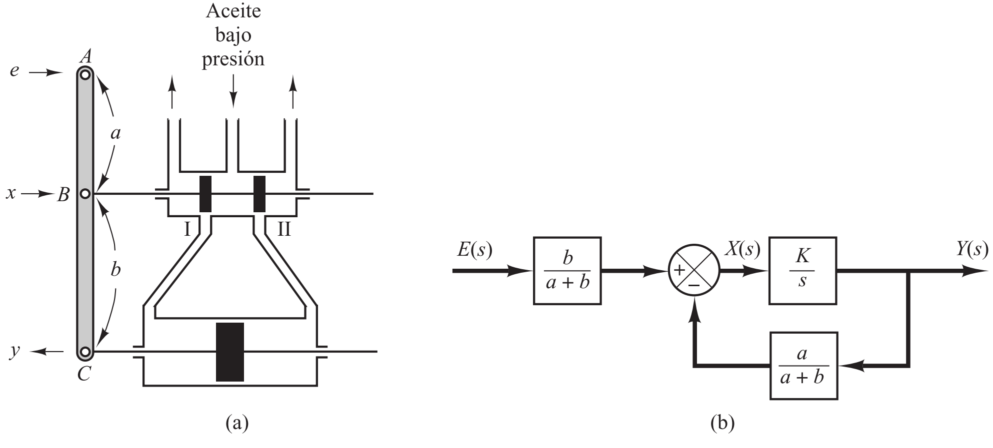


Figura 4-20. (a) Servomotor que actúa como un controlador proporcional; (b) diagrama de bloques del servomotor.

La función de transferencia entre y y e se convierte en una constante. Por lo tanto, el controlador hidráulico de la Figura 4-20(a) funciona como un controlador proporcional, cuya ganancia es K_p. Esta ganancia se ajusta modificando de manera efectiva la razón b/a de la palanca. (El mecanismo de ajuste no se muestra en el diagrama.)

De esta manera, se ha visto que la adición de un enlace de realimentación hace que el servomotor hidráulico funcione como un controlador proporcional.

Amortiguadores. El amortiguador de la Figura 4-21(a) funciona como un elemento de diferenciación. Supóngase que se introduce un desplazamiento escalón a la posición del pistón y. En este caso, el desplazamiento z iguala momentáneamente a y. Sin embargo, debido a la fuerza del resorte, el aceite fluirá a través de la resistencia R y el cilindro regresará a la posición original. Las curvas y frente a t y z frente a t se muestran en la Figura 4-21(b).

Se va a obtener la función de transferencia entre el desplazamiento z y el desplazamiento y. Se definen las presiones existentes en ambos lados del pistón como $P_1(\text{lb}_f/\text{plg}^2)$ y $P_2(\text{lb}_f/\text{plg}^2)$, respectivamente. Supóngase que la fuerza de inercia implícita es insignificante. Después, la fuerza que funciona sobre el pistón debe equilibrar la fuerza del resorte. Por tanto,

$$A(P_1 - P_2) = kz$$

donde A = área de pistón, plg^2
k = constante del resorte, lb_f/plg

El caudal q se obtiene mediante

$$q = \frac{P_1 - P_2}{R}$$

donde q = caudal a través de la restricción, lb/seg
R = resistencia al flujo en la restricción, $\text{lb}_f\text{-seg/plg}^2\text{-lb}$

Como el caudal a través de la restricción durante dt segundos debe ser igual al cambio en la masa del aceite del lado izquierdo del pistón durante los mismos dt segundos, se obtiene

$$q\,dt = A\rho(dy - dz)$$

donde ρ = densidad, lb/plg^3. (Se supone que el fluido es incompresible o que ρ = constante.) Esta última ecuación puede reescribirse como

$$\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = \frac{q}{A\rho} = \frac{P_1 - P_2}{RA\rho} = \frac{kz}{RA^2\rho}$$

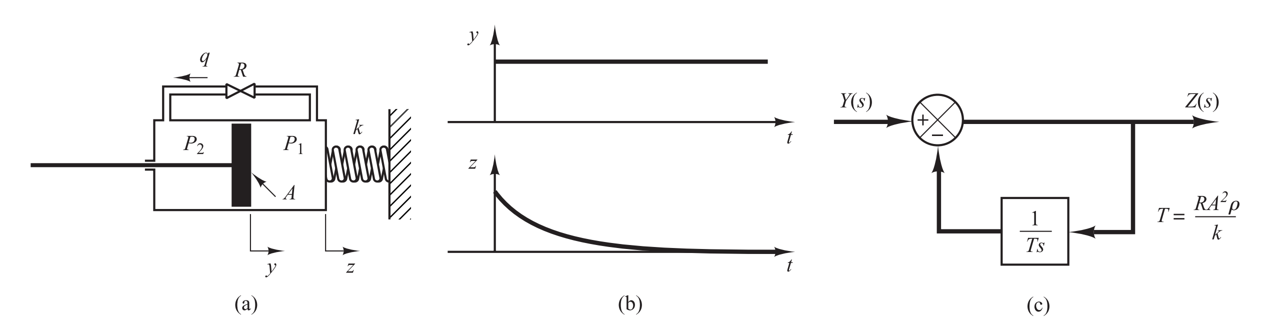


Figura 4-21. (a) Amortiguador; (b) cambio escalón en y y el cambio asociado en z frente a t; (c) diagrama de bloques del amortiguador.

o bien

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} + \frac{kz}{RA^2\rho}$$

Tomando las transformadas de Laplace de ambos miembros de esta última ecuación, y suponiendo condiciones iniciales nulas, se obtiene

$$sY(s) = sZ(s) + \frac{k}{RA^2\rho} Z(s)$$

Por tanto, la función de transferencia de este sistema se convierte en

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{s}{s + \dfrac{k}{RA^2\rho}}$$

Sea $RA^2\rho/k = T$. (Obsérvese que $RA^2\rho/k$ tiene dimensiones de tiempo.) Entonces

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{Ts}{Ts + 1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{Ts}}$$

Claramente, el amortiguador es un elemento diferenciador. La Figura 4-21(c) muestra una representación del diagrama de bloques para este sistema.

Obtención de una acción de control hidráulica proporcional-integral. La Figura 4-22(a) muestra un diagrama esquemático de un controlador hidráulico proporcional-integral. La Figura 4-22(b) es un diagrama de bloques del mismo. La función de transferencia $Y(s)/E(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}\dfrac{K}{s}}{1 + \dfrac{Ka}{a+b}\dfrac{T}{Ts+1}}$$

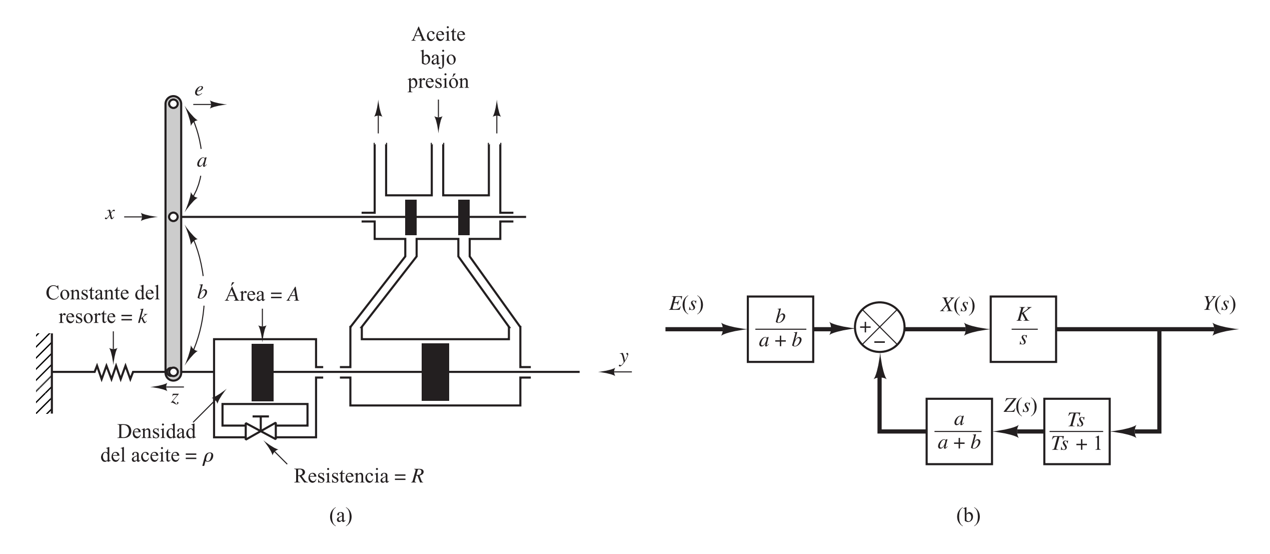


Figura 4-22. (a) Diagrama esquemático de un controlador hidráulico proporcional-integral; (b) diagrama de bloques del controlador.

En un controlador semejante, bajo una operación normal, $|KaT/[(a + b)(Ts + 1)]| \gg 1$, con lo que resulta que

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

donde

$$K_p = \frac{b}{a}, \qquad T_i = T = \frac{RA^2\rho}{k}$$

Por lo tanto, el controlador de la Figura 4-22(a) es un controlador proporcional-integral (un controlador PI).

Obtención de una acción de control hidráulica proporcional-derivativa. La Figura 4-23(a) muestra un diagrama esquemático de un controlador hidráulico proporcional derivativo. Los cilindros están fijos en el espacio y los pistones se mueven. Para este sistema, obsérvese que

$$k(y - z) = A(P_2 - P_1)$$

$$q = \frac{P_2 - P_1}{R}$$

$$q\,dt = \rho A\,dz$$

Por tanto

$$y = z + \frac{A}{k}qR = z + \frac{RA^2\rho}{k}\frac{dz}{dt}$$

o bien

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

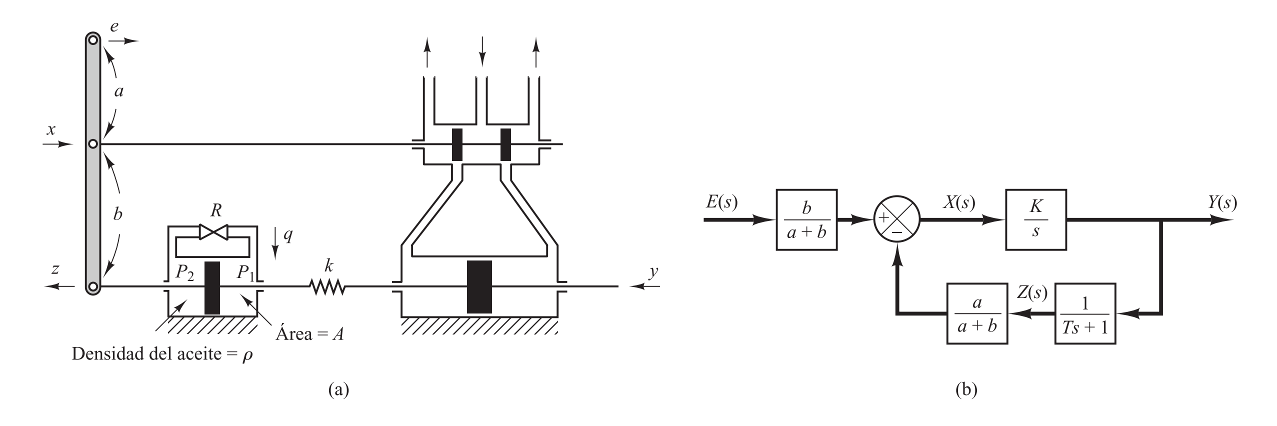


Figura 4-23. (a) Diagrama esquemático de un controlador hidráulico proporcional-derivativo; (b) diagrama de bloques del controlador.

donde

$$T = \frac{RA^2\rho}{k}$$

La Figura 4-23(b) muestra un diagrama de bloques para este sistema. A partir del diagrama de bloques, la función de transferencia $Y(s)/E(s)$ se obtiene como

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}\dfrac{K}{s}}{1 + \dfrac{a}{a+b}\dfrac{K}{s}\dfrac{1}{Ts+1}}$$

Bajo una operación normal, se tiene que $|aK/[(a+b)s(Ts+1)]| \gg 1$. Por tanto,

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = K_p(1 + Ts)$$

donde

$$K_p = \frac{b}{a}, \qquad T = \frac{RA^2\rho}{k}$$

De este modo, el controlador de la Figura 4-23(a) es un controlador proporcional-derivativo (un controlador PD).

Obtención de una acción de control hidráulica proporcional-integral-derivativa. La Figura 4-24 muestra un diagrama esquemático de un controlador hidráulico proporcional-integral-derivativo. Es una combinación de un controlador proporcional-integral y un controlador proporcional-derivativo.

Si los dos amortiguadores son idénticos, la función de transferencia $Z(s)/Y(s)$ se puede obtener como

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{T_1 s}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + 2T_2)s + 1}$$

(Para el cálculo de la función de transferencia, consúltese el Problema **A-4-9**.)

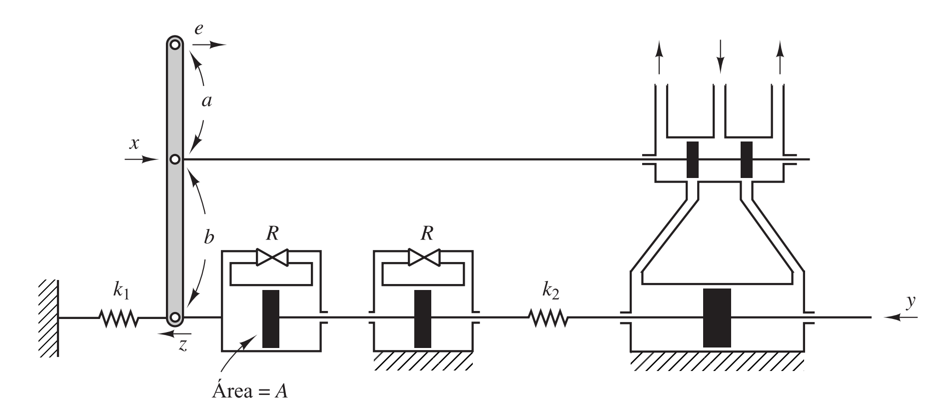


Figura 4-24. Diagrama esquemático de un controlador hidráulico proporcional-integral-derivativo.

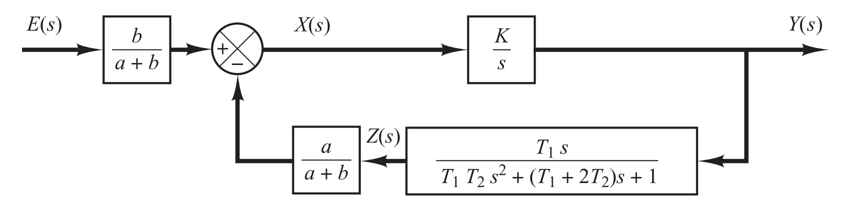


Figura 4-25. Diagrama de bloques del sistema mostrado en la Figura 4-24.

En la Figura 4-25 se muestra un diagrama de bloques para este sistema. La función de transferencia $Y(s)/E(s)$ se puede obtener como

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a+b}\,\frac{\dfrac{K}{s}}{1 + \dfrac{a}{a+b}\,\dfrac{K}{s}\,\dfrac{T_1 s}{T_1T_2s^2 + (T_1 + 2T_2)s + 1}}$$

En condiciones normales de operación del sistema se tiene

$$\left|\frac{a}{a+b}\,\frac{K}{s}\,\frac{T_1 s}{T_1T_2s^2 + (T_1 + 2T_2)s + 1}\right| \gg 1$$

De donde

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a}\,\frac{T_1T_2s^2 + (T_1 + 2T_2)s + 1}{T_1 s}$$

$$= K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

donde

$$K_p = \frac{b}{a}\,\frac{T_1 + 2T_2}{T_1}, \qquad K_i = \frac{b}{a}\,\frac{1}{T_1}, \qquad K_d = \frac{b}{a}\,T_2$$

Por lo tanto, el controlador que se muestra en la Figura 4-24 es un controlador proporcional-integral-derivativo (controlador PID).

4-5 Sistemas térmicos

Los sistemas térmicos son aquellos que involucran la transferencia de calor de una sustancia a otra. Estos sistemas se analizan en términos de resistencia y capacitancia, aunque la capacitancia térmica y la resistencia térmica tal vez no se representen con precisión como elementos de parámetros concentrados, como, por lo general, están distribuidos en todas las sustancias. Para lograr análisis precisos, deben utilizarse modelos de parámetros distribuidos. Sin embargo, para simplificar el análisis, aquí se supondrá que un sistema térmico se representa mediante un modelo de parámetros concentrados, que las sustancias que se caracterizan por una resistencia al flujo de calor tienen una capacitancia térmica insignificante y que las sustancias que se caracterizan por una capacitancia térmica tienen una resistencia insignificante al flujo de calor.

El calor fluye de una sustancia a otra de tres formas diferentes: por conducción, por convección y por radiación. Aquí sólo se considerarán la conducción y la convección. (La transferencia de calor por radiación sólo se aprecia si la temperatura del emisor es muy alta en comparación con la del receptor. La mayor parte de los procesos térmicos en los sistemas de control de procesos no involucran transferencia de calor por radiación.)

Para la transferencia de calor por conducción o convección,

$$q = K\,\Delta\theta$$

donde q = flujo de calor, kcal/seg

$\Delta\theta$ = diferencia de temperatura, °C

K = coeficiente, kcal/seg °C

el coeficiente K se obtiene mediante

$$K = \frac{kA}{\Delta X}, \qquad \text{por conducción}$$

$$= HA, \qquad \text{por convección}$$

donde k = conductividad térmica, kcal/m seg °C

A = área normal para flujo de calor, m^2

ΔX = espesor del conductor, m

H = coeficiente de convección, kcal/m^2 seg °C

Resistencia y capacitancia térmicas. La resistencia térmica R para la transferencia de calor entre dos sustancias se define del modo siguiente:

$$R = \frac{\text{cambio en la diferencia de temperatura, °C}}{\text{cambio en el flujo de calor, kcal/seg}}$$

La resistencia térmica para una transferencia de calor por conducción o por convección se obtiene mediante

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{1}{K}$$

Como los coeficientes de conductividad y convección térmica son casi constantes, la resistencia térmica para la conducción o la convección es constante.

La capacitancia térmica C se define mediante

$$C = \frac{\text{cambio en el calor almacenado, kcal}}{\text{cambio en la temperatura, °C}}$$

o bien

$$C = mc$$

donde m = masa de la sustancia considerada, kg

c = calor específico de la sustancia, kcal/kg °C

Sistemas térmicos. Considérese el sistema que aparece en la Figura 4-26(a). Se supone que el tanque está aislado para eliminar las pérdidas de calor hacia el aire circundante. También se supone que no hay almacenamiento de calor en el aislamiento y que el líquido del tanque está perfectamente mezclado, por lo que tiene una temperatura estable. De este modo, se usa una sola temperatura para describir la del líquido en el tanque y la del líquido que sale.

Sean

$\bar{\Theta}_i$ = temperatura en estado estable del líquido que entra, °C

$\bar{\Theta}_o$ = temperatura en estado estable del líquido que sale, °C

G = velocidad de flujo del líquido en estado estable, kg/seg

M = masa del líquido en el tanque, kg

c = calor específico del líquido, kcal/kg °C

R = resistencia térmica, °C seg/kcal

C = capacitancia térmica, kcal/°C

$\bar{H}$ = entrada del flujo de calor en estado estable, kcal/seg

Supóngase que la temperatura del líquido que entra se mantiene constante y que el flujo de calor de entrada al sistema (el calor que proporciona el calefactor) cambia repentinamente de $\bar{H}$ a $\bar{H} + h_i$, donde h_i representa un cambio pequeño en el flujo de calor de entrada. El flujo de calor de salida cambiará, entonces, de forma gradual, de $\bar{H}$ a $\bar{H} + h_o$. La temperatura del líquido que sale también cambiará de $\bar{\Theta}_o$ a $\bar{\Theta}_o + \theta$. Para este caso, h_o, C y R se obtienen, respectivamente, como

$$h_o = Gc\theta$$

$$C = Mc$$

$$R = \frac{\theta}{h_o} = \frac{1}{Gc}$$

La ecuación diferencial para este sistema es

$$C d\theta = (h_i - h_o)\, dt$$

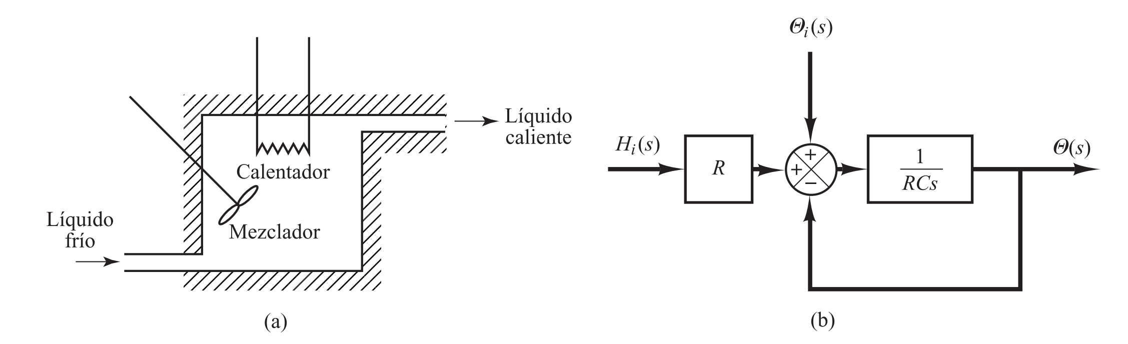


Figura 4-26. (a) Sistema térmico; (b) diagrama de bloques del sistema.

o bien

$$C\frac{d\theta}{dt} = h_i - h_o$$

que puede reescribirse como

$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = Rh_i$$

Obsérvese que la constante de tiempo del sistema es igual a RC o M/G segundos. La función de transferencia que relaciona θ con h_i se obtiene mediante

$$\frac{\Theta(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

donde $\Theta(s) = \mathscr{L}[\theta(t)]$ y $H_i(s) = \mathscr{L}[h_i(t)]$.

En la práctica, la temperatura del líquido que entra puede fluctuar y actuar como una perturbación de carga. (Si se pretende mantener una temperatura de salida constante, puede instalarse un controlador automático que ajuste el flujo de calor de entrada, con el propósito de compensar las fluctuaciones en la temperatura del líquido que entra.) Si la temperatura del líquido que entra cambia repentinamente de $\bar{\Theta}_i$ a $\bar{\Theta}_i + \theta_i$, mientras que el flujo de calor de entrada H y el flujo de líquido G se conservan constantes, el flujo de calor de salida cambiará de $\bar{H}$ a $\bar{H} + h_o$ y la temperatura del líquido que sale cambiará de $\bar{\Theta}_o$ a $\bar{\Theta}_o + \theta$. La ecuación diferencial para este caso es

$$C\,d\theta = (Gc\theta_i - h_o)\,dt$$

o bien

$$C\frac{d\theta}{dt} = Gc\theta_i - h_o$$

que puede reescribirse como

$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i$$

La función de transferencia que relaciona θ y θ_i se obtiene mediante

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

donde $\Theta(s) = \mathscr{L}[\theta(t)]$ y $\Theta_i(s) = \mathscr{L}[\theta_i(t)]$.

Si este sistema térmico está sujeto a cambios en la temperatura del líquido que entra y en el flujo de calor de entrada, en tanto que el flujo del líquido se conserva constante, el cambio θ en la temperatura del líquido que sale se obtiene mediante la ecuación siguiente:

$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_i + Rh_i$$

La Figura 4-26(b) muestra un diagrama de bloques que corresponde a este caso. Obsérvese que el sistema tiene dos entradas.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-4-1. En el sistema de nivel de líquido de la Figura 4-27, suponga que el caudal de salida Q m^3/seg a través de la válvula de salida se relaciona con la altura H m mediante

$$Q = K\sqrt{H} = 0.01\sqrt{H}$$

Suponga también que cuando el caudal de entrada Q_i es 0.015 m^3/seg, la altura permanece constante. Para $t < 0$ el sistema está en estado estacionario ($Q_i = 0.015$ m^3/seg). En $t = 0$ la válvula de entrada se cierra y, por tanto, no hay entrada para $t \geqslant 0$. Encuentre el tiempo necesario para vaciar el tanque a la mitad de la altura original. La capacitancia C del tanque es 2 m^2.

Solución. Cuando la altura es estacionaria, el caudal de entrada es igual al de salida. Por tanto, la altura H_o en $t = 0$ se obtiene a partir de

$$0.015 = 0.01\sqrt{H_o}$$

o bien

$$H_o = 2.25 \text{ m}$$

La ecuación para el sistema para $t > 0$ es

$$-C\,dH = Q\,dt$$

o bien

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{Q}{C} = \frac{-0.01\sqrt{H}}{2}$$

Por tanto,

$$\frac{dH}{\sqrt{H}} = -0.005\,dt$$

Suponga que, en $t = t_1$, $H = 1.125$ m. Integrando ambos miembros de esta última ecuación, se obtiene

$$\int_{2.25}^{1.125} \frac{dH}{\sqrt{H}} = \int_0^{t_1} (-0.005)\,dt = -0.005t_1$$

De aquí se sigue que

$$2\sqrt{H}\Big|_{2.25}^{1.125} = 2\sqrt{1.125} - 2\sqrt{2.25} = -0.005t_1$$

o bien

$$t_1 = 175.7$$

Por tanto, la altura se reduce a la mitad del valor original (2.25 m) en 175.7 seg.

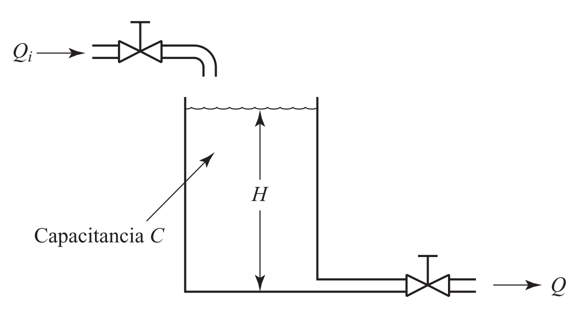


Figura 4-27. Sistema de nivel de líquidos.

A-4-2. Considere el sistema de nivel de líquido de la Figura 4-28. En el sistema, $\bar{Q}_1$ y $\bar{Q}_2$ son caudales de entrada en estado estable y $\bar{H}_1$ y $\bar{H}_2$ son las alturas en estado estable. Las cantidades q_{i1}, q_{i2}, h_1, h_2, q_1 y q_o se consideran pequeñas. Obtenga una representación en el espacio de estados para el sistema cuando h_1 y h_2 son las salidas y q_{i1} y q_{i2} son las entradas.

Solución. Las ecuaciones para el sistema son

$$C_1\, dh_1 = (q_{i1} - q_1)\, dt \tag{4-32}$$

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1 \tag{4-33}$$

$$C_2\, dh_2 = (q_1 + q_{i2} - q_o)\, dt \tag{4-34}$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_o \tag{4-35}$$

La eliminación de q_1 de la Ecuación (4-32), utilizando la Ecuación (4-33), da como resultado

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{C_1}\left(q_{i1} - \frac{h_1 - h_2}{R_1}\right) \tag{4-36}$$

La eliminación de q_1 y q_0 de la Ecuación (4-34), usando las Ecuaciones (4-33) y (4-35), lleva a

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{C_2}\left(\frac{h_1 - h_2}{R_1} + q_{i2} - \frac{h_2}{R_2}\right) \tag{4-37}$$

Defina las variables de estado x_1 y x_2 mediante

$$x_1 = h_1$$
$$x_2 = h_2$$

las variables de entrada u_1 y u_2 mediante

$$u_1 = q_{i1}$$
$$u_2 = q_{i2}$$

y las variables de salida y_1 e y_2 mediante

$$y_1 = h_1 = x_1$$
$$y_2 = h_2 = x_2$$

Entonces las Ecuaciones (4-36) y (4-37) se escriben como

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1 C_1} x_1 + \frac{1}{R_1 C_1} x_2 + \frac{1}{C_1} u_1$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{R_1 C_2} x_1 - \left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2}\right) x_2 + \frac{1}{C_2} u_2$$

Figura 4-28. Sistema de nivel de líquidos.

En la forma de la representación matricial estándar, se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C_1} & \dfrac{1}{R_1C_1} \\ \dfrac{1}{R_1C_2} & -\left(\dfrac{1}{R_1C_2} + \dfrac{1}{R_2C_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

que es la ecuación de estado, y

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

que es la ecuación de salida.

A-4-3. El valor de la constante del gas para cualquier gas se determina a partir de observaciones experimentales precisas de valores simultáneos de p, v y T.

Obtenga la constante del gas R_{aire} para el aire. Observe que a 32 °F y 14.7 psia, el volumen específico del aire es de 12.39 ft^3/lb. A continuación obtenga la capacitancia de un recipiente a presión de 20 ft^3 que contiene aire a 160 °F. Suponga que el proceso de expansión es isotérmico.

Solución.

$$R_{\text{aire}} = \frac{pv}{T} = \frac{14.7 \times 144 \times 12.39}{460 + 32} = 53.3 \text{ ft-lb}_f/\text{Ib } ^{\circ}\text{R}$$

Remitiéndose a la Ecuación (4-12), la capacitancia de un recipiente a presión de 20 ft^3 es

$$C = \frac{V}{nR_{\text{aire}}T} = \frac{20}{1 \times 53.3 \times 620} = 6.05 \times 10^{-4} \frac{\text{lb}}{\text{lb}_f/\text{ft}^2}$$

Observe que, en términos de las unidades del SI, R_{aire} se obtiene mediante

$$R_{\text{aire}} = 287 \text{ N-m/kg K}$$

A.4-4. En el sistema de presión neumático de la Figura 4-29(a) suponga que, para $t < 0$, el sistema está en estado estable y que la presión de todo el sistema es $\bar{P}$. También suponga que los dos fuelles son idénticos. En $t = 0$, la presión de entrada cambia de $\bar{P}$ a $\bar{P} + p_i$. A continuación, las presiones en los fuelles 1 y 2 cambiarán de $\bar{P}$ a $\bar{P} + p_1$ y de $\bar{P}$ a $\bar{P} + p_2$, respectivamente. La capacidad (el volumen) de cada fuelle es de 5×10^{-4}m^3, y la diferencia de presión de operación Δp (la diferencia entre p_i y p_1 o la diferencia entre p_i y p_2) está entre -0.5×10^5 N/m^2 y 0.5×10^5 N/m^2.

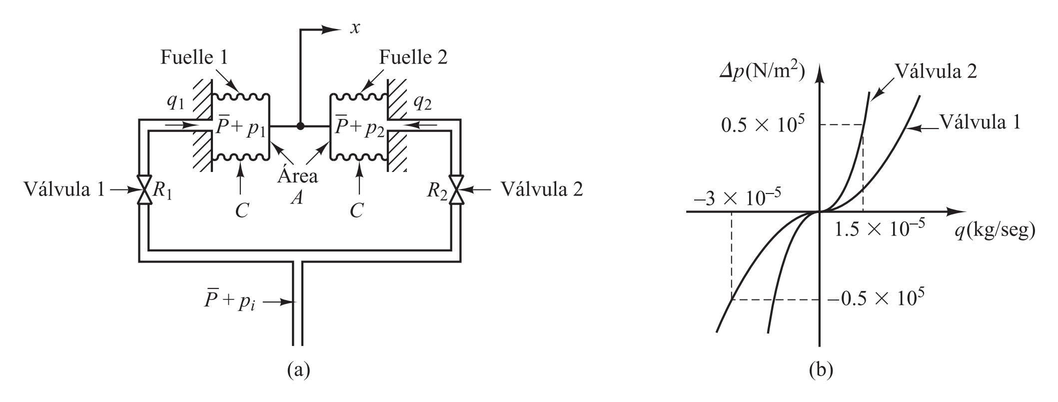


Figura 4-29. (a) Sistema de presión neumático; (b) curvas de diferencia de presión frente al caudal másico.

La Figura 4-29(b) contiene los caudales másicos correspondientes (kg/seg) a través de las válvulas. Suponga que los fuelles se expanden o se contraen en forma lineal con las presiones de aire que se les aplican, que la constante del resorte equivalente del sistema de fuelles es $k = 1 \times 10^5$ N/m y que cada fuelle tiene un área $A = 15 \times 10^{-4}$ m^2.

Definiendo como x el desplazamiento del punto medio de la varilla que conecta dos fuelles, encuentre la función de transferencia $X(s)/P_i(s)$. Suponga que el proceso de expansión es isotérmico y que la temperatura del sistema completo permanece en 30 °C.

Solución. Remitiéndose a la Sección 4-3, la función de transferencia $P_1(s)/P_i(s)$ se obtiene como

$$\frac{P_1(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{R_1Cs + 1} \tag{4-38}$$

De manera similar, la función de transferencia $P_2(s)/P_i(s)$ es

$$\frac{P_2(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{R_2Cs + 1} \tag{4-39}$$

La fuerza que actúa sobre el fuelle 1 en la dirección x es $A(\bar{P} + p_1)$ y la fuerza que actúa sobre el fuelle 2 en la dirección x negativa es $A(\bar{P} + p_2)$. La fuerza resultante se equilibra con kx, fuerza del resorte equivalente del lado corrugado del fuelle.

$$A(p_1 - p_2) = kx$$

o bien

$$A[P_1(s) - P_2(s)] = kX(s) \tag{4-40}$$

Remitiéndose a las Ecuaciones (4-38) y (4-39), se observa que

$$P_1(s) - P_2(s) = \left(\frac{1}{R_1Cs + 1} - \frac{1}{R_2Cs + 1}\right)P_i(s)$$
$$= \frac{R_2Cs - R_1Cs}{(R_1Cs + 1)(R_2Cs + 1)}P_i(s)$$

Sustituyendo esta última expresión en la Ecuación (4-40) y reescribiendo esta, la función de transferencia $X(s)/P_i(s)$ se obtiene como

$$\frac{X(s)}{P_i(s)} = \frac{A}{k}\frac{(R_2C - R_1C)s}{(R_1Cs + 1)(R_2Cs + 1)} \tag{4-41}$$

Los valores numéricos de las resistencias promedio R_1 y R_2 son

$$R_1 = \frac{d\,\Delta p}{dq_1} = \frac{0.5 \times 10^5}{3 \times 10^{-5}} = 0.167 \times 10^{10}\,\frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/seg}}$$

$$R_2 = \frac{d\,\Delta p}{dq_2} = \frac{0.5 \times 10^5}{1.5 \times 10^{-5}} = 0.333 \times 10^{10}\,\frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/seg}}$$

El valor numérico de la capacitancia C de cada fuelle es

$$C = \frac{V}{nR_{\text{aire}}T} = \frac{5 \times 10^{-4}}{1 \times 287 \times (273 + 30)} = 5.75 \times 10^{-9}\,\frac{\text{kg}}{\text{N/m}^2}$$

donde $R_{\text{aire}} = 287$ N-m/kg K. (Véase el Problema **A-4-3**.) En consecuencia,

$$R_1C = 0.167 \times 10^{10} \times 5.75 \times 10^{-9} = 9.60 \text{ seg}$$
$$R_2C = 0.333 \times 10^{10} \times 5.75 \times 10^{-9} = 19.2 \text{ seg}$$

Sustituyendo los valores numéricos de A, k, R_1C y R_2C en la Ecuación (4-41), se obtiene

$$\frac{X(s)}{P_i(s)} = \frac{1.44 \times 10^{-7}s}{(9.6s + 1)(19.2s + 1)}$$

A-4-5. Dibuje un diagrama de bloques del controlador neumático de la Figura 4-30. A continuación, obtenga la función de transferencia de este controlador. Suponga que $R_d \ll R_i$.

Si se elimina la resistencia R_d (y se sustituye con una tubería del tamaño de la línea), ¿qué acción de control se obtiene? Si se elimina la resistencia R_i (y se sustituye con una tubería del tamaño de la línea), ¿qué acción de control se obtiene?

Solución. Suponga que cuando $e = 0$, la distancia tobera-aleta es igual a $\bar{X}$ y la presión de control es igual a $\bar{P}_c$. En este análisis, se supondrán desviaciones pequeñas de los valores de referencia respectivos, del modo siguiente:

e = señal de error pequeña
x = cambio pequeño en la distancia tobera-aleta
p_c = cambio pequeño en la presión de control
p_{I} = cambio pequeño en la presión del fuelle I debido a un cambio pequeño en la presión de control
p_{II} = cambio pequeño en la presión del fuelle II debido a un cambio pequeño en la presión de control
y = desplazamiento pequeño en el extremo inferior de la aleta

En este controlador, p_c se transmite al fuelle I a través de la resistencia R_d. Asimismo, p_c se transmite al fuelle II a través de la serie de resistencias R_d y R_i. Una relación aproximada entre p_{I} y p_c es

$$\frac{P_{\mathrm{I}}(s)}{P_c(s)} = \frac{1}{R_dCs + 1} = \frac{1}{T_ds + 1}$$

donde $T_d = R_dC$ = tiempo derivativo. Asimismo, p_{I} y p_{II} se relacionan mediante la función de transferencia

$$\frac{P_{\mathrm{II}}(s)}{P_{\mathrm{I}}(s)} = \frac{1}{R_iCs + 1} = \frac{1}{T_is + 1}$$

donde $T_i = R_iC$ = tiempo integral. La ecuación del balance de la fuerza para los dos fuelles es

$$(p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}})A = k_sy$$

Figura 4-30. Diagrama esquemático de un controlador neumático.

donde k_s es la rigidez de los dos fuelles conectados y A es el área transversal de los mismos. La relación entre las variables e, x e y es

$$x = \frac{b}{a+b}e - \frac{a}{a+b}y$$

La relación entre las variables p_c y x es

$$p_c = Kx \qquad (K > 0)$$

A partir de las ecuaciones recién obtenidas, se dibuja un diagrama de bloques del controlador, como aparece en la Figura 4-31(a). La simplificación de este diagrama de bloques se da en la Figura 4-31(b).

La función de transferencia entre $P_c(s)$ y $E(s)$ es

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\dfrac{b}{a+b}K}{1 + K\dfrac{a}{a+b}\dfrac{A}{k_s}\left(\dfrac{T_i s}{T_i s + 1}\right)\left(\dfrac{1}{T_d s + 1}\right)}$$

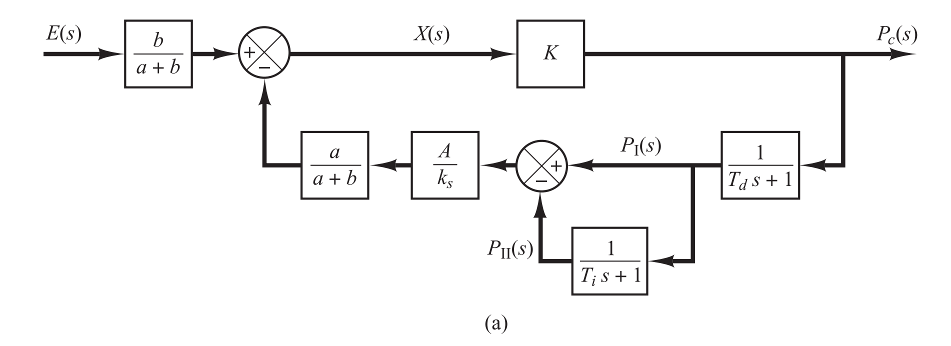
Para un controlador práctico, en una operación normal, $|KaAT_i s/[(a+b)k_s(T_i s + 1)(T_d s + 1)]|$ es mucho mayor que la unidad y $T_i \gg T_d$. Por tanto, la función de transferencia se simplifica del modo siguiente:

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} \doteqdot \frac{bk_s(T_i s + 1)(T_d s + 1)}{aAT_i s} = \frac{bk_s}{aA}\left(\frac{T_i + T_d}{T_i} + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \doteqdot K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

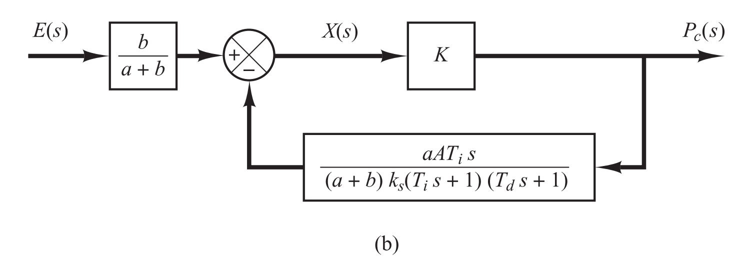
donde

$$K_p = \frac{bk_s}{aA}$$

Por tanto, el controlador de la Figura 4-30 es proporcional-integral-derivativo.



(a)



(b)

Figura 4-31. (a) Diagrama de bloques del controlador neumático mostrado en la Figura 4-30; (b) diagrama de bloques simplificado.

Si se elimina la resistencia R_d o $R_d = 0$, la acción se convierte en la de un controlador proporcional-integral.

Si se suprime la resistencia R_i, o $R_i = 0$, la acción se convierte en la de un controlador proporcional de banda estrecha o la de un controlador de dos posiciones. (Observe que las acciones de los dos fuelles de realimentación se cancelan una a la otra y que no hay realimentación.)

A-4-6. Las válvulas de bobinas reales tienen un solape o un subsolape debido a las tolerancias de manufactura. Considere las válvulas de bobina con solape o subsolape de la Figura 4-32(a) y (b). Trace las curvas que relacionan el área del puerto descubierta A frente al desplazamiento x.

Solución. Para la válvula con solape, existe una zona muerta entre $-\frac{1}{2}x_0$ y $\frac{1}{2}x_0$, o bien $-\frac{1}{2}x_0 < x < \frac{1}{2}x_0$. La Figura 4-33(a) muestra la curva del área del puerto descubierta A frente al desplazamiento x. Tal válvula con solape no funciona como válvula de control.

Para la válvula con subsolape, en la Figura 4-33(b) se muestra la curva del área del puerto, A frente al desplazamiento x. La curva efectiva para la región con subsolape tiene una pendiente más alta, lo que representa una mayor sensibilidad. Por lo general, las válvulas que se usan para el control tienen un subsolape.

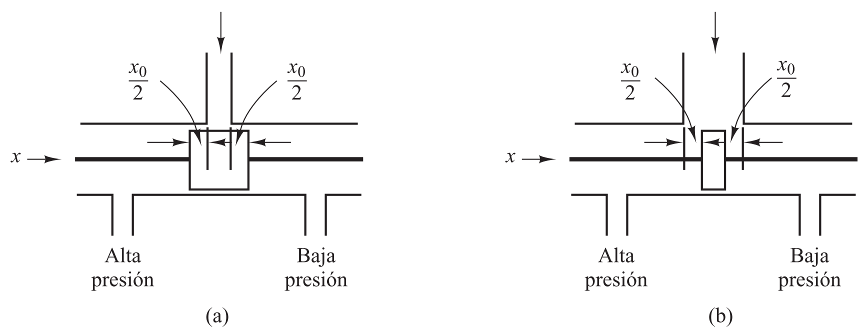


Figura 4-32. (a) Válvula de bobina con solape; (b) válvula de bobina sin solape.

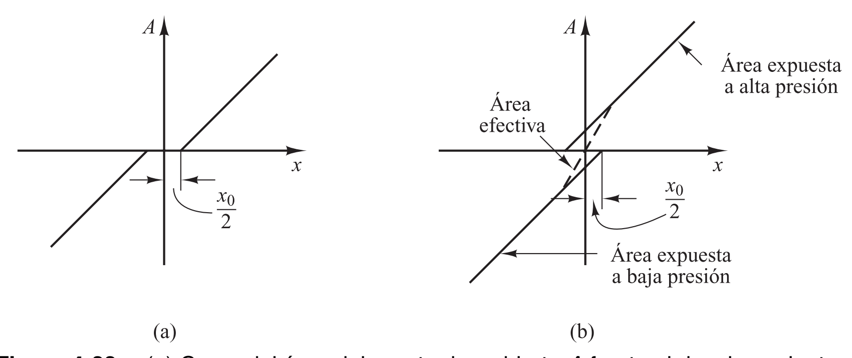


Figura 4-33. (a) Curva del área del puerto descubierta A frente al desplazamiento x para la válvula con solape; (b) curva del área del puerto A frente al desplazamiento x para la válvula sin solape.

A-4-7. La Figura 4-34 muestra un controlador hidráulico de tubos a chorro. El fluido hidráulico se expele del tubo a chorro. Si el tubo a chorro se cambia hacia la derecha de la posición neutral, el pistón de potencia se mueve a la izquierda, y viceversa. La válvula de tubo a chorro no se usa tanto como la válvula de aleta, debido a un gran flujo nulo, a una respuesta más lenta y a características impredecibles. Su principal ventaja estriba en su insensibilidad a los fluidos sucios.

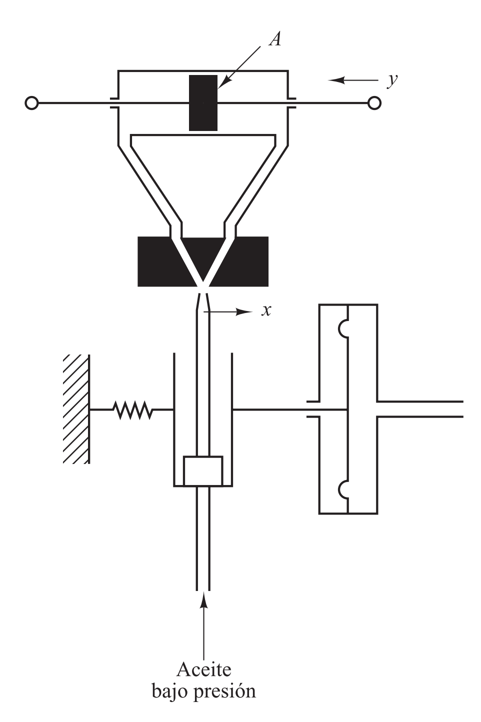


Figura 4-34. Controlador hidráulico de tubos a chorro.

Suponga que el pistón de potencia se conecta a una carga ligera, de modo que la fuerza de inercia del elemento de la carga es insignificante en comparación con la fuerza hidráulica que desarrolla el pistón de potencia. ¿Qué tipo de acción de control produce este controlador?

Solución. Defina como x el desplazamiento de la tobera a chorro a partir de la posición neutral y como y el desplazamiento del pistón de potencia. Si la tobera a chorro se mueve a la derecha un desplazamiento x pequeño, el aceite fluirá al lado derecho del pistón de potencia y el aceite del lado izquierdo del pistón de potencia regresará al drenaje. El aceite que fluye hacia el cilindro de potencia está a una presión alta; el aceite que fluye desde el cilindro de potencia al drenaje está a una presión baja. La diferencia de presión resultante provoca que el pistón de potencia se mueva a la izquierda.

Para un desplazamiento pequeño de la tobera a chorro x, el caudal q hacia el cilindro de potencia es proporcional a x; es decir,

$$q = K_1 x$$

Para el cilindro de potencia,

$$A\rho \, dy = q \, dt$$

donde A es el área del pistón de potencia y ρ es la densidad del aceite. De este modo

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q}{A\rho} = \frac{K_1}{A\rho} x = Kx$$

donde $K = K_1/(A\rho) =$ constante. Por tanto, la función de transferencia $Y(s)/X(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s}$$

El controlador produce la acción de control integral.



A-4-8. Explique la operación del sistema de control de velocidad de la Figura 4-35.

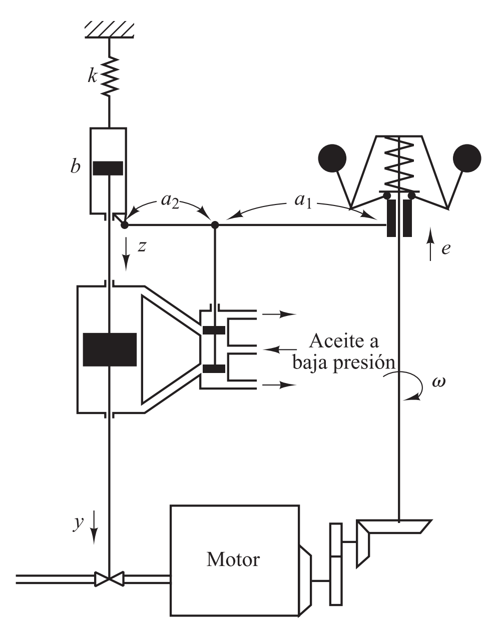


Figura 4-35. Sistema de control de velocidad.

Solución. Si la velocidad de la máquina aumenta, el soporte deslizable del controlador de esferas se mueve hacia arriba. Este movimiento funciona como entrada para el controlador hidráulico. Una señal de error positiva (un movimiento hacia arriba del soporte deslizante) provoca que el pistón de potencia se mueva hacia abajo, se reduzca la apertura de la válvula de combustible y disminuya la velocidad de la máquina. La Figura 4-36 muestra un diagrama de bloques de este sistema.

A partir del diagrama de bloques, la función de transferencia $Y(s)/E(s)$ se obtiene como

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{\frac{K}{s}}{1 + \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{bs}{bs + k} \frac{K}{s}}$$

Si se aplica la condición siguiente,

$$\left| \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{bs}{bs + k} \frac{K}{s} \right| \gg 1$$

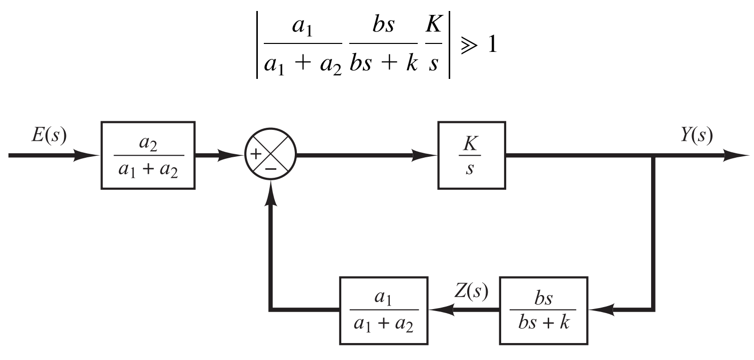


Figura 4-36. Diagrama de bloques del sistema de control de velocidad mostrado en la Figura 4-35.

la función de transferencia $Y(s)/E(s)$ se convierte en

$$\frac{Y(s)}{E(s)} \doteqdot \frac{a_2}{a_1 + a_2} \frac{a_1 + a_2}{a_1} \frac{bs + k}{bs} = \frac{a_2}{a_1}\left(1 + \frac{k}{bs}\right)$$

El controlador de velocidad tiene una acción de control proporcional-integral.

A-4-9. Calcule la función de transferencia $Z(s)/Y(s)$ del sistema hidráulico que se muestra en la Figura 4-37. Suponga que los dos amortiguadores del sistema son idénticos.

Solución. Para calcular las ecuaciones del sistema, se supone que la fuerza F se aplica en el extremo derecho del eje produciendo un desplazamiento y. (Todos los desplazamientos y, w y z se miden desde las respectivas posiciones de equilibrio cuando no existe fuerza aplicada en el extremo derecho del eje.) Al aplicar la fuerza F, la presión P_1 se hace mayor que la presión P'_1, o bien $P_1 > P'_1$. De forma similar, $P_2 > P'_2$.

Para el balance de fuerzas se tiene la siguiente ecuación:

$$k_2(y - w) = A(P_1 - P'_1) + A(P_2 - P'_2) \qquad (4\text{-}42)$$

Como

$$k_1 z = A(P_1 - P'_1) \qquad (4\text{-}43)$$

y

$$q_1 = \frac{P_1 - P'_1}{R}$$

se tiene

$$k_1 z = ARq_1$$

Como también

$$q_1\, dt = A(dw - dz)\rho$$

se tiene

$$q_1 = A(\dot{w} - \dot{z})p$$

o bien

$$\dot{w} - \dot{z} = \frac{k_1 z}{A^2 R\rho}$$

Si se define $A^2R\rho = B$ (B es el coeficiente de fricción viscosa), entonces

$$\dot{w} - \dot{z} = \frac{k_1}{B} z \qquad (4\text{-}44)$$

Además, para el lado derecho del amortiguador se tiene

$$q_2\, dt = A\rho\, dw$$

De ahí, $q_2 = (P_2 - P'_2)/R$, se obtiene

$$\dot{w} = \frac{q_2}{A\rho} = \frac{A(P_2 - P'_2)}{A^2 R\rho}$$

o bien

$$A(P_2 - P'_2) = B\dot{w} \qquad (4\text{-}45)$$

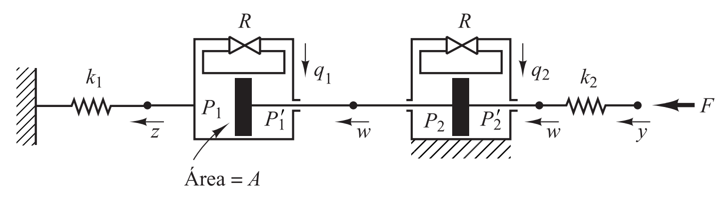


Figura 4-37. Sistema hidráulico.

Si se sustituyen las Ecuaciones (4-43) y (4-45) en la Ecuación (4-42) se tiene

$$k_2 y - k_2 w = k_1 z + B\dot{w}$$

Calculando la transformada de Laplace de esta última ecuación, suponiendo condiciones iniciales nulas, se obtiene

$$k_2 Y(s) = (k_2 + Bs)W(s) + k_1 Z(s) \tag{4-46}$$

Tomando la transformada de Laplace de la Ecuación (4-44), suponiendo condiciones iniciales nulas, se obtiene

$$W(s) = \frac{k_1 + Bs}{Bs} Z(s) \tag{4-47}$$

Si se utiliza la Ecuación (4-47) para eliminar $W(s)$ de la Ecuación (4-46), se obtiene

$$k_2 Y(s) = (k_2 + Bs)\frac{k_1 + Bs}{Bs} Z(s) + k_1 Z(s)$$

a partir de la cual se obtiene como función de transferencia $Z(s)/Y(s)$

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{k_2 s}{Bs^2 + (2k_1 + k_2)s + \dfrac{k_1 k_2}{B}}$$

Multiplicando el numerador y el denominador de esta última ecuación por $B/(k_1 k_2)$, se obtiene

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{\dfrac{B}{k_1} s}{\dfrac{B^2}{k_1 k_2} s^2 + \left(\dfrac{2B}{k_2} + \dfrac{B}{k_1}\right)s + 1}$$

Si se define $B/k_1 = T_1$, $B/k_2 = T_2$, la función de transferencia $Z(s)/Y(s)$ es

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{T_1 s}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + 2T_2)s + 1}$$

A-4-10. Considerando desviaciones pequeñas de la operación de estado estable, dibuje un diagrama de bloques del sistema de calefacción de aire de la Figura 4-38. Suponga que las pérdidas de calor en el medio ambiente y la capacitancia de calor de las partes de metal del calefactor son insignificantes.

Solución. Se definen

$\bar{\Theta}_i$ = temperatura en estado estable del aire de entrada, ºC

$\bar{\Theta}_o$ = temperatura en estado estable del aire de salida, ºC

G = flujo de la masa del aire a través de la cámara de calefacción, kg/seg

M = masa del aire que contiene la cámara de calefacción, kg

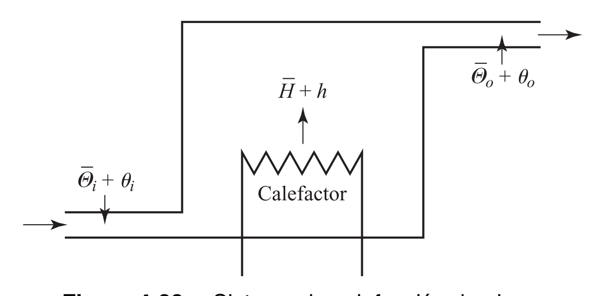


Figura 4-38. Sistema de calefacción de aire.

c = calor específico del aire, kcal/kg °C

R = resistencia térmica, °C seg/kcal

C = capacitancia térmica del aire que contiene la cámara de calefacción = Mc, kcal/°C

$\bar{H}$ = flujo de calor de entrada en estado estable, kcal/seg

Suponga que el flujo de calor de entrada cambia repentinamente de $\bar{H}$ a $\bar{H} + h$ y que la temperatura del aire de entrada cambia repentinamente de $\bar{\Theta}_i$ a $\bar{\Theta}_i + \theta_i$. En este caso, la temperatura del aire de salida cambiará de $\bar{\Theta}_o$ a $\bar{\Theta}_o + \theta_o$.

La ecuación que describe el comportamiento del sistema es

$$C\,d\theta_o = [h + Gc(\theta_i - \theta_o)]\,dt$$

o bien

$$C\frac{d\theta_o}{dt} = h + Gc(\theta_i - \theta_o)$$

Considerando que

$$Gc = \frac{1}{R}$$

se obtiene

$$C\frac{d\theta_o}{dt} = h + \frac{1}{R}(\theta_i - \theta_o)$$

o bien

$$RC\frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = Rh + \theta_i$$

Tomando las transformadas de Laplace de ambos miembros de esta última ecuación y sustituyendo la condición inicial $\theta_0(0) = 0$, se obtiene

$$\Theta_o(s) = \frac{R}{RCs + 1}H(s) + \frac{1}{RCs + 1}\Theta_i(s)$$

El diagrama de bloques del sistema que corresponde a esta ecuación aparece en la Figura 4-39.

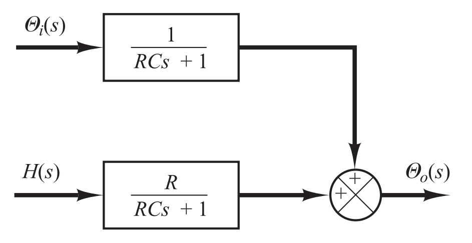


Figura 4-39. Diagrama de bloques del sistema de calefacción de aire mostrado en la Figura 4-38.

A-4-11. Considere el sistema del termómetro delgado de mercurio con paredes de vidrio de la Figura 4-40. Suponga que el termómetro está a una temperatura estable $\bar{\Theta}$ (temperatura ambiente) y que en $t = 0$ se sumerge en un baño a una temperatura $\bar{\Theta} + \theta_b$, donde θ_b es la temperatura del baño (que puede ser constante o cambiante), medida a partir de la temperatura ambiente $\bar{\Theta}$. Defina la temperatura instantánea del termómetro mediante $\bar{\Theta} + \theta$, de modo que el cambio en la temperatura del termómetro θ satisfaga la condición $\theta(0) = 0$. Obtenga un modelo matemático para el sistema. Asimismo, determine un sistema eléctrico análogo al sistema del termómetro.

Solución. Se obtiene un modelo matemático para el sistema, considerando el balance del calor del modo siguiente: el calor que entra al termómetro durante dt seg es $q\,dt$, donde q es el flujo de

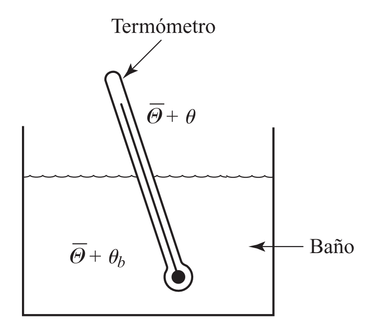


Figura 4-40. Sistema del termómetro delgado de mercurio con paredes de vidrio.

calor hacia el termómetro. Este calor se almacena en la capacitancia térmica C del termómetro, por lo cual su temperatura se eleva $d\theta$. Por tanto, la ecuación de balance de calor es

$$C\,d\theta = q\,dt \tag{4-48}$$

Como la resistencia térmica R se escribe como

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{\Delta\theta}{q}$$

el flujo de calor q se obtiene, en función de la resistencia térmica R, como

$$q = \frac{(\bar{\Theta} + \theta_b) - (\bar{\Theta} + \theta)}{R} = \frac{\theta_b - \theta}{R}$$

donde $\bar{\Theta} + \theta_b$ es la temperatura del baño y $\bar{\Theta} + \theta$ es la temperatura del termómetro. Por tanto. la Ecuación (4-48) puede reescribirse como

$$C\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_b - \theta}{R}$$

o bien

$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_b \tag{4-49}$$

La Ecuación (4-49) es un modelo matemático del sistema del termómetro.

Remitiéndose a la Ecuación (4-49), un sistema eléctrico análogo para el sistema del termómetro se escribe como

$$RC\frac{de_o}{dt} + e_o = e_i$$

Un circuito eléctrico representado mediante esta última ecuación aparece en la Figura 4-41.

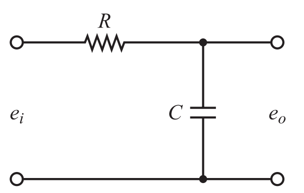


Figura 4-41. Analogía electrónica del sistema de termómetro mostrado en la Figura 4-40.

PROBLEMAS

B-4-1. Considere el sistema del tanque de agua cónico de la Figura 4-42; el flujo a través de la válvula es turbulento y se relaciona con la altura H mediante

$$Q = 0.005\sqrt{H}$$

donde Q es el caudal medido en m^3/seg y H está en metros.

Suponga que la altura es 2 m en $t = 0$. ¿Cuál será la altura en $t = 60$ seg?

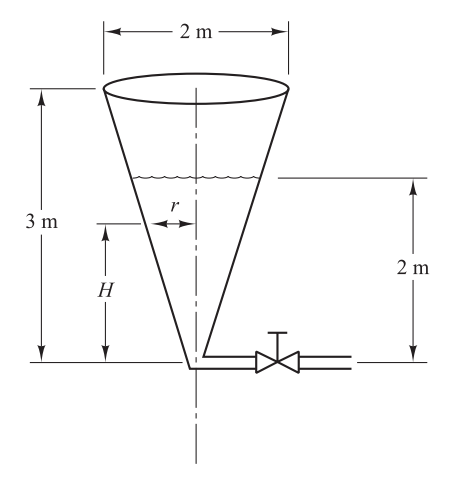


Figura 4-42. Sistema de tanque de agua cónico.

B-4-2. Considere el sistema de control de nivel de líquido de la Figura 4-43. El controlador es de tipo proporcional. El punto de funcionamiento del controlador está fijo.

Dibuje un diagrama de bloques del sistema suponiendo que los cambios en las variables son pequeños. Obtenga la función de transferencia entre el nivel del segundo tanque y la entrada de perturbación q_d. Obtenga el error en estado estacionario cuando la perturbación q_d es un escalón unidad.

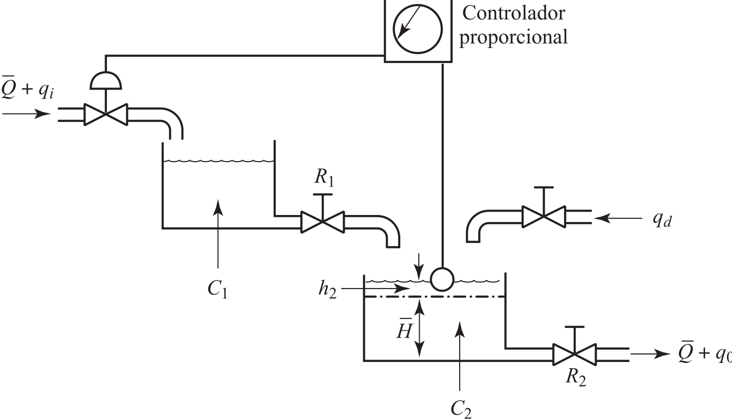


Figura 4-43. Sistema de control de nivel de líquidos.

B-4-3. Para el sistema neumático de la Figura 4-44, suponga que los valores de la presión del aire y el desplazamiento de los amortiguadores en estado estacionario son $\bar{P}$ y $\bar{X}$, respectivamente. Suponga también que la presión de entrada cambia de $\bar{P}$ a $\bar{P} + p_i$, donde p_i es un pequeño cambio en la presión de entrada. Este cambio provocará que el desplazamiento de los amortiguadores varíe una pequeña cantidad x. Suponiendo que la capacitancia de los amortiguadores es C y que la resistencia de la válvula es R, obtenga la función de transferencia que relaciona x y p_i.

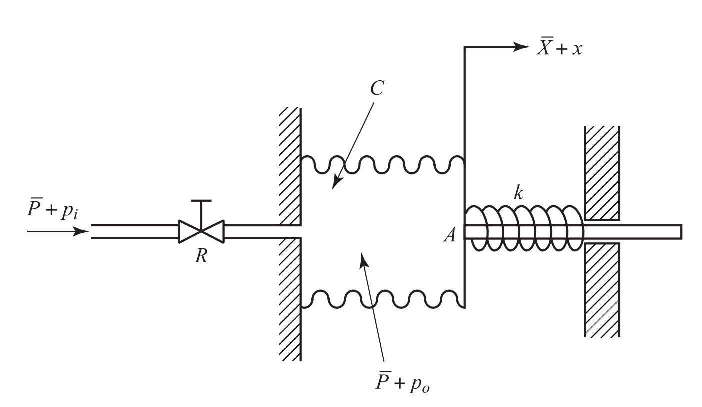


Figura 4-44. Sistema neumático.

B-4-4. La Figura 4-45 muestra un controlador neumático. El relevador neumático tiene la característica de que $p_c = Kp_b$, donde $K > 0$. ¿Qué tipo de acción de control produce este controlador? Calcule la función de transferencia $P_c(s)/E(s)$.

B-4-5. Considere el controlador neumático de la Figura 4-46. Suponiendo que el relevador neumático tiene las características de que $p_c = Kp_b$ (donde $K > 0$), determine la acción de control de este controlador. La entrada al controlador es e y la salida p_c.

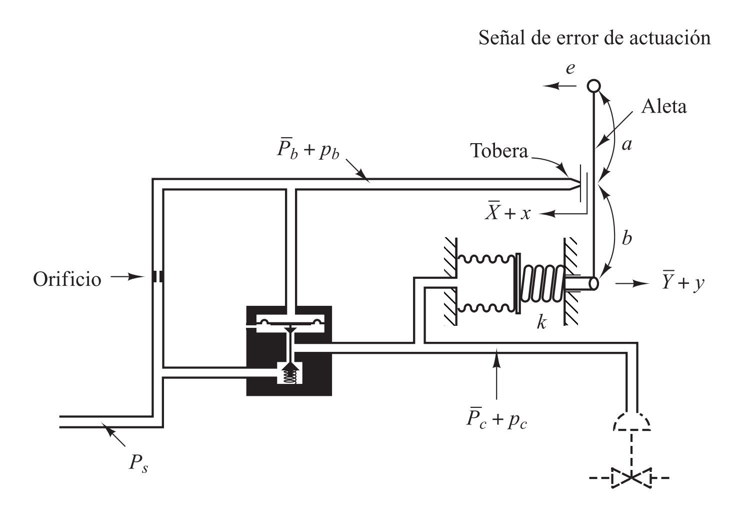


Figura 4-45. Controlador neumático.

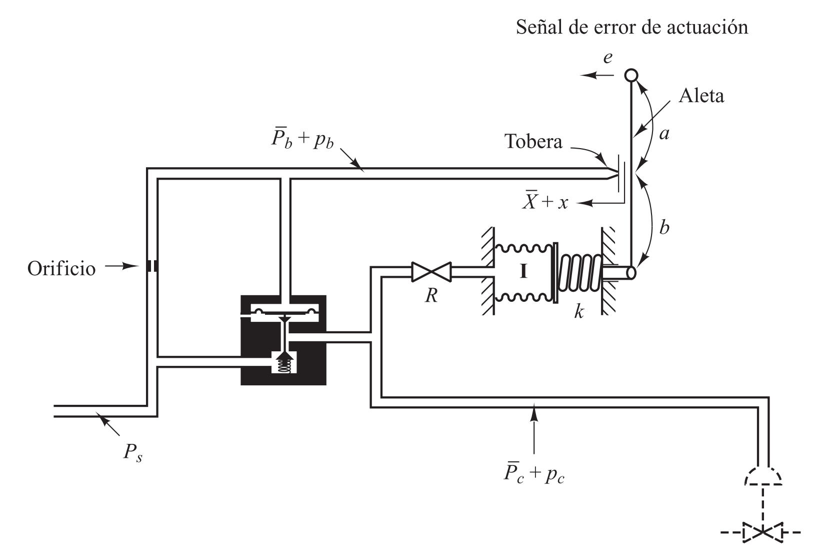


Figura 4-46. Controlador neumático.

B-4-6. La Figura 4-47 muestra un controlador neumático. La señal e es la entrada y el cambio en la presión de control p_c es la salida. Obtenga la función de transferencia $P_c(s)/E(s)$. Suponga que el relé neumático tiene la característica de que $p = Kp_b$, donde $K > 0$.

B-4-7. Considere el controlador neumático de la Figura 4.48. ¿Qué clase de acción de control produce este controlador? Suponga que el relé neumático tiene la característica de que $p_c = Kp_b$, donde $K > 0$.

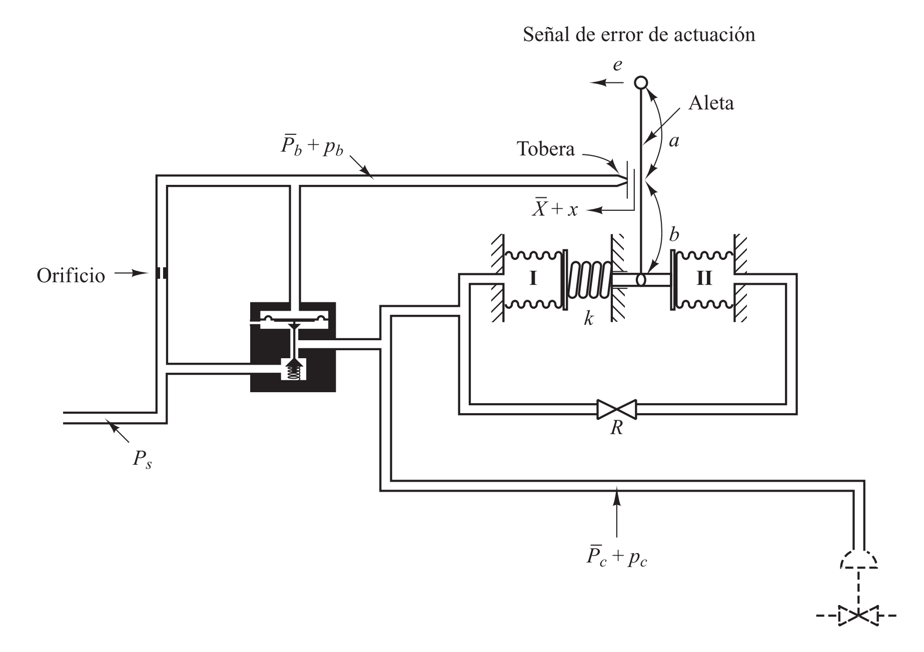


Figura 4-47. Controlador neumático.

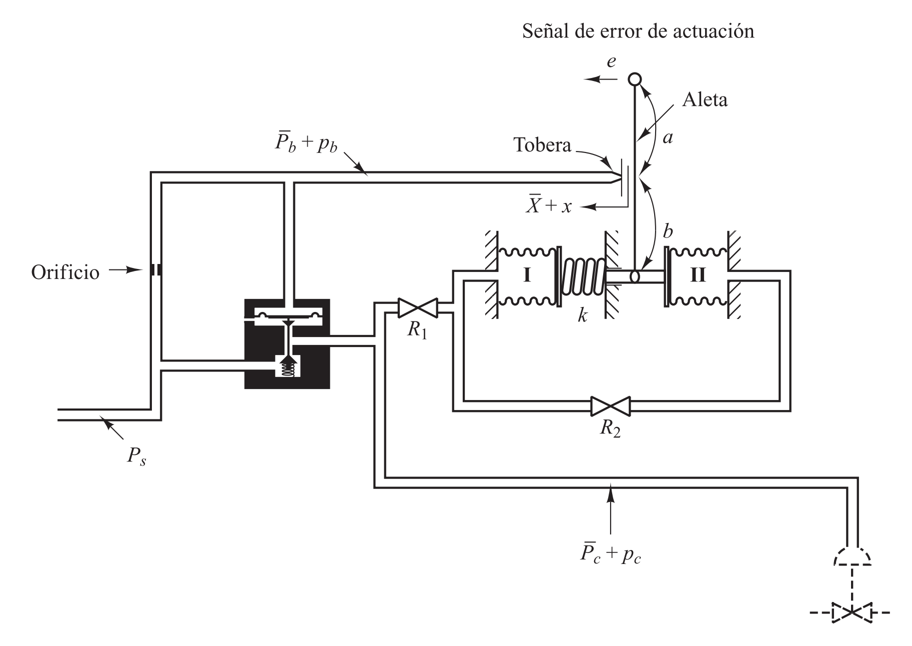


Figura 4-48. Controlador neumático.

B-4-8. La Figura 4-49 muestra una válvula de aleta colocada entre dos toberas opuestas. Si la aleta se mueve ligeramente a la derecha, se produce un desequilibrio de presión en las toberas y el pistón de potencia se mueve a la izquierda, y viceversa. Con frecuencia se usan dispositivos como este en los sistemas de seguimiento hidráulicos como válvulas de primera etapa en las servoválvulas de dos etapas. Este uso se da porque es posible que se requiera una fuerza considerable para impulsar válvulas de bobina más grandes que la que produce la fuerza de flujo en estado estable. Para reducir o compensar esta fuerza, se emplea con frecuencia una configuración de válvulas de dos etapas; se usa una válvula de aleta o una tobera a chorro como válvula de primera etapa para aportar la fuerza necesaria, con el propósito de impulsar la válvula de bobinas de la segunda etapa.

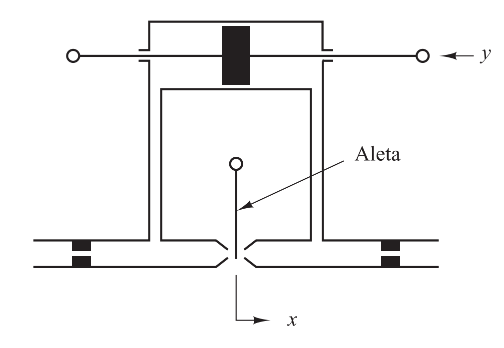


Figura 4-49. Válvula de aleta.

La Figura 4-50 ofrece un diagrama esquemático de un servomotor hidráulico en el cual se amplifica la señal de error en dos etapas mediante una tobera a chorro y una válvula piloto. Dibuje un diagrama de bloques del sistema de la Figura 4-50 y a continuación encuentre la función de transferencia entre y y x, donde x es la presión de aire e y es el desplazamiento del pistón de potencia.

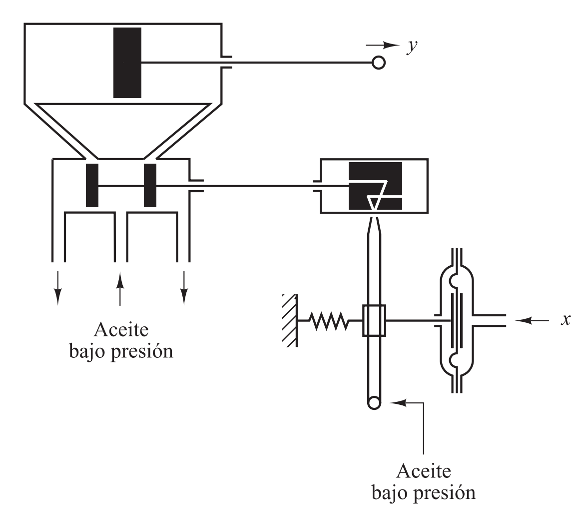


Figura 4-50. Diagrama esquemático de un servomotor hidráulico.

B-4-9. La Figura 4-51 es un diagrama esquemático de un sistema de control de elevación de aeronaves. La entrada al sistema es el ángulo de deflexión θ de la palanca de control y la salida es el ángulo de elevación ϕ. Suponga que los ángulos θ y ϕ son relativamente pequeños. Demuestre que, para cada ángulo θ de la palanca de control, existe un ángulo de elevación ϕ correspondiente (en estado estable).

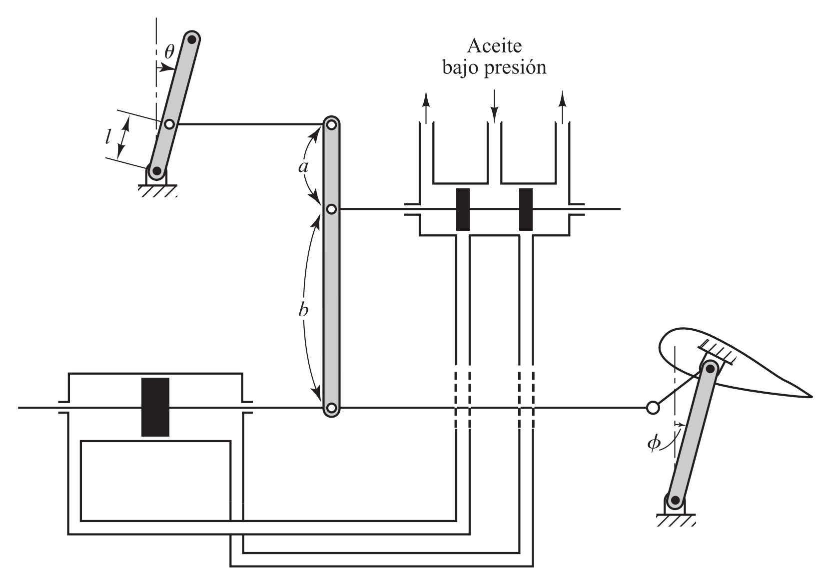


Figura 4-51. Sistema de control de elevación de aeronaves.

B-4-10. Considere el sistema de control de nivel de líquido de la Figura 4-52. Un controlador integral hidráulico maneja la válvula de entrada. Suponga que el caudal de entrada en estado estable es $\bar{Q}$ y que el caudal de salida en estado estable también es $\bar{Q}$, que la altura en estado estable es $\bar{H}$, que el desplazamiento de la válvula piloto en estado estable es $\bar{X} = 0$ y que la posición de la válvula en estado estable es $\bar{Y}$. Se supone que el punto de ajuste $\bar{R}$ corresponde a la altura en estado estable $\bar{H}$. El punto de consigna está fijo. Suponga también que el caudal de entrada de perturbación q_d, que es una cantidad pequeña, se aplica al tanque del agua en $t = 0$. Esta perturbación hace que la altura cambie de $\bar{H}$ a $\bar{H} + h$. Este cambio provoca un cambio en el caudal de salida mediante q_o. A través del controlador hidráulico, el cambio en la altura provoca una modificación en el caudal de entrada de $\bar{Q}$ a $\bar{Q} + q_i$. (El controlador integral tiende a conservar la altura lo más constante posible en presencia de perturbaciones.) Se supone que todos los cambios son de cantidades pequeñas.

Se supone que la velocidad de la potencia del pistón (válvula) es proporcional al desplazamiento de la válvula piloto x, o bien

$$\frac{dy}{dt} = K_1 x$$

donde K_1 es una constante positiva. Se supone también que el cambio en el caudal entrante q_i es negativamente proporcional al cambio en la apertura de la válvula y, o bien

$$q_i = -K_v y$$

donde K_v es una constante positiva.

Suponiendo los siguientes valores numéricos para el sistema,

$$C = 2 \text{ m}^2, \quad R = 0.5 \text{ seg/m}^2, \quad K_v = 1 \text{ m}^2\text{/seg}$$
$$a = 0.25 \text{ m}, \quad b = 0.75 \text{ m}, \quad K_1 = 4 \text{ seg}^{-1}$$

obtenga la función de transferencia $H(s)/Q_d(s)$.

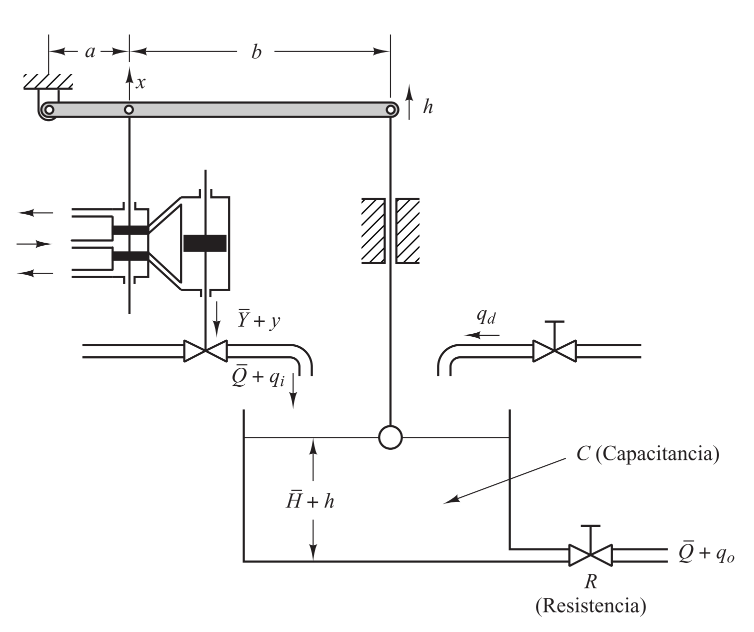


Figura 4-52. Sistemas de control de nivel de líquidos.

B-4-11. Considere el controlador de la Figura 4-53. La entrada es la presión de aire p_i medida desde alguna presión de referencia $\bar{P}$ en estado estable y la salida es el desplazamiento y del pistón de potencia. Obtenga la función de transferencia $Y(s)/P_i(s)$.

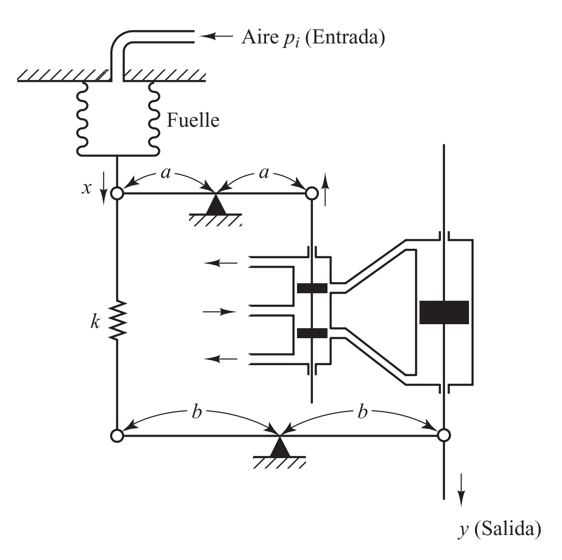


Figura 4-53. Controlador.

B-4-12. Un termopar tiene una constante de tiempo de 2 seg. Un termopozo tiene una constante de tiempo de 30 seg. Cuando el termopar se inserta en el termopozo, este dispositivo de medición de temperatura se considera un sistema de dos capacitancias.

Determine las constantes de tiempo del sistema combinado termopar-termopozo. Suponga que el peso del termopar es de 8 g y que el peso del termopozo es de 40 g. También suponga que son iguales los calores específicos del termopar y el termopozo.



Análisis de la respuesta transitoria y estacionaria

5-1 Introducción

En capítulos anteriores se planteó que el primer paso para analizar un sistema de control era obtener un modelo matemático del mismo. Una vez obtenido tal modelo, existen varios métodos para el análisis del comportamiento del sistema.

En la práctica, la señal de entrada para un sistema de control no se conoce con anticipación, pero es de naturaleza aleatoria, y la entrada instantánea no puede expresarse de forma analítica. Sólo en algunos casos especiales se conoce con anticipación la señal de entrada y se puede expresar de forma analítica o mediante curvas; tal es el caso del control automático de herramientas de corte.

En el análisis y diseño de sistemas de control, se debe tener una base de comparación del comportamiento de diversos sistemas de control. Esta base se configura especificando las señales de entrada de prueba particulares y comparando las respuestas de varios sistemas a estas señales de entrada.

Muchos criterios de diseño se basan en tales señales o en la respuesta del sistema a los cambios en las condiciones iniciales (sin señales de prueba). El uso de señales de prueba se justifica porque existe una correlación entre las características de respuesta de un sistema para una señal de entrada de prueba común y la capacidad del sistema de manejar las señales de entrada reales.

Señales de prueba típicas. Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón, rampa, parábola, impulso, etc. Con estas señales de prueba, es posible realizar con facilidad análisis matemáticos y experimentales de sistemas de control, ya que las señales son funciones del tiempo muy simples.

La forma de la entrada a la que el sistema estará sujeto con mayor frecuencia en una operación normal determina cuál de las señales de entrada típicas se debe usar para analizar las características del sistema. Si las entradas para un sistema de control son funciones del tiempo que cambian en forma gradual, una función rampa será una buena señal de prueba. Asimismo, si un sistema está sujeto a perturbaciones repentinas, una función escalón será una buena señal de prueba; y para un sistema sujeto a entradas de choque, una función impulso será la mejor. Una vez diseñado un sistema de control con base en las señales de prueba, por lo general el comportamiento del sistema en respuesta a las entradas reales es satisfactorio. El uso de tales señales de prueba permite comparar el comportamiento de todos los sistemas sobre la misma base.

Respuesta transitoria y respuesta en estado estacionario. La respuesta en el tiempo de un sistema de control consta de dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estacionario. La respuesta transitoria se refiere a la que va del estado inicial al estado final. Por respuesta en estado estacionario se entiende la manera como se comporta la salida del sistema conforme t tiende a infinito. Por tanto, la respuesta del sistema $c(t)$ se puede escribir como

$$c(t) = c_{\mathrm{tr}} + c_{\mathrm{ss}}(t)$$

donde el primer término del miembro derecho de la ecuación es la respuesta transitoria y el segundo término es la respuesta en el estado estacionario.

Estabilidad absoluta, estabilidad relativa y error en estado estacionario. Al diseñar un sistema de control, se debe ser capaz de predecir su comportamiento dinámico a partir del conocimiento de los componentes. La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es la estabilidad absoluta, es decir, si el sistema es estable o inestable. Un sistema de control está en equilibrio si, en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es estable si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es críticamente estable si las oscilaciones de la salida continúan de forma indefinida. Es inestable si la salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. En realidad, la salida de un sistema físico puede aumentar hasta un cierto grado, pero puede estar limitada por «detenciones» mecánicas, o el sistema puede colapsarse o volverse no lineal una vez que la salida excede cierta magnitud, por lo cual ya no se aplican las ecuaciones diferenciales lineales.

Entre los comportamientos importantes del sistema (aparte de la estabilidad absoluta) que deben recibir una cuidadosa consideración están la estabilidad relativa y el error en estado estacionario. Como un sistema de control físico implica un almacenamiento de energía, la salida del sistema, cuando este está sujeto a una entrada, no sucede a la entrada de inmediato, sino que muestra una respuesta transitoria antes de alcanzar un estado estacionario. La respuesta transitoria de un sistema de control práctico, con frecuencia, muestra oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar un estado estacionario. Si la salida de un sistema en estado estacionario no coincide exactamente con la entrada, se dice que el sistema tiene un error en estado estacionario. Este error indica la precisión del sistema. Al analizar un sistema de control, se debe examinar el comportamiento de la respuesta transitoria y el comportamiento en estado estacionario.

Contenido del capítulo. Este capítulo se relaciona con las respuestas de los sistemas a las señales aperiódicas (como las funciones escalón, rampa, parábola e impulso). El capítulo incluye lo siguiente. La Sección 5-1 presenta el material introductorio. La Sección 5-2 trata la respuesta de los sistemas de primer orden ante entradas aperiódicas. La Sección 5-3 aborda la respuesta transitoria de los sistemas de segundo orden. Se presentan análisis detallados de la respuesta escalón, rampa e impulso de los sistemas de segundo orden. La Sección 5-4 estudia el

análisis de respuesta transitoria de los sistemas de orden superior. La Sección 5-5 ofrece una introducción al enfoque de MATLAB para la solución de respuesta transitoria. La Sección 5-6 presenta un ejemplo de un problema de respuesta transitoria solucionado con MATLAB. La Sección 5-7 expone el criterio de estabilidad de Routh. La Sección 5-8 examina los efectos de las acciones de control integral y derivativo en el comportamiento del sistema. Por último, la Sección 5-9 trata los errores en estado estacionario de los sistemas de control con realimentación unitaria.

5-2 Sistemas de primer orden

Considérese el sistema de primer orden de la Figura 5-1(a). Físicamente, este sistema representa un circuito *RC*, un sistema térmico o algo similar. La Figura 5-1(b) presenta un diagrama de bloques simplificado. La relación entrada-salida se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \tag{5-1}$$

En lo sucesivo, se analizan las respuestas del sistema a entradas como la función escalón unitario, rampa unitaria e impulso unitario. Se supone que las condiciones iniciales son cero.

Obsérvese que todos los sistemas que tienen la misma función de transferencia presentarán la misma salida en respuesta a la misma entrada. Para cualquier sistema físico dado, la respuesta matemática recibe una interpretación física.

Respuesta escalón unitario de sistemas de primer orden. Como la transformada de Laplace de la función escalón unitario es $1/s$, sustituyendo $R(s) = 1/s$ en la Ecuación (5-1), se obtiene

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1}\,\frac{1}{s}$$

Si se desarrolla $C(s)$ en fracciones simples se obtiene

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)} \tag{5-2}$$

Si se toma la transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-2), se obtiene

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \tag{5-3}$$

La Ecuación (5-3) plantea que la salida $c(t)$ es inicialmente cero y al final se vuelve unitaria. Una característica importante de tal curva de respuesta exponencial $c(t)$ es que, para $t = T$, el valor de $c(t)$ es 0.632, o que la respuesta $c(t)$ alcanzó 63.2% de su cambio total. Esto se aprecia con facilidad sustituyendo $t = T$ en $c(t)$. Es decir,

$$c(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

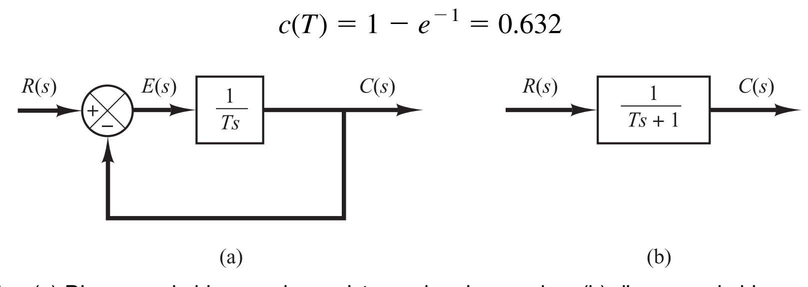


Figura 5-1. (a) Diagrama de bloques de un sistema de primer orden; (b) diagrama de bloques simplificado.

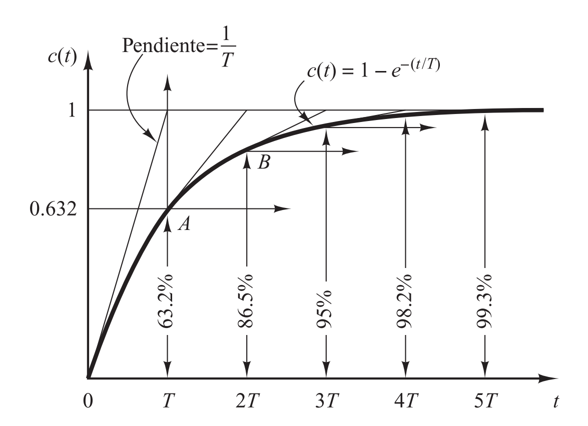


Figura 5-2. Curva de respuesta exponencial.

Obsérvese que, conforme más pequeña es la constante de tiempo T, más rápida es la respuesta del sistema. Otra característica importante de la curva de respuesta exponencial es que la pendiente de la línea de tangente en $t = 0$ es $1/T$, ya que

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{1}{T}e^{-t/T}\right|_{t=0} = \frac{1}{T} \tag{5-4}$$

La salida alcanzará el valor final en $t = T$ si mantuviera su velocidad de respuesta inicial. A partir de la Ecuación (5-4) se observa que la pendiente de la curva de respuesta $c(t)$ disminuye de forma monótona de $1/T$ en $t = 0$ a cero en $t = \infty$.

La curva de respuesta exponencial $c(t)$ obtenida mediante la Ecuación (5-3) aparece en la Figura 5-2. En una constante de tiempo, la curva de respuesta exponencial ha ido de 0 a 63.2% del valor final. En dos constantes de tiempo, la respuesta alcanza 86.5% del valor final. En $t = 3T$, $4T$ y $5T$, la respuesta alcanza 95, 98.2 y 99.3%, respectivamente, del valor final. Por tanto, para $t \geqslant 4T$, la respuesta permanece dentro del 2% del valor final. Como se observa en la Ecuación (5-3), el estado estacionario se alcanza matemáticamente sólo después de un tiempo infinito. Sin embargo, en la práctica, una estimación razonable del tiempo de respuesta es la longitud de tiempo que necesita la curva de respuesta para alcanzar la línea de 2% del valor final, o cuatro constantes de tiempo.

Respuesta rampa unitaria de sistemas de primer orden. Como la transformada de Laplace de la función rampa unitaria es $1/s^2$, se obtiene la salida del sistema de la Figura 5-1(a), como

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1}\,\frac{1}{s^2}$$

Desarrollando $C(s)$ en fracciones simples se obtiene

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1} \tag{5-5}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-5), se obtiene

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \tag{5-6}$$

De este modo, la señal de error $e(t)$ es

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= T(1 - e^{-t/T}) \end{aligned}$$

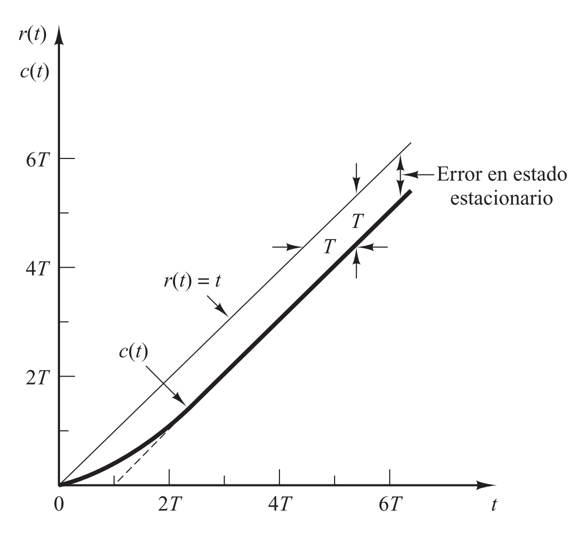


Figura 5-3. Respuesta a rampa unitaria del sistema mostrado en la Figura 5-1(a).

Conforme t tiende a infinito, $e^{-t/T}$ se aproxima a cero y, por tanto, la señal de error $e(t)$ se aproxima a T o

$$e(\infty) = T$$

La entrada rampa unitaria y la salida del sistema se muestran en la Figura 5-3. El error después de la entrada rampa unitaria es igual a T para una t suficientemente grande. Cuanto más pequeña es la constante de tiempo T, menor es el error en estado estacionario después de la entrada rampa.

Respuesta impulso unitario de sistemas de primer orden. Para la entrada impulso unitario, $R(s) = 1$ y la salida del sistema de la Figura 5-1(a) pueden obtenerse como

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \tag{5-7}$$

La transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-7) produce

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \tag{5-8}$$

La curva de respuesta obtenida mediante la Ecuación (5-8) aparece en la Figura 5-4.

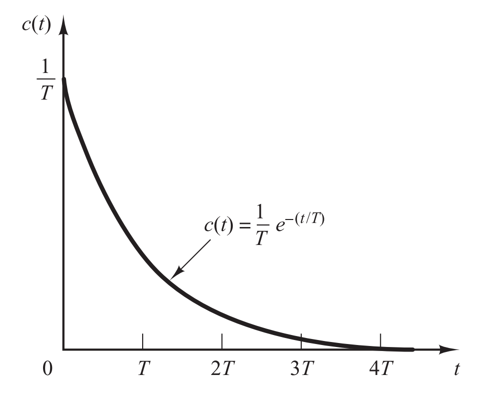


Figura 5-4. Respuesta a impulso unitario del sistema mostrado en la Figura 5-1(a).

Una propiedad importante de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. En el análisis anterior, se demostró que, para la entrada rampa unitaria, la salida $c(t)$ es

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \qquad \text{[Véase Ecuación (5-6)]}$$

Para la entrada escalón unitario, que es la derivada de la entrada rampa unitaria, la salida $c(t)$ es

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \qquad \text{[Véase Ecuación (5-3)]}$$

Por último, para la entrada impulso unitario, que es la derivada de la entrada escalón unitario, la salida $c(t)$ es

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \qquad \text{[Véase Ecuación (5-8)]}$$

Una comparación de las respuestas del sistema para estas tres entradas indica con claridad que la respuesta a la derivada de una señal de entrada se obtiene diferenciando la respuesta del sistema para la señal original. También se observa que la respuesta para la integral de la señal original se obtiene integrando la respuesta del sistema para la señal original y determinando las constantes de integración a partir de la condición inicial de salida cero. Esta es una propiedad de los sistemas lineales e invariantes con el tiempo. Los sistemas lineales y variables con el tiempo y los sistemas no lineales no poseen esta propiedad.

5-3 Sistemas de segundo orden

En esta sección, se obtendrá la respuesta de un sistema de control típico de segundo orden para una entrada escalón, rampa e impulso. Aquí se considera un servomotor como ejemplo de un sistema de segundo orden.

Servosistema. El servosistema que se muestra en la Figura 5-5(a) consiste en un controlador proporcional y elementos de carga (elementos de inercia y fricción viscosa). Se supone que se desea controlar la posición de salida c de forma que siga a la posición de entrada r.

La ecuación para los elementos de carga es

$$J\ddot{c} + B\dot{c} = T$$

donde T es el par producido por el controlador proporcional de ganancia K. Tomando la transformada de Laplace a ambos lados de esta última ecuación, suponiendo condiciones iniciales nulas, se obtiene

$$Js^2C(s) + BsC(s) = T(s)$$

Por tanto, la función de transferencia entre $C(s)$ y $T(s)$ es

$$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js + B)}$$

Utilizando esta función transformada, la Figura 5-5(a) se puede redibujar como se muestra en la Figura 5-5(b), que se puede modificar como se muestra en la Figura 5-5(c). La función de transferencia en lazo cerrado se obtiene entonces como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + (B/J)s + (K/J)}$$

Tal sistema en el que la función de transferencia en lazo cerrado posee dos polos se denomina sistema de segundo orden. (Algunos sistemas de segundo orden pueden contener uno o dos ceros.)

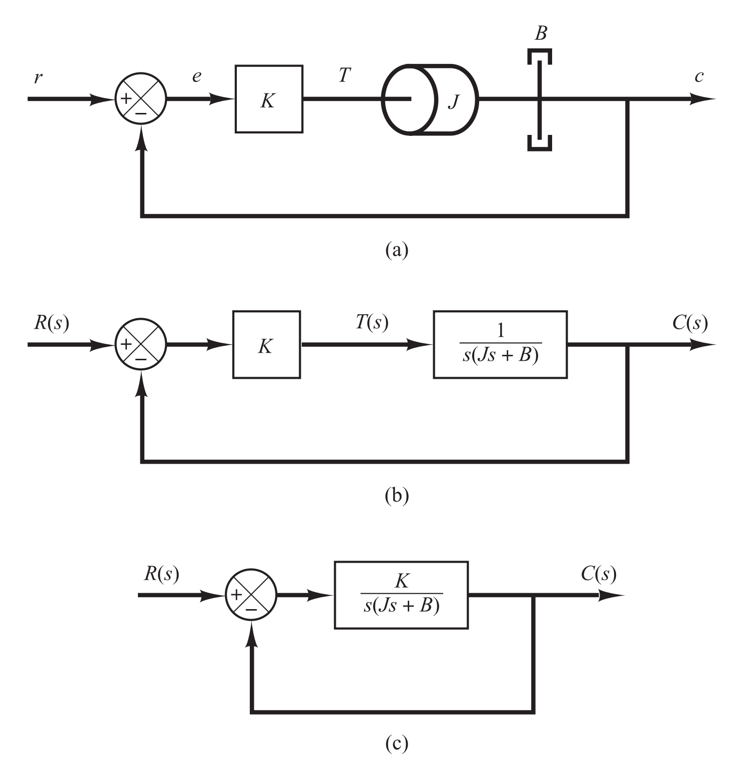


Figura 5-5. (a) Servosistema; (b) diagrama de bloques; (c) diagrama de bloques simplificado.

Respuesta escalón de sistemas de segundo orden. La función de transferencia en lazo cerrado del sistema de la Figura 5-5(c) es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} \tag{5-9}$$

que puede reescribirse como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{K}{J}}{\left[s + \dfrac{B}{2J} + \sqrt{\left(\dfrac{B}{2J}\right)^2 - \dfrac{K}{J}}\right]\left[s + \dfrac{B}{2J} - \sqrt{\left(\dfrac{B}{2J}\right)^2 - \dfrac{K}{J}}\right]}$$

Los polos en lazo cerrado son complejos si $B^2 - 4JK < 0$, y son reales si $B^2 - 4JK \geqslant 0$. En el análisis de la respuesta transitoria, es conveniente escribir

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2, \qquad \frac{B}{J} = 2\zeta\omega_n = 2\sigma$$

donde σ se denomina *atenuación*; ω_n, *frecuencia natural no amortiguada*, y ζ, *factor de amortiguamiento relativo* del sistema. El factor de amortiguamiento relativo ζ es el cociente entre el amortiguamiento real B y el amortiguamiento crítico $B_c = 2\sqrt{JK}$ o bien

$$\zeta = \frac{B}{B_c} = \frac{B}{2\sqrt{JK}}$$

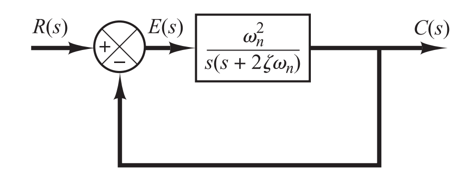


Figura 5-6. Sistema de segundo orden.

En términos de ζ y ω_n, el sistema de la Figura 5-5(c) se convierte en el que aparece en la Figura 5-6, y la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ obtenida mediante la Ecuación (5-9) se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{5-10}$$

Esta forma se denomina *forma estándar* del sistema de segundo orden.

El comportamiento dinámico del sistema de segundo orden se describe a continuación en términos de dos parámetros ζ y ω_n. Si $0 < \zeta < 1$, los polos en lazo cerrado son complejos conjugados y se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s. El sistema, entonces, se denomina subamortiguado y la respuesta transitoria es oscilatoria. Si $\zeta = 0$, la respuesta transitoria no se amortigua. Si $\zeta = 1$, el sistema se denomina críticamente amortiguado. Los sistemas sobreamortiguados corresponden a $\zeta > 1$.

Ahora se obtendrá la respuesta del sistema que aparece en la Figura 5-6 para una entrada escalón unitario. Se considerarán tres casos diferentes: el subamortiguado ($0 < \zeta < 1$), el críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) y el sobreamortiguado ($\zeta > 1$).

1) *Caso subamortiguado* ($0 < \zeta < 1$): en este caso, $C(s)/R(s)$ se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$. La frecuencia ω_d se denomina *frecuencia natural amortiguada*. Para una entrada escalón unitario, $C(s)$ se escribe como

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \tag{5-11}$$

La transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-11) se obtiene con facilidad si $C(s)$ se escribe de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

En el Capítulo 2 se mostró que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t}\,\mathrm{sen}\,\omega_d t$$

Por tanto, la transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-11) se obtiene como

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[C(s)] &= c(t)\\ &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d t\right)\\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), \qquad \text{para } t \geqslant 0 \qquad (5\text{-}12)\end{aligned}$$

Este resultado se obtiene directamente usando una tabla de transformadas de Laplace. A partir de la Ecuación (5-12) se observa que la frecuencia de oscilación transitoria es la frecuencia natural amortiguada ω_d y que, por tanto, varía con el factor de amortiguamiento relativo ζ. La señal de error para este sistema es la diferencia entre la entrada y la salida, y es

$$\begin{aligned}e(t) &= r(t) - c(t)\\ &= e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d t\right), \qquad \text{para } t \geqslant 0\end{aligned}$$

Esta señal de error presenta una oscilación sinusoidal amortiguada. En estado estacionario, o en $t = \infty$, no existe un error entre la entrada y la salida.

Si el factor de amortiguamiento relativo ζ es igual a cero, la respuesta se vuelve no amortiguada y las oscilaciones continúan indefinidamente. La respuesta $c(t)$ para el caso del amortiguamiento cero se obtiene sustituyendo $\zeta = 0$ en la Ecuación (5-12), lo cual produce

$$c(t) = 1 - \cos\omega_n t, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \qquad (5\text{-}13)$$

Por tanto, a partir de la Ecuación (5-13), se establece que ω_n representa la frecuencia natural no amortiguada del sistema. Es decir, ω_n es la frecuencia a la cual el sistema oscilará si el amortiguamiento disminuyera a cero. Si el sistema lineal tiene cualquier cantidad de amortiguamiento, no se puede observar experimentalmente la frecuencia natural no amortiguada. La frecuencia que se observa es la frecuencia natural amortiguada ω_d, que es igual a $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Esta frecuencia siempre es menor que la frecuencia natural no amortiguada. Un aumento en ζ reduciría la frecuencia natural amortiguada ω_d. Si ζ aumenta más de la unidad, la respuesta se vuelve sobreamortiguada y no oscilará.

2) *Caso críticamente amortiguado* ($\zeta = 1$): si los dos polos de $C(s)/R(s)$ son casi iguales, el sistema se aproxima mediante uno críticamente amortiguado.

Para una entrada escalón unitario, $R(s) = 1/s$ y $C(s)$ se escribe como

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2 s} \qquad (5\text{-}14)$$

La transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-14) se encuentra como

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t), \qquad \text{para } t \geqslant 0 \qquad (5\text{-}15)$$

Este resultado se obtiene suponiendo que ζ se aproxima a la unidad en la Ecuación (5-12) y utilizando el límite siguiente:

$$\lim_{\zeta\to 1}\frac{\operatorname{sen}\omega_d t}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \lim_{\zeta\to 1}\frac{\operatorname{sen}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \omega_n t$$

3) *Caso sobreamortiguado* ($\zeta > 1$): en este caso, los dos polos de $C(s)/R(s)$ son reales negativos y diferentes. Para una entrada escalón unitario, $R(s) = 1/s$ y $C(s)$ se escriben como

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s} \tag{5-16}$$

La transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-16) es:

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}\, e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}\, e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &= 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right), \qquad \text{para } t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{5-17}$$

donde $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ y $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$. Por tanto, la respuesta $c(t)$ incluye dos términos exponenciales que decaen.

Cuando ζ es apreciablemente mayor que la unidad, uno de los dos exponenciales que decaen disminuye mucho más rápido que el otro, por lo que el término exponencial que decae más rápido puede pasarse por alto (corresponde a una constante de tiempo más pequeña). Es decir, si $-s_2$ se localiza mucho más cerca del eje $j\omega$ que $-s_1$ (lo cual significa que $|s_2| \ll |s_1|$), para una solución aproximada se puede no considerar $-s_1$. Esto se permite debido a que el efecto de $-s_1$ en la respuesta es mucho más pequeño que el de $-s_2$, ya que el término que incluye s_1 en la Ecuación (5-17) se descompone mucho más rápido que el término que tiene a s_2. Una vez desaparecido el término exponencial que decae más rápido, la respuesta es similar a la de un sistema de primer orden, y $C(s)/R(s)$ se aproxima mediante:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{s_2}{s + s_2}$$

Esta forma aproximada es una consecuencia directa de que los valores iniciales y los valores finales tanto del $C(s)/R(s)$ original como del aproximado coincidan.

Con la función de transferencia aproximada $C(s)/R(s)$, la respuesta escalón unitario se obtiene como

$$C(s) = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s}$$

La respuesta del tiempo $c(t)$ es, entonces,

$$c(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0$$

Esto proporciona una respuesta escalón unitario aproximada cuando uno de los polos de $C(s)/R(s)$ puede pasarse por alto.

La Figura 5-7 contiene una familia de curvas $c(t)$ con diversos valores de ζ, donde la abscisa es la variable adimensional $\omega_n t$. Las curvas sólo son funciones de ζ y se obtienen a partir de las

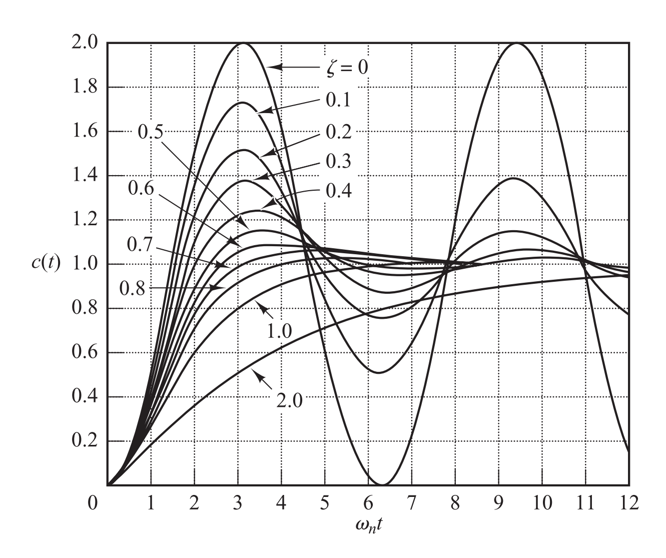


Figura 5-7. Curvas de respuesta a escalón unitario del sistema mostrado en la Figura 5-6.

Ecuaciones (5-12), (5-15) y (5-17). El sistema descrito mediante estas ecuaciones estaba inicialmente en reposo.

Obsérvese que los dos sistemas de segundo orden que tienen el mismo ζ pero diferente ω_n presentarán la misma sobreelongación y mostrarán el mismo patrón oscilatorio. Se dice que tales sistemas tienen la misma estabilidad relativa.

Es importante observar que, para los sistemas de segundo orden, cuyas funciones de transferencia en lazo cerrado son diferentes de las obtenidas mediante la Ecuación (5-10), las curvas de respuesta escalón se ven muy distintas de las que aparecen en la Figura 5-7.

En la Figura 5-7 se observa que un sistema subamortiguado con ζ entre 0.5 y 0.8 se acerca al valor final con mayor rapidez que un sistema críticamente amortiguado o sobreamortiguado. Entre los sistemas que responden sin oscilación, un sistema críticamente amortiguado presenta la respuesta más rápida. Un sistema sobreamortiguado siempre es lento para responder a las entradas.

Definiciones de las especificaciones de respuesta transitoria. En muchos casos prácticos, las características de desempeño deseadas del sistema de control se especifican en términos de cantidades en el dominio del tiempo. Los sistemas que pueden almacenar energía no responden instantáneamente y presentan respuestas transitorias cada vez que están sujetos a entradas o perturbaciones.

Con frecuencia, las características de desempeño de un sistema de control se especifican en términos de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario, puesto que esta es fácil de generar y es suficientemente drástica. (Si se conoce la respuesta a una entrada escalón, es matemáticamente posible calcular la respuesta para cualquier entrada.)

La respuesta transitoria de un sistema para una entrada escalón unitario depende de las condiciones iniciales. Por conveniencia al comparar respuestas transitorias de varios sistemas, es una práctica común usar la condición inicial estándar de que el sistema está en reposo al inicio, por lo cual la salida y todas las derivadas con respecto al tiempo son cero. De este modo, las características de respuesta se comparan con facilidad.

La respuesta transitoria de un sistema de control práctico muestra con frecuencia oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estacionario. Al especificar las características de la

respuesta transitoria de un sistema de control para una entrada escalón unitario, es común especificar lo siguiente:

1. Tiempo de retardo, t_d
2. Tiempo de subida, t_r
3. Tiempo pico, t_p
4. Sobreelongación, M_p
5. Tiempo de asentamiento, t_s

Estas especificaciones se definen enseguida y aparecen en forma gráfica en la Figura 5-8.

1. Tiempo de retardo t_d: el tiempo de retardo es el tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.
2. Tiempo de subida, t_r: el tiempo de subida es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90%, del 5 al 95% o del 0 al 100% de su valor final. Para sistemas subamortiguados de segundo orden, por lo general se usa el tiempo de subida de 0 a 100%. Para sistemas sobreamortiguados, suele usarse el tiempo de levantamiento de 10 a 90%.
3. Tiempo pico, t_p: el tiempo pico es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobreelongación.
4. Sobreelongación máxima (porcentaje), M_p: la máxima sobreelongación es el máximo valor del pico de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad. Si el valor final en estado estacionario de la respuesta es diferente de la unidad, es frecuente utilizar el porcentaje de sobreelongación máxima. Se define mediante

$$\text{Porcentaje de sobreelongación máxima} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

   La cantidad de sobreelongación máxima (en porcentaje) indica de manera directa la estabilidad relativa del sistema.
5. Tiempo de asentamiento, t_s: El tiempo de asentamiento es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final (por lo general, de 2 o 5%). El tiempo de asentamiento se relaciona con la mayor constante de tiempo del sistema de control. Los objetivos del diseño del sistema en cuestión determinan qué criterio de error en porcentaje utilizar.

Las especificaciones en el dominio del tiempo que se han proporcionado son muy importantes, ya que casi todos los sistemas de control son sistemas en el dominio del tiempo; es decir,

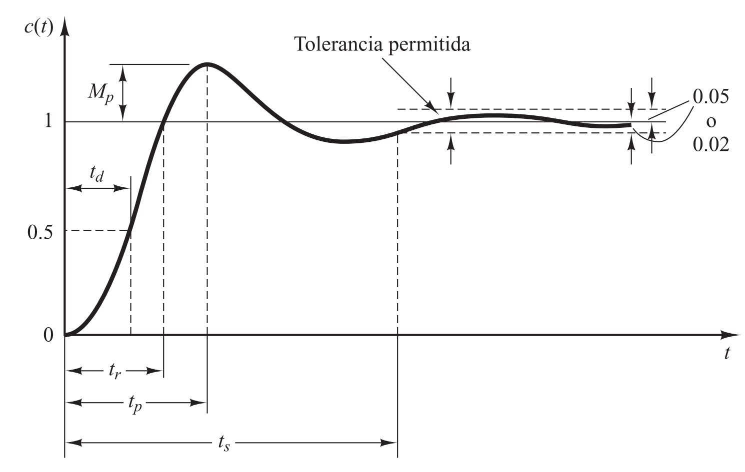


Figura 5-8. Curva de respuesta a escalón unitario con t_d, t_r, t_p, M_p y t_s.

deben presentar respuestas de tiempo aceptables. (Esto significa que el sistema de control debe modificarse hasta que la respuesta transitoria sea satisfactoria.)

Obsérvese que todas estas especificaciones no se aplican necesariamente a cualquier caso determinado. Por ejemplo, para un sistema sobreamortiguado no se aplican los términos tiempo pico y sobreelongación máxima. (En los sistemas que producen errores en estado estacionario para entradas escalón, este error debe conservarse dentro de un nivel de porcentaje especificado. En la Sección 5-9 se incluyen análisis detallados de los errores en estado estacionario.)

Algunos comentarios sobre las especificaciones de la respuesta transitoria. Excepto para ciertas aplicaciones en las que no se pueden tolerar oscilaciones, es conveniente que la respuesta transitoria sea suficientemente rápida y amortiguada. Por tanto, para una respuesta transitoria conveniente de un sistema de segundo orden, el factor de amortiguamiento relativo debe estar entre 0.4 y 0.8. Valores pequeños de $\zeta(\zeta < 0.4)$ producen un valor de la sobreelongación excesivo en la respuesta transitoria, y un sistema con un valor grande de $\zeta(\zeta > 0.8)$ responde con lentitud.

Más adelante se mostrará el conflicto entre la sobreelongación máxima y el tiempo de subida. En otras palabras, tanto la sobreelongación máxima como el tiempo de subida no pueden hacerse más pequeños de forma simultánea. Si uno de ellos se reduce, el otro necesariamente aumenta.

Sistemas de segundo orden y especificaciones de la respuesta transitoria. A continuación, se obtendrá el tiempo de subida, el tiempo pico, la sobreelongación máxima y el tiempo de asentamiento del sistema de segundo orden obtenido mediante la Ecuación (5-10). Estos valores se obtendrán en términos de ζ y ω_n. Se supone que el sistema está subamortiguado.

Tiempo de subida t_r: si se remite a la Ecuación (5-12), se obtiene el tiempo de subida t_r, suponiendo que $c(t_r) = 1$, o que

$$c(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r}\left(\cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\text{sen}\,\omega_d t_r\right) \tag{5-18}$$

Como $e^{-\zeta\omega_n t_r} \neq 0$, se obtiene la ecuación siguiente a partir de la Ecuación (5-18):

$$\cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\text{sen}\,\omega_d t_r = 0$$

Como $\omega_n = \sqrt{1-\zeta^2} = \omega_d$ y $\zeta\omega_n = \sigma$, se tiene

$$\tan\omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

Por tanto, el tiempo de subida t_r es

$$t_r = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{-\sigma}\right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \tag{5-19}$$

donde β se define en la Figura 5-9. Es evidente que para un valor pequeño de t_r, ω_d debe ser grande.

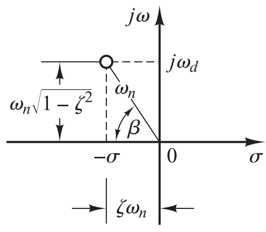


Figura 5-9. Definición del ángulo β.

Tiempo pico t_p: si se remite a la Ecuación (5-12), se obtiene el tiempo pico diferenciando $c(t)$ con respecto al tiempo y suponiendo que esta derivada es igual a cero. Como

$$\frac{dc}{dt} = \zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d t\right)$$
$$+\, e^{-\zeta\omega_n t}\left(\omega_d \operatorname{sen}\omega_d t - \frac{\zeta\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\omega_d t\right)$$

y los términos de coseno de esta última ecuación se cancelan uno al otro, dc/dt, evaluada en $t = t_p$, se simplifica a

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_p} = (\operatorname{sen}\omega_d t_p)\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\zeta\omega_n t_p} = 0$$

Esta última ecuación da lugar a la ecuación siguiente:

$$\operatorname{sen}\omega_d t_p = 0$$

o bien

$$\omega_d t_p = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ ...$$

Como el tiempo pico corresponde al primer pico sobreelongación máximo, $\omega_d t_p = \pi$. Por tanto,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \tag{5-20}$$

El tiempo pico t_p corresponde a medio ciclo de la frecuencia de oscilación amortiguada.

Sobreelongación máxima M_p: la sobreelongación máxima se presenta en el tiempo pico o en $t = t_p = \pi/\omega_d$. Por tanto, a partir de la Ecuación (5-12), M_p se obtiene como

$$\begin{aligned} M_p &= c(t_p) - 1 \\ &= -e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)}\left(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\pi\right) \\ &= e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \end{aligned} \tag{5-21}$$

El porcentaje de sobreelongación máxima es $e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} \times 100\%$.

Si el valor final $c(\infty)$ de la salida no es la unidad, entonces se necesita utilizar la ecuación siguiente:

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)}$$

Tiempo de asentamiento t_s: para un sistema subamortiguado de segundo orden, la respuesta transitoria se obtiene a partir de la Ecuación (5-12),

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), \qquad \text{para } t \geqslant 0$$

Las curvas $1 \pm (e^{-\zeta\omega_n t}/\sqrt{1-\zeta^2})$ son las curvas envolventes de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario. La curva de respuesta $c(t)$ siempre permanece dentro de un par de curvas envolventes, como se aprecia en la Figura 5-10. La constante de tiempo de estas curvas envolventes es $1/\zeta\omega_n$.

La velocidad de decaimiento de la respuesta transitoria depende del valor de la constante de tiempo $1/\zeta\omega_n$. Para un ω_n determinado, el tiempo de asentamiento t_s es una función del factor de

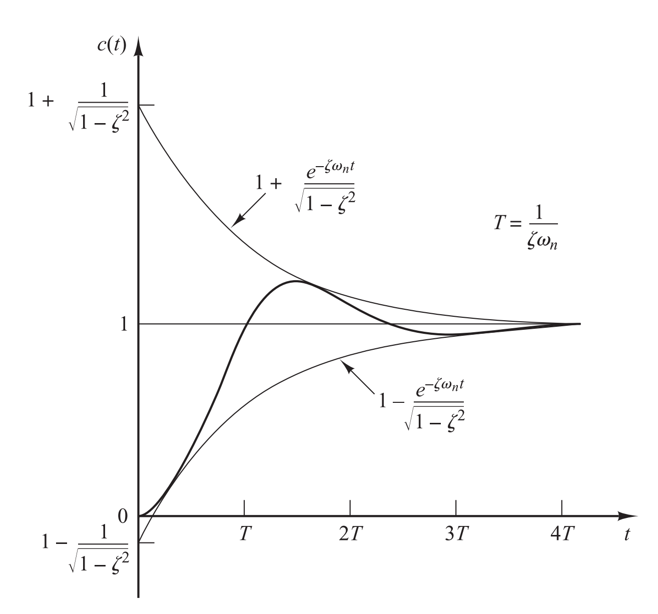


Figura 5-10. Par de curvas envolventes para la curva de respuesta a escalón unitario del sistema mostrado en la Figura 5-6.

amortiguamiento relativo ζ. A partir de la Figura 5-7, se observa que, para el mismo ω_n y para un rango de ζ entre 0 y 1 el tiempo de asentamiento t_s para un sistema ligeramente amortiguado es más grande que para un sistema amortiguado de manera moderada. Para un sistema sobreamortiguado, el tiempo de asentamiento t_s se vuelve más grande debido al inicio lento de la respuesta.

El tiempo de asentamiento que corresponde a una banda de tolerancia de $\pm 2\%$ o $\pm 5\%$ se mide en función de la constante de tiempo $T = 1/\zeta\omega_n$ a partir de las curvas de la Figura 5-7 para diferentes valores de ζ. Los resultados se muestran en la Figura 5-11. Para $0 < \zeta < 0.9$, si se utiliza el criterio del 2%, t_s es aproximadamente cuatro veces la constante de tiempo del sistema. Si se emplea el criterio del 5%, t_s es aproximadamente tres veces la constante de tiempo. Obsérvese que el tiempo de asentamiento alcanza un valor mínimo alrededor de $\zeta = 0.76$ (para el criterio del 2%) o de $\zeta = 0.68$ (para el criterio del 5%), y después aumenta casi linealmente para valores grandes de ζ. Las discontinuidades en las curvas de la Figura 5-11 surgen debido a que un cambio infinitesimal en el valor de ζ puede provocar un cambio finito en el tiempo de asentamiento.

Por conveniencia, cuando se comparan las respuestas de los sistemas, por lo general se define el tiempo de asentamiento t_s como

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad \text{(criterio del 2\%)} \tag{5-22}$$

o bien

$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad \text{(criterio del 5\%)} \tag{5-23}$$

Obsérvese que el tiempo de asentamiento es inversamente proporcional al producto del factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural no amortiguada del sistema. Como el valor de ζ se determina, por lo general, a partir de los requerimientos de la sobreelongación máxima permisible, el tiempo de asentamiento se determina principalmente mediante la frecuencia natural no amortiguada ω_n. Esto significa que la duración del período transitorio puede variarse, sin modificar la sobreelongación máxima, ajustando la frecuencia natural no amortiguada ω_n.

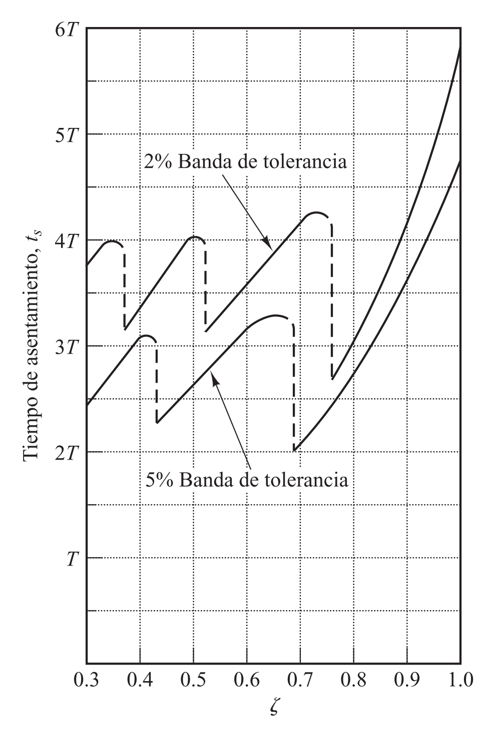


Figura 5-11. Tiempo de asentamiento t_s frente a las curvas ζ.

A partir del análisis anterior, es evidente que, para una respuesta rápida, ω_n debe ser grande. Para limitar la sobreelongación máxima M_p y para reducir el tiempo de asentamiento, el factor de amortiguamiento relativo ζ no debe ser demasiado pequeño. La relación entre la sobreelongación en porcentaje M_p y el factor de amortiguamiento relativo ζ se presenta en la Figura 5-12. Obsérvese que, si el factor de amortiguamiento relativo está entre 0.4 y 0.7, el porcentaje de sobreelongación máxima para la respuesta escalón está entre 25 y 4%.

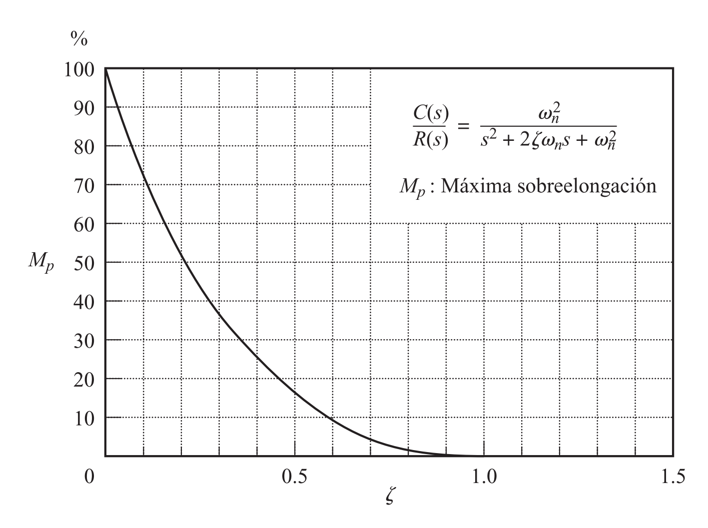


Figura 5-12. M_p frente a la curva ζ.

Es importante darse cuenta de que las ecuaciones que se han obtenido para el tiempo de subida, tiempo de pico, sobreelongación máxima y tiempo de asentamiento son válidas únicamente para el sistema de segundo orden estándar definido por la Ecuación (5-10). Si el sistema de segundo orden contiene uno o dos ceros, la forma de la curva de respuesta a un escalón unitario será bastante diferente de las que se muestran en la Figura 5-7.

EJEMPLO 5-1 Considere el sistema de la Figura 5-6, en el que $\zeta = 0.6$ y $\omega_n = 5$ rad/seg. Se va a obtener el tiempo de subida t_s, el tiempo pico t_p, la sobreelongación máxima M_p y el tiempo de asentamiento t_s cuando el sistema está sujeto a una entrada escalón unitario.

A partir de los valores dados de ζ y ω_n se obtiene $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 4$ y $\sigma = \zeta\omega_n = 3$.

Tiempo de subida t_s: el tiempo de subida es

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{3.14 - \beta}{4}$$

donde β se obtiene mediante

$$\beta = \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\sigma} = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 0.93 \text{ rad}$$

Por lo tanto, el tiempo de subida t_s es

$$t_r = \frac{3.14 - 0.93}{4} = 0.55 \text{ seg}$$

Tiempo pico t_p: el tiempo pico es

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{4} = 0.785 \text{ seg}$$

Sobreelongación máxima M_p: la sobreelongación máxima es

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(3/4)\times 3.14} = 0.095$$

Por tanto, el porcentaje de sobreelongación máxima es 9.5%.

Tiempo de asentamiento t_s: para el criterio del 2%, el tiempo de asentamiento es

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{3} = 1.33 \text{ seg}$$

Para el criterio del 5%,

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{3} = 1 \text{ seg}$$

Servosistema con realimentación de velocidad. La derivada de la señal de salida se usa para mejorar el comportamiento del sistema. Al obtener la derivada de la señal de posición de salida es conveniente utilizar un tacómetro en lugar de diferenciar físicamente la señal de salida. (Obsérvese que la diferenciación amplifica los efectos del ruido. De hecho, si existen ruidos discontinuos, la diferenciación amplifica estos más que la señal útil. Por ejemplo, la salida de un potenciómetro es una señal de voltaje discontinua porque, conforme el cursor del potenciómetro se mueve sobre la bobina, se inducen voltajes en las vueltas de intercambio y, por tanto, se generan transitorios. Por tal razón, a la salida del potenciómetro no debe seguirle un elemento de diferenciación.)

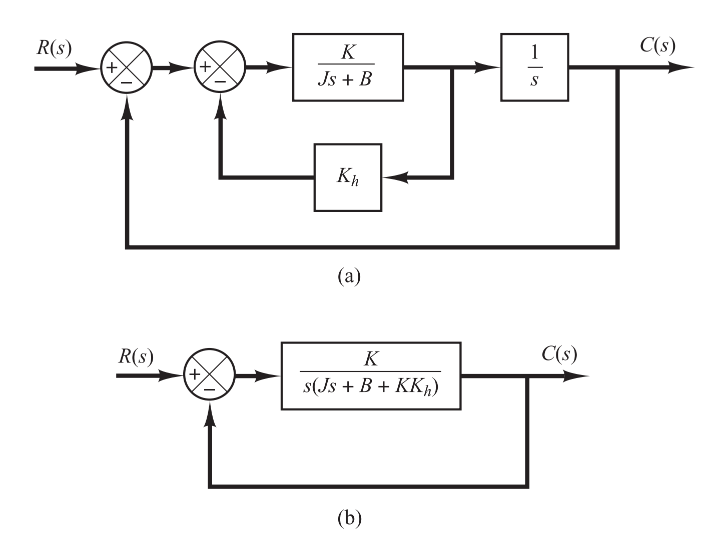


Figura 5-13. (a) Diagrama de bloques de un servosistema; (b) diagrama de bloques simplificado.

El tacómetro, generador especial de cc, se utiliza frecuentemente para medir la velocidad sin un proceso de diferenciación. La salida de un tacómetro es proporcional a la velocidad angular del motor.

Considérese el sistema de seguimiento de la Figura 5-13(a). En este aparato se realimenta la señal de velocidad a la entrada, junto con la señal de posición, para producir una señal de error. En cualquier sistema de seguimiento, tal señal de velocidad se genera con facilidad mediante un tacómetro. El diagrama de bloques de la Figura 5-13(a) se simplifica, tal como se aprecia en la Figura 5-13(b), y se obtiene

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K} \tag{5-24}$$

Comparando la Ecuación (5-24) con la Ecuación (5-9), se observa que la realimentación de velocidad tiene el efecto de aumentar el amortiguamiento. El factor de amortiguamiento relativo ζ se convierte en

$$\zeta = \frac{B + KK_h}{2\sqrt{KJ}} \tag{5-25}$$

La frecuencia natural no amortiguada $\omega_n = \sqrt{K/J}$ no se ve afectada por la realimentación de velocidad. Considerando que la sobreelongación máxima para una entrada escalón unitario se controla manejando el valor del factor de amortiguamiento relativo ζ, se reduce la sobreelongación máxima ajustando la constante de realimentación de velocidad K_h para que ζ esté entre 0.4 y 0.7.

Recuérdese que la realimentación de velocidad tiene el efecto de aumentar el factor de amortiguamiento relativo sin afectar a la frecuencia natural no amortiguada del sistema.

EJEMPLO 5-2 Para el sistema de la Figura 5-13(a), determine los valores de la ganancia K y la constante de realimentación de velocidad K_h para que la sobreelongación máxima en la respuesta escalón unitario sea 0.2 y el tiempo pico sea 1 seg. Con estos valores de K y K_h obtenga el tiempo de subida y el tiempo de asentamiento. Suponga que $J = 1$ kg-m^2 y que $B = 1$ N-m/rad/seg.

Determinación de los valores de K y K_h: La sobreelongación máxima M_p se obtiene mediante la Ecuación (5-21) como

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

Este valor debe ser 0.2. Por tanto,

$$e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} = 0.2$$

o bien

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.61$$

lo cual lleva a

$$\zeta = 0.456$$

El tiempo pico t_p se especifica como 1 seg; Por tanto, a partir de la Ecuación (5-20),

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1$$

o bien

$$\omega_d = 3.14$$

Como ζ es 0.456, ω_n es

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.53$$

Como la frecuencia natural ω_n es igual a $\sqrt{K/J}$,

$$K = J\omega_n^2 = \omega_n^2 = 12.5 \text{ N-m}$$

Por tanto, K_h a partir de la Ecuación (5-25),

$$K_h = \frac{2\sqrt{KJ}\zeta - B}{K} = \frac{2\sqrt{K}\zeta - 1}{K} = 0.178 \text{ seg}$$

Tiempo de levantamiento t_r: A partir de la Ecuación (5-19), el tiempo de levantamiento t_r es

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

donde

$$\beta = \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\sigma} = \tan^{-1} 1.95 = 1.10$$

Por tanto, t_r es

$$t_r = 0.65 \text{ seg}$$

Tiempo de asentamiento t_s: Para el criterio del 2%,

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 2.48 \text{ seg}$$

Para el criterio del 5%,

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = 1.86 \text{ seg}$$

Respuesta impulso de sistemas de segundo orden. Para una entrada impulso unitario $r(t)$, la transformada de Laplace correspondiente es la unidad, o $R(s) = 1$. La respuesta impulso unitario $C(s)$ del sistema de segundo orden de la Figura 5-6 es

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

La transformada inversa de Laplace de esta ecuación da la solución en el tiempo para la respuesta $c(t)$, del modo siguiente:

Para $0 \leqslant \zeta < 1$,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \tag{5-26}$$

Para $\zeta = 1$,

$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \tag{5-27}$$

Para $\zeta > 1$,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \tag{5-28}$$

Obsérvese que, sin tomar la transformada inversa de Laplace de $C(s)$, también se obtiene el tiempo de respuesta $c(t)$ diferenciando la respuesta escalón unitario correspondiente, ya que la función impulso unitario es la derivada con respecto al tiempo de la función de escalón unitario. En la Figura 5-14 aparece una familia de curvas de respuesta impulso unitario obtenida mediante las Ecuaciones (5-26) y (5-27) con diversos valores de ζ. Las curvas $c(t)/\omega_n$ se dibujan frente a la variable adimensional $\omega_n t$ y, por tanto, sólo son funciones de ζ. Para los casos críticamente amortiguado y sobreamortiguado, la respuesta impulso unitario siempre es positiva o cero; es decir, $c(t) \geqslant 0$. Esto se aprecia en las Ecuaciones (5-27) y (5-28). Para el caso subamortiguado, la respuesta impulso unitario $c(t)$ oscila alrededor de cero y toma valores tanto positivos como negativos.

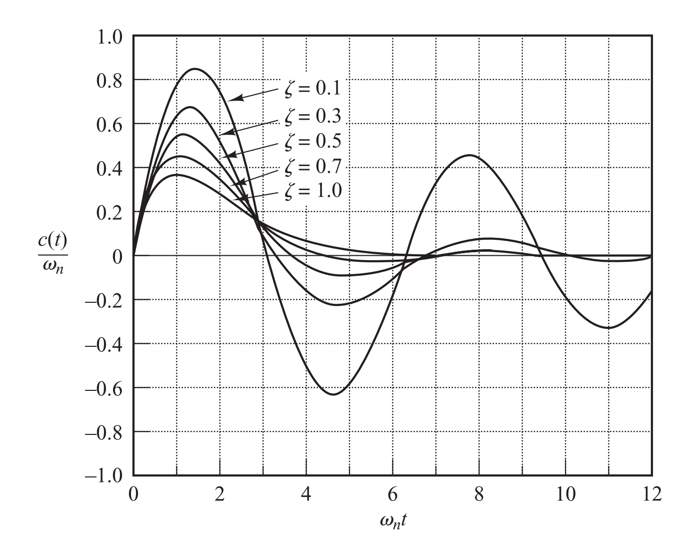


Figura 5-14. Curvas de respuesta a impulso unitario del sistema mostrado en la Figura 5-6.

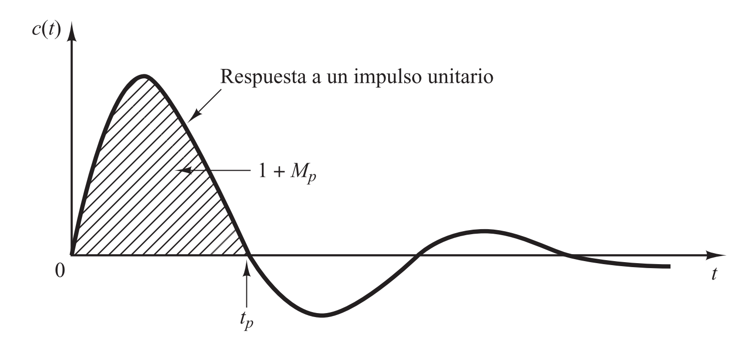


Figura 5-15. Curvas de respuesta a impulso unitario del sistema mostrado en la Figura 5-6.

A partir del análisis anterior, se concluye que si la respuesta impulso $c(t)$ no cambia de signo, el sistema es críticamente amortiguado o sobreamortiguado, en cuyo caso la respuesta escalón correspondiente no se sobrepasa pero aumenta o disminuye en forma monótona y tiende a un valor constante.

La sobreelongación máxima para la respuesta impulso unitario del sistema subamortiguado se da en

$$t = \frac{\tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}, \qquad \text{donde } 0 < \zeta < 1 \tag{5-29}$$

[La Ecuación (5-29) se puede obtener igualando dc/dt a cero y resolviendo para t.] La sobreelongación máxima es

$$c(t)_{\text{máx}} = \omega_n \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), \qquad \text{donde } 0 < \zeta < 1 \tag{5-30}$$

[La Ecuación 5-30) se puede obtener sustituyendo la Ecuación (5-29) en la Ecuación (5-26).]

Como la respuesta impulso unitario es la derivada con respecto al tiempo de la función de respuesta escalón unitario, la sobreelongación máxima M_p para la respuesta escalón unitario se encuentra a partir de la respuesta impulso unitario correspondiente. Es decir, el área bajo la curva de respuesta impulso unitario desde $t = 0$ hasta el tiempo del primer cero, tal como aparece en la Figura 5-15, es $1 + M_p$, donde M_p es la sobreelongación máxima (para la respuesta escalón unitario) obtenida mediante la Ecuación (5-21). El tiempo pico t_p (para la respuesta escalón unitario) obtenido mediante la Ecuación (5-20) corresponde al tiempo en que la respuesta impulso unitario cruza primero el eje de tiempo.

5-4 Sistemas de orden superior

En esta sección se presentará un análisis de la respuesta transitoria de los sistemas de orden superior en términos generales. Se verá que la respuesta de sistemas de orden superior es la suma de las respuestas de sistemas de primer orden y segundo orden.

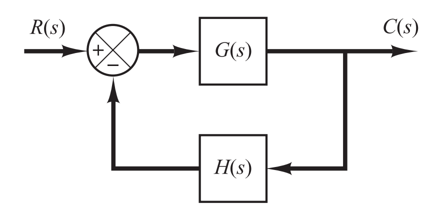


Figura 5-16. Sistema de control.

Respuesta transitoria de los sistemas de orden superior. Considérese el sistema de la Figura 5-16. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{5-31}$$

En general, $G(s)$ y $H(s)$ se obtienen como cocientes de polinomios en s, o bien

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \qquad \text{y} \qquad H(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

donde $p(s)$, $q(s)$, $n(s)$ y $d(s)$ son polinomios en s. A continuación, la función de transferencia en lazo cerrado obtenida con la Ecuación (5-31) se escribe como

$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)} \\ &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \qquad (m \leqslant n)\end{aligned}$$

La respuesta transitoria de este sistema a cualquier entrada determinada se obtiene mediante una simulación por computador (véase Sección 5-5). Si se pretende una expresión analítica para la respuesta transitoria, es preciso factorizar el polinomio del denominador. [Puede usarse MATLAB para encontrar las raíces del polinomio del denominador. Utilícese la orden `roots(den).`] Una vez factorizados el numerador y el denominador, $C(s)/R(s)$ se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_n)} \tag{5-32}$$

A continuación se examina el comportamiento de respuesta de este sistema para una entrada escalón unitario. Considérese primero el caso en el que todos los polos en lazo cerrado son reales y distintos. Para una entrada escalón unitario, la Ecuación (5-32) se escribe

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s + p_i} \tag{5-33}$$

donde a_i es el residuo del polo en $s = -p_i$. (Si el sistema contiene polos múltiples, entonces $C(s)$ terndrá términos de polos múltiples.) [El desarrollo en fracciones simples de $C(s)$ dado por la Ecuación (5-33), se puede obtener fácilmente con MATLAB. Utilice la orden residual.]

Si todos los polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s, las magnitudes relativas de los residuos determinan la importancia relativa de las componentes en

la forma desarrollada de $C(s)$. Si hay un cero en lazo cerrado cerca de un polo en lazo cerrado, el residuo en este polo es pequeño y el coeficiente del término de respuesta transitoria que corresponde a este polo se vuelve pequeño. Un par polo-cero cercanos entre sí se cancelarán efectivamente uno al otro. Si un polo se localiza muy lejos del origen, su residuo puede ser pequeño. Los valores transitorios que corresponden a tal polo remoto son pequeños y duran un tiempo corto. Los términos en la forma desarrollada de $C(s)$ que tienen residuos muy pequeños contribuyen poco a la respuesta transitoria, por lo que pueden pasarse por alto. Si se hace esto, el sistema de orden superior se aproxima mediante uno de orden inferior. (Tal aproximación nos permite con frecuencia estimar las características de respuesta de un sistema de orden superior a partir de las de uno simplificado.)

A continuación, considérese el caso en el que los polos de $C(s)$ están formados por polos reales y pares de polos complejos conjugados. Un par de polos complejos conjugados produce un término de segundo orden en s. Como la forma factorizada de la ecuación característica de orden superior está formada por términos de primer y segundo orden, la Ecuación (5-3) se vuelve a escribir como

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^{q} \frac{a_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^{r} \frac{b_k(s + \zeta_k\omega_k) + c_k\omega_k\sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k\omega_k s + \omega_k^2} \qquad (q + 2r = n)$$

donde se supone que los polos en lazo cerrado son distintos. [Si los polos en lazo cerrado contienen polos múltiples, $C(s)$ debe contener términos de polos múltiples]. A partir de esta última ecuación, se observa que la respuesta de un sistema de orden superior está compuesta de varios términos que contienen las funciones simples encontradas en las respuestas de los sistemas de primer y segundo orden. Por tanto, la respuesta escalón unitario $c(t)$, la transformada inversa de Laplace de $C(s)$, es

$$\begin{aligned} c(t) = a &+ \sum_{j=1}^{q} a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^{r} b_k e^{-\zeta_k\omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}\, t \\ &+ \sum_{k=1}^{r} c_k e^{-\zeta_k\omega_k t} \operatorname{sen} \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}\, t, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \end{aligned} \qquad (5\text{-}34)$$

En este caso, la curva de respuesta de un sistema estable de orden superior es la suma de un número de curvas exponenciales y curvas sinusoidales amortiguadas.

Si todos los polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s, los términos exponenciales y los términos sinusoidales amortiguados de la Ecuación (5-34) se aproximarán a cero, conforme el tiempo t aumente. Por tanto, la salida en estado estacionario es $c(\infty) = a$.

Supóngase que el sistema que se considera es estable. Por tanto, los polos en lazo cerrado que se localizan lejos del eje $j\omega$ tienen partes reales grandes y negativas. Los términos exponenciales que corresponden a estos polos llegan a cero con mucha rapidez. (Obsérvese que la distancia horizontal del polo en lazo cerrado al eje $j\omega$ determina el tiempo de asentamiento de los transitorios producidos por tal polo. Cuanto más pequeña es la distancia, más prolongado es el tiempo de asentamiento.)

Recuérdese que los polos en lazo cerrado determinan el tipo de respuesta transitoria, mientras que los ceros en lazo cerrado determinan principalmente la forma de la respuesta transitoria. Como se vio antes, los polos de la entrada $R(s)$ producen los términos de la respuesta en estado estacionario en la solución, mientras que los polos de $C(s)/R(s)$ se introducen en los términos exponenciales de la respuesta transitoria y/o en los términos sinusoidales amortiguados de la res-

puesta transitoria. Los ceros de $C(s)/R(s)$ no afectan a los exponentes en los términos exponenciales, pero afectan a las magnitudes y a los signos de los residuos.

Polos dominantes en lazo cerrado. La dominancia relativa de los polos en lazo cerrado se determina mediante el cociente de las partes reales de los polos en lazo cerrado, al igual que mediante las magnitudes relativas de los residuos evaluados en los polos en lazo cerrado. Las magnitudes de los residuos dependen tanto de los polos en lazo cerrado como de los ceros.

Si los cocientes de las partes reales son superiores a 5 y no hay ceros cerca, los polos en lazo cerrado más cercanos al eje $j\omega$ dominarán el comportamiento de la respuesta transitoria, debido a que corresponden a los términos de la respuesta transitoria que se disminuyen lentamente. Los polos en lazo cerrado que tienen efectos dominantes sobre el comportamiento de la respuesta transitoria se denominan *polos dominantes en lazo cerrado*. Con mucha frecuencia, los polos dominantes en lazo cerrado aparecen en forma de un par complejo conjugado. Los polos dominantes en lazo cerrado son los más importantes entre todos los polos en lazo cerrado.

Es frecuente que la ganancia de un sistema de orden superior se ajuste para que exista un par de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado. La presencia de tales polos en un sistema estable reduce el efecto de las no linealidades, tales como la zona muerta, el huelgo (*backlash*) y la fricción de Coulomb.

Análisis de estabilidad en el plano complejo. La estabilidad de un sistema lineal en lazo cerrado se determina a partir de la ubicación de los polos en lazo cerrado en el plano s. Si alguno de estos polos se encuentra en el semiplano derecho del plano s, entonces conforme aumenta el tiempo producirá el modo dominante, y la respuesta transitoria aumentará de forma monótona u oscilará con una amplitud creciente. Esto representa un sistema inestable. Para tal sistema, tan pronto como se conecta la alimentación, la salida aumenta con el tiempo. Si no ocurre una saturación en el sistema y no se incluye una detención mecánica, el sistema puede terminar por dañarse y fallar, ya que la respuesta de un sistema físico real no puede aumentar indefinidamente. Por ende, en el sistema de control lineal normal no se permiten los polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s. Si todos los polos en lazo cerrado se encuentran a la izquierda del eje $j\omega$, cualquier respuesta transitoria termina por alcanzar el equilibrio. Esto representa un sistema estable.

Que un sistema lineal sea estable o inestable es una propiedad del sistema mismo y no depende de la entrada ni de la función de excitación del sistema. Los polos de la entrada, o de la función de excitación, no afectan a la propiedad de estabilidad del sistema, sino sólo contribuyen a los términos de respuesta en estado estacionario en la solución. Por tanto, el problema de estabilidad absoluta se soluciona con facilidad al no elegir polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s, incluyendo el eje $j\omega$. (Matemáticamente, los polos en lazo cerrado sobre el eje $j\omega$ producirán oscilaciones, cuya amplitud no se reduce ni crece con el tiempo. Sin embargo, en los casos prácticos en los que hay ruido, la amplitud de las oscilaciones aumenta a una velocidad determinada por el nivel de la potencia del ruido. Por tanto, un sistema de control no debe tener polos en lazo cerrado en el eje $j\omega$.)

Obsérvese que el solo hecho de que todos los polos en lazo cerrado se encuentren en el semiplano izquierdo del plano s no garantiza características satisfactorias de respuesta transitoria. Si los polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado se encuentran cerca del eje $j\omega$, la respuesta transitoria presentará oscilaciones excesivas o será muy lenta. Por esta razón, a fin de garantizar características de respuesta transitoria rápidas y bien amortiguadas, es necesario que los polos en lazo cerrado del sistema se encuentren en una región determinada del plano complejo, como la región delimitada por el área sombreada de la Figura 5-17.

Como la estabilidad relativa y el comportamiento transitorio de un sistema de control en lazo cerrado se relacionan directamente con el patrón de polos y ceros en lazo cerrado en el

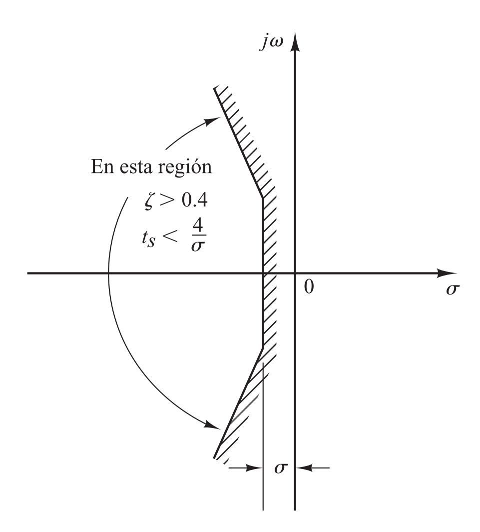


Figura 5-17. Región del plano complejo que satisface las condiciones $\zeta > 0.4$ y $t_s < 4/\sigma$.

plano s, con frecuencia es necesario ajustar uno o más parámetros para obtener los patrones convenientes. Los efectos de los parámetros que varían sobre los polos de un sistema en lazo cerrado se analizarán con detalle en el Capítulo 6.

5-5 Análisis de la respuesta transitoria con MATLAB

Introducción. El procedimiento práctico para dibujar las curvas de respuesta temporal de sistemas de orden mayor que segundo es mediante simulación con computador. En esta sección se presenta el enfoque computacional para el análisis de la respuesta transitoria con MATLAB. En particular se discute la respuesta escalón, impulso, rampa y las respuestas a otras entradas simples.

Representación de sistemas lineales en MATLAB. La función de transferencia de un sistema se representa mediante dos arrays de números. Considérese el sistema

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 25}{s^2 + 4s + 25} \tag{5-35}$$

Este sistema se representa como dos arrays, cada uno de los cuales contiene los coeficientes de los polinomios en potencias decrecientes de s del modo siguiente:

```
num = [2  25]
den = [1  4  25]
```

Una representación alternativa es

```
num = [0  2  25]
den = [1  4  25]
```

Esta expresión se completa añadiendo un cero. Obsérvese que si se añaden los ceros, la dimensión de los vectores «num» y «den» es la misma. Una ventaja de añadir los ceros es que los vectores «num» y «den» se pueden sumar directamente. Por ejemplo,

```
num + den = [0  2  25] + [1  4  25]
          = [1  6  50]
```

Si se conocen num y den (el numerador y denominador de la función de transferencia en lazo cerrado), intrucciones del tipo

```
step(num,den),   step(num,den,t)
```

generarán gráficas de respuestas escalón unitario. (En el comando step, t es el tiempo especificado por el usuario.)

Para un sistema de control definido en el espacio de estados, donde se conocen la matriz de estado **A**, la matriz de control **B**, la matriz de salida **C** y la matriz de transmisión directa **D** de las ecuaciones en el espacio de estados, el comando

```
step(A,B,C,D)   setp(A,B,C,D,t)
```

generará gráficas de respuestas escalón unitario. El vector de tiempo t queda determinado automáticamente cuando no se incluye de manera explícita en los comandos step.

Obsérvese que el comando step(sys) se puede utilizar para obtener la respuesta escalón unitario de un sistema. Primero se define el sistema mediante

```
sys = tf(num,den)
```

o bien

```
sys = ss(A,B,C,D)
```

Entonces, para obtener, por ejemplo, la respuesta escalón unitario, se introduce

```
step(sys)
```

en el computador.

Cuando los comandos step tienen argumentos en el lado izquierdo, como en

```
[y,x,t] = step(num,den,t)
[y,x,t] = step(A,B,C,D,iu)
[y,x,t] = step(A,B,C,D,iu,t)                (5-36)
```

no aparece una gráfica en la pantalla. Por tanto, es necesario usar un comando plot para ver las curvas de respuesta. Las matrices y y x contienen la salida y la respuesta del estado del sistema, respectivamente, evaluadas en los puntos de tiempo de cálculo t. (y tiene tantas columnas como salidas y una fila para cada elemento en t. x tiene tantas columnas como estados y una fila para cada elemento en t.)

Obsérvese, en la Ecuación (5-36), que el escalar iu es un índice dentro de las entradas del sistema y especifica qué entrada se va a usar para la respuesta, y t es el tiempo especificado por el usuario. Si el sistema contiene múltiples entradas y salidas, el comando step, tal como aparece en la Ecuación (5-36), produce una serie de gráficas de respuestas escalón, una para cada combinación de entrada y salida de

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

(Véanse los detalles en el Ejemplo 5-3.)

EJEMPLO 5-3 Considere el sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Obtenga las curvas de respuesta escalón unitario.

Aunque no es necesario obtener la expresión de la función de transferencia para el sistema, a fin de conseguir las curvas de respuesta escalón unitario con MATLAB se obtendrá tal expresión como referencia. Para el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

la matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$ es aquella que relaciona $\mathbf{Y}(s)$ y $\mathbf{U}(s)$ del modo siguiente:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

Tomando la transformada de Laplace de las ecuaciones en el espacio de estados, se obtiene

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s) \tag{5-37}$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s) \tag{5-38}$$

Al obtener la matriz de transferencia se supone que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Después, a partir de la Ecuación (5-37), se obtiene

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s) \tag{5-39}$$

Sustituyendo la Ecuación (5-39) en la Ecuación (5-38), se obtiene

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s)$$

Por tanto, la matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$ se obtiene mediante

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

La matriz de transferencia $\mathbf{G}(s)$ para el sistema determinado se convierte en

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -6.5 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + s + 6.5} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6.5 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + s + 6.5} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ s+7.5 & 6.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s-1}{s^2+s+6.5} & \dfrac{s}{s^2+s+6.5} \\ \dfrac{s+7.5}{s^2+s+6.5} & \dfrac{6.5}{s^2+s+6.5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Como el sistema contiene dos entradas y dos salidas, se definen cuatro funciones de transferencia, dependiendo de qué señales se consideran como entrada y cuáles como salida. Observe que, cuando se considera la señal u_1 como la entrada, se supone que la señal u_2 es cero, y viceversa. Las cuatro funciones de transferencia son

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{s-1}{s^2+s+6.5}, \qquad \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = \frac{s}{s^2+s+6.5}$$

$$\frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s+7.5}{s^2+s+6.5}, \qquad \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{6.5}{s^2+s+6.5}$$

Se supone que u_1 y u_2 son funciones escalón unidad. Las cuatro curvas de respuesta escalón individuales se dibujan mediante el comando

```
step(A,B,C,D)
```

El Programa MATLAB 5-1 produce cuatro curvas de respuesta escalón. Las curvas se muestran en la Figura 5-18. (Observe que el vector tiempo `t` se determina de forma automática puesto que la orden no incluye `t`.)

MATLAB Programa 5-1

```
A = [-1  -1;6.5  0];
B = [1  1;1  0];
C = [1  0;0  1];
D = [0  0;0  0];
step(A,B,C,D)
```

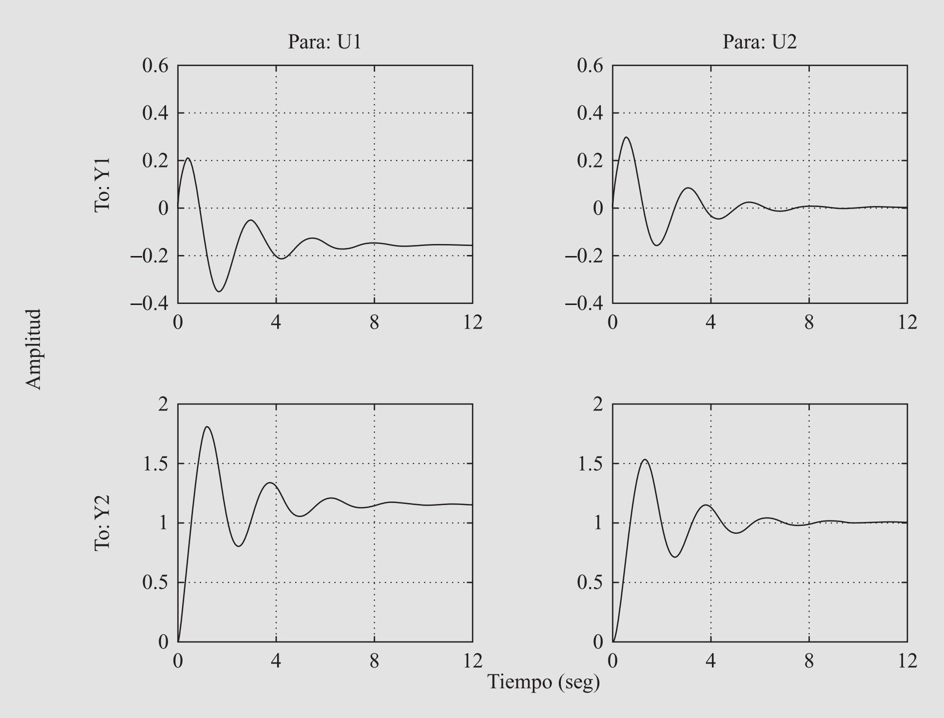


Figura 5-18. Curvas de respuesta a escalón unitario.

Para dibujar dos curvas de respuesta escalón para la entrada u_1 en un diagrama, y dos curvas de respuesta escalón para la entrada u_2 en otro diagrama, se utilizan los comandos

```
step(A,B,C,D,1)
```

y

```
step(A,B,C,D,2)
```

respectivamente. El Programa MATLAB 5-2 es un programa para dibujar dos curvas de respuesta escalón para la entrada u_1 en un diagrama y dos curvas de respuesta escalón para la entrada u_2 en otro diagrama. La Figura 5-19 muestra los dos diagramas, cada uno formado por dos curvas de respuesta escalón. (Este programa de MATLAB utiliza órdenes de texto. Refiérase al siguiente párrafo para estos comandos.)

MATLAB Programa 5-2

```
% ***** En este programa se representan las Curvas de
% respuesta escalón de un sistema que tiene dos entradas
%(u1 y u2) y dos salidas (y1 y y2) *****

% ***** Se representa en primer lugar la curva de respuesta
% escalón cuando la entrada es u1. A continuación se
% representa la curva de respuesta escalón cuando la entrada
% es u2 *****

% ***** Introducir las matrices A, B, C, y D *****

A = [-1  -1;6.5  0];
B = [1  1;1  0];
C = [1  0;0  1];
D = [0  0;0  0];

% ***** Para representar la curva de respuesta escalón
% cuando la entrada es u1, introduzca la orden
% 'step(A,B,C,D,1)' *****

step(A,B,C,D,1)
grid
title ('Respuesta a un escalón: Entrada = u1 (u2 = 0)')
text(3.4, -0.06,'Y1')
text(3.4, 1.4,'Y2')

% ***** A continuación se representa la curva de respuesta
% escalón cuando la entrada es u2. Introduzca la orden
% 'step(A,B,C,D,2)' *****

step(A,B,C,D,2)
grid
title ('Respuesta a un escalón: Entrada = u2 (u1 = 0)')
text(3,0.14,'Y1')
text(2.8,1.1,'Y2')
```

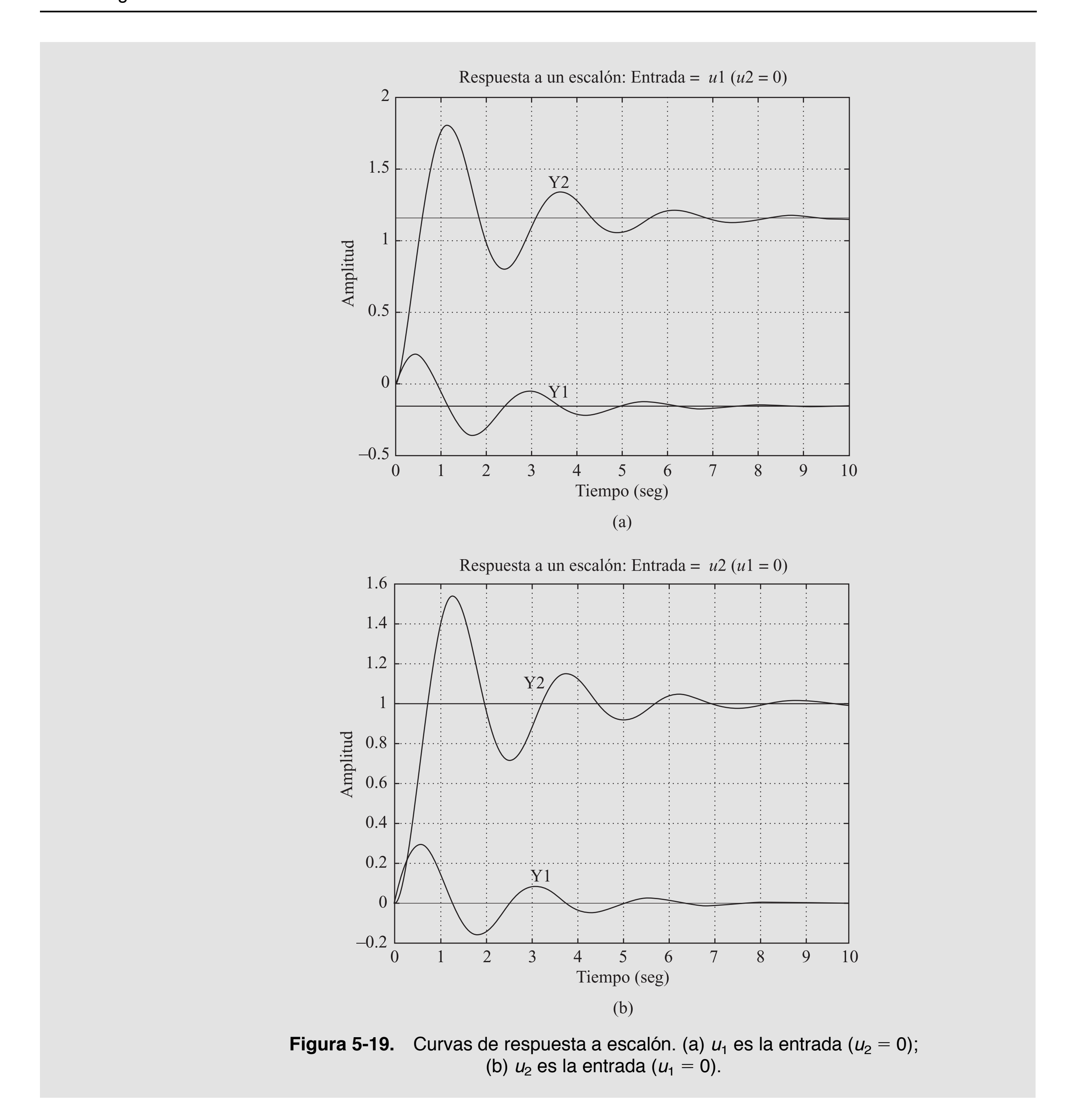


Figura 5-19. Curvas de respuesta a escalón. (a) u_1 es la entrada ($u_2 = 0$); (b) u_2 es la entrada ($u_1 = 0$).

Escritura de texto en la pantalla de las gráficas. Para escribir texto en la pantalla de las gráficas, introduzca, por ejemplo, los enunciados siguientes:

```
text(3.4,-0.06, 'Y1')
```

y

```
text(3.4,1.4,'Y2')
```

El primer enunciado le indica a la computadora que escriba 'Y1', empezando en las coordenadas $x = 3.4$, $y = -0.06$. De modo similar, el segundo enunciado le indica a la computadora que escriba 'Y2', empezando en las coordenadas $x = 3.4$, $y = 1.4$. [Véanse el Programa MATLAB 5-2 y la Figura 5-19(a).]

Otra forma de escribir un texto o textos en una gráfica es utilizar el comando `gtext`. La sintaxis es

```
gtext('text')
```

Cuando se ejecuta `gtext`, el computador espera hasta que el cursor se posiciona (utilizando el ratón) en la pantalla en la posición deseada. Cuando se pulsa el botón izquierdo del ratón, el texto encerrado en comillas simples se escribe en el dibujo en la posición señalada por el cursor. Se puede utilizar cualquier número de comandos `gtext` en una gráfica. (Véase, por ejemplo, el Programa 5-15 de MATLAB).

Descripción en MATLAB de un sistema estándar de segundo orden. Como ya se dijo, el sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{5-40}$$

se denomina sistema de segundo orden estándar. Dadas ω_n y ζ, el comando

```
printsys(num,den)    o    printsys(num,den,s)
```

imprime `num/den` como un cociente de polinomios en s.

Considérese, por ejemplo, el caso en el que $\omega_n = 5$ rad/seg y $\zeta = 0.4$. El Programa MATLAB 5-3 genera el sistema estándar de segundo orden donde $\omega_n = 5$ rad/seg y $\zeta = 0.4$.

MATLAB Programa 5-3

```
wn = 5;
damping_ratio = 0.4;
[num0,den] = ord2(wn,damping_ratio);
num = 5^2*num0;
printsys(num,den,'s')
num/den =
              25
         -----------
         s^2 + 4s + 25
```

Obtención de la respuesta escalón unitario de un sistema dado como función de transferencia. Considérese la respuesta escalón unitario del sistema dado por

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

El Programa MATLAB 5-4 produce la gráfica de la respuesta escalón unitario de este sistema. En la Figura 5-20 se muestra un dibujo de la curva respuesta escalón unitario.

Obsérvese en la Figura 5-20 (y en muchas otras) que las etiquetas de los ejes *x* e *y* se determinan de forma automática. Si se quiere etiquetar el eje *x* y el eje *y* de forma diferente, se tiene que modificar el comando step. Por ejemplo, si se quiere que en el eje *x* se etiquete como `'t Seg'` y el eje *y* como 'Entrada y Salida', se utiliza el comando respuesta escalón con los argumentos en el lado izquierdo siguientes

```
c=step(num,den,t)
```

o, de forma más general,

```
[y,x,t]=step(num,den,t)
```

y utilizar la orden `plot(t,y)`. Véase, por ejemplo, el Programa MATLAB 5-5 y la Figura 5-21.

MATLAB Programa 5-4

```
% ------------- Respuesta a un escalón unitario -------------

% ***** Introduzca el numerador y el denominador de la función
% de transferencia *****

num = [25];
den = [1  4  25];

% ***** Introduzca la siguiente orden de respuesta escalón *****

step(num,den)

% ***** Introduzca grid y el título de la gráfica *****

grid
title ('Respuesta a un escalón unitario de G(s) = 25/(s^2+4s+25)')
```

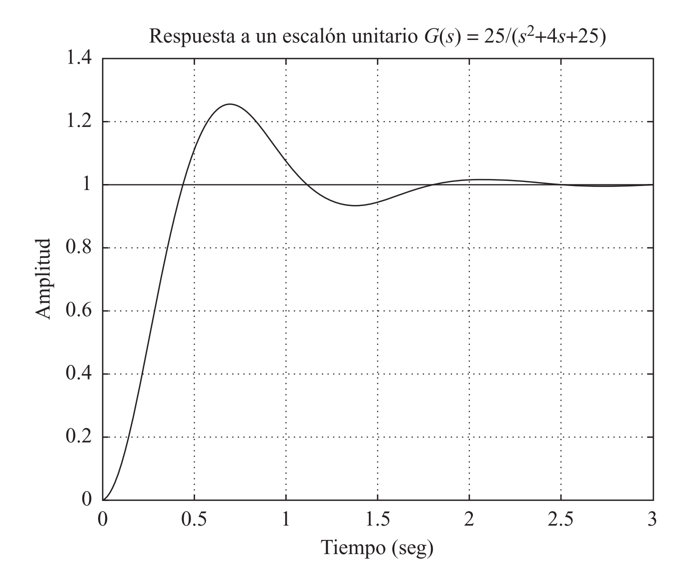


Figura 5-20. Curva de respuesta a escalón unitario.

MATLAB Programa 5-5

```
% ------------- Respuesta a un escalón unitario ----------- --
num = [25];
den = [1 4 25];
t = 0:0.01:3;
[y,x,t] = step(num,den,t)
Plot(t,y)
grid
title ('Respuesta a un escalón unitario de G(s)=25/(s^2+4s+25)')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salida')
```

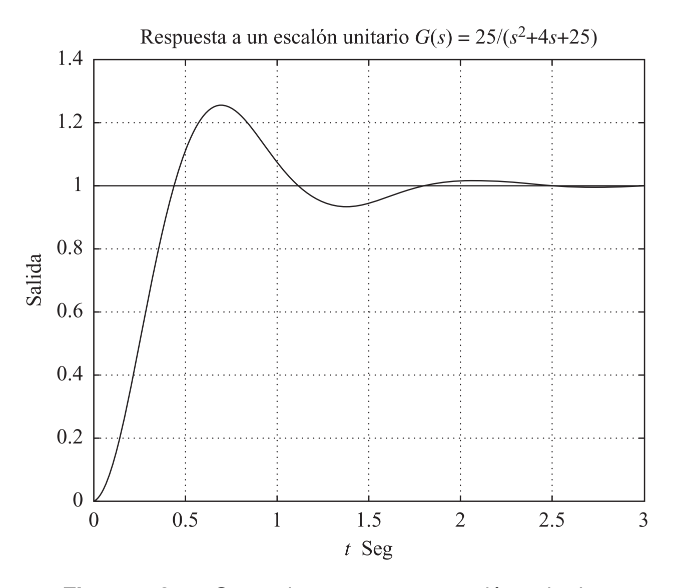


Figura 5-21. Curva de respuesta a escalón unitario.

Obtención de gráficas de respuesta escalón unitario en tres dimensiones utilizando MATLAB. MATLAB permite dibujar gráficas en tres dimensiones fácilmente. Los comandos para obtener dibujos en tres dimensiones son «mesh» y «surf». La diferencia entre las gráficas dibujadas con «mesh» y «surf» es que en la primera sólo se dibujan las líneas y en la segunda los espacios entre las líneas se colorean. En este texto se utiliza únicamente el comando «mesh».

EJEMPLO 5-4 Considere el sistema en lazo cerrado definido por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

(La frecuencia natural subamortiguada ω_n está normalizada a 1.) Dibuje las curvas de respuesta escalón unitario $c(t)$ cuando ζ tiene los siguientes valores

$$\zeta = 0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1.0$$

También dibuje una gráfica en tres dimensiones.

El Programa 5-6 es un programa ilustrativo en MATLAB para dibujar un diagrama en tres dimensiones para las curvas de respuesta escalón unitario de este sistema de segundo orden.

En las Figuras 5-22(a) y (b) se muestran las curvas resultantes. Observe que se ha utilizado el comando `mesh(t,zeta,y')` para obtener el dibujo en tres dimensiones. El comando `mesh(y')` producirá el mismo resultado. [Observe que el comando `mesh(t,zeta,y')` o `mesh(y')` producirá el mismo dibujo en tres dimensiones que el de la Figura 5-22(b), excepto que el eje x y el eje y están intercambiados. Véase el Problema **A-5-15**.]

Cuando se requiere resolver un problema utilizando MATLAB y la solución incluye cálculos repetitivos, se puede simplificar el programa en MATLAB de diferentes maneras. Una forma usual de simplificar los cálculos consiste en utilizar «bucles for». El Programa 5-6 en MATLAB utiliza estos «bucles for». En este libro muchos programas en MATLAB utilizan «bucles for» para resolver una variedad de problemas. Se aconseja al lector estudiar esos programas en detalle para familiarizarse con ellos.

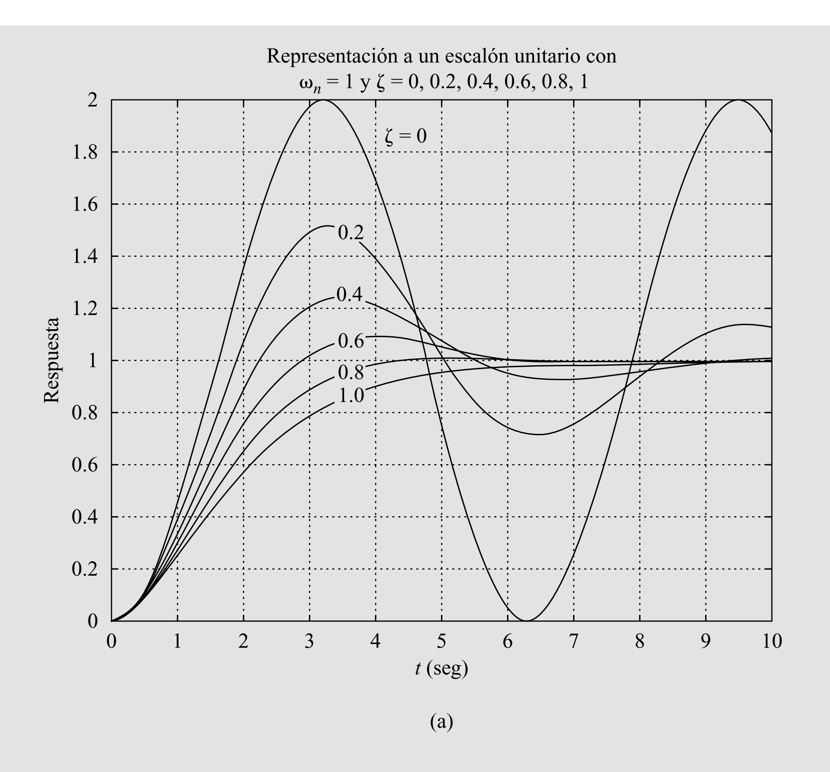
MATLAB Programa 5-6

```
% ------- Gráficas bidimensional y tridimensional de la respuesta
% escalón de un sistema de segundo orden estandar con wn = 1
% y zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, y 1. -------
t = 0:0.2:10;
zeta = [0 0.2 0.4 0.6 0.8 1];
    for n = 1:6;
    num = [1];
    den = [1 2*zeta(n) 1];
    [y(1:51,n),x,t] = step(num,den,t);
    end
% Para representar un diagrama bidimensional, introduzca la orden
% plot(t,y).

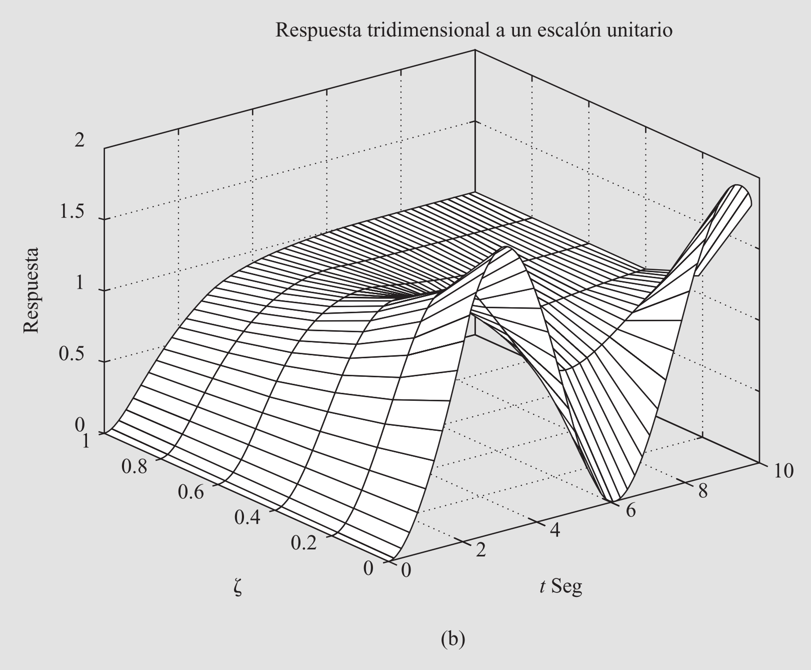
plot(t,y)
grid
title('Respuesta a un escalón unitario con \omega_n = 1
y \zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1')
xlabel('t (seg)')
ylabel('Respuesta')
text(4.1,1.86,'\zeta = 0')
text(3.5,1.5,'0.2')
text(3.5,1.24,'0.4')
text(3.5,1.08,'0.6')
text(3.5,0.95,'0.8')
text(3.5,0.86,'1.0')

% Para representar un diagrama tridimensional, introduzca la orden
mesh(t,zeta,y').

mesh(t,zeta,y')
title(Respuesta tridimensional a un escalón unitario)
xlabel('t Seg')
ylabel('\zeta')
zlabel('Respuesta')
```



(a)



(b)

Figura 5-22. (a) Gráficas bidimensionales de las curvas de respuesta a escalón unitario para $\zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0; (b) gráficas tridimensionales de las curvas de respuesta a escalón unitario.

Obtención del tiempo de subida, tiempo de pico, máxima sobreelongación y tiempo de asentamiento utilizando MATLAB. MATLAB se puede utilizar de forma conveniente para obtener el tiempo de subida, el tiempo de pico, la máxima sobreelongación y el tiempo de asentamiento. Considérese el sistema definido por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

Con el Programa en MATLAB 5-7 se obtiene el tiempo de subida, el tiempo de pico, la máxima sobreelongación y el tiempo de asentamiento. En la Figura 5-23 se presenta una curva de respuesta escalón unitario para este sistema, para verificar el resultado obtenido con el Programa MATLAB 5-7. Obsérvese que este programa se puede aplicar a sistemas de orden más alto (véase el Problema **A-5-10**).

MATLAB Programa 5-7

```
% ------- Este es un programa MATLAB para encontrar el tiempo de subida,
% tiempo de pico, sobreelongación máxima, y tiempo de asentamiento del
% sistema de segundo orden y sistemas de orden superior -------
% ------- En este ejemplo se supone que zeta = 0.6 y wn = 5 -------
num = [25];
den = [1  6  25];
t = 0:0.005:5;
[y,x,t] = step(num,den,t);
r = 1; while y(r) < 1.0001; r = r + 1; end;
tiempo_subida = (r - 1)*0.005
tiempo_subida =
   0.5550
[ymax,tp] = max(y);
tiempo_pico = (tp - 1)*0.005
tiempo_pico =
   0.7850
sobreelongación_max = ymax-1
sobreelongación_max =
   0.0948
s = 1001; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02; s = s-1; end;
tiempo_asentamiento = (s-1)*0.005
tiempo_asentamiento =
   1.1850
```

Respuesta impulso. La respuesta impulso unitario de un sistema de control se obtiene mediante alguno de los siguientes comandos de MATLAB:

```
impulse(num,den)
impulse(A,B,C,D)
[y,x,t] = impulse(num,den)
[y,x,t] = impulse(num,den,t)          (5-41)
[y,x,t] = impulse(A,B,C,D)
```

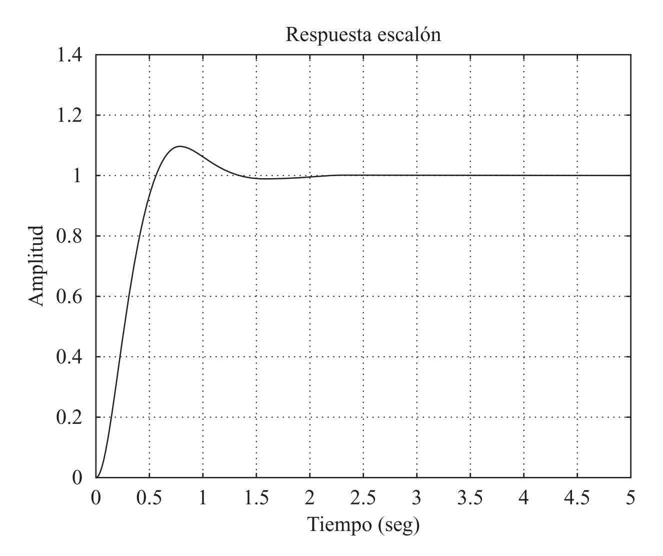


Figura 5-23. Curva de respuesta a escalón unitario.

```
[y,x,t] = impulse(A,B,C,D,iu)        (5-42)
[y,x,t] = impulse(A,B,C,D,iu,t)      (5-43)
```

El comando `impulse(num,den)` dibuja la respuesta impulso unitario en la pantalla. El comando `impulse(A,B,C,D)` produce una serie de gráficas de respuesta impulso unitario, una para cada combinación de entrada y salida del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

con el vector de tiempo determinado automáticamente. Obsérvese que, en las Ecuaciones (5-42) y (5-43), el escalar `iu` es un índice dentro de las entradas del sistema y especifica cuál entrada se va a usar para la respuesta impulso.

Obsérvese también que si la orden utilizada no incluye «t» explícitamente, el vector de tiempo se determina automáticamente. Si la orden incluye el vector de tiempos «t» proporcinado por el usuario, como las órdenes dadas en las Ecuaciones (5-41) y (5-43), este vector especifica los tiempos en los que se va a calcular la respuesta impulso.

Si se invoca MATLAB con el argumento en el lado izquierdo `[y,x,t]`, como en el caso de `[y,x,t] = impulse(A,B,C,D)`, el comando devuelve las respuestas de salida y del estado del sistema y el vector de tiempo `t`. No se dibuja una gráfica en la pantalla. Las matrices `y` y `x` contienen las respuestas de salida y del estado del sistema evaluadas en los puntos de tiempo `t`. (`y` tiene tantas columnas como salidas y una fila para cada elemento en `t`. `x` tiene tantas columnas como variables de estado y una fila para cada elemento en `t`.) Para dibujar la curva de respuesta, se debe incluir una orden plot, tal como `plot(t,y)`.

EJEMPLO 5-5 Obtenga la respuesta impulso unitario del sistema siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

El Programa MATLAB 5-8 es una de las posibilidades. En la Figura 5-24 aparece la curva de respuesta resultante.

MATLAB Programa 5-8

```
num = [1];
den = [1 0.2 1];
impulse(num,den);
grid
title('Respuesta a un impulso unitario de G(s) = 1/(s^2 + 0.2s + 1)')
```

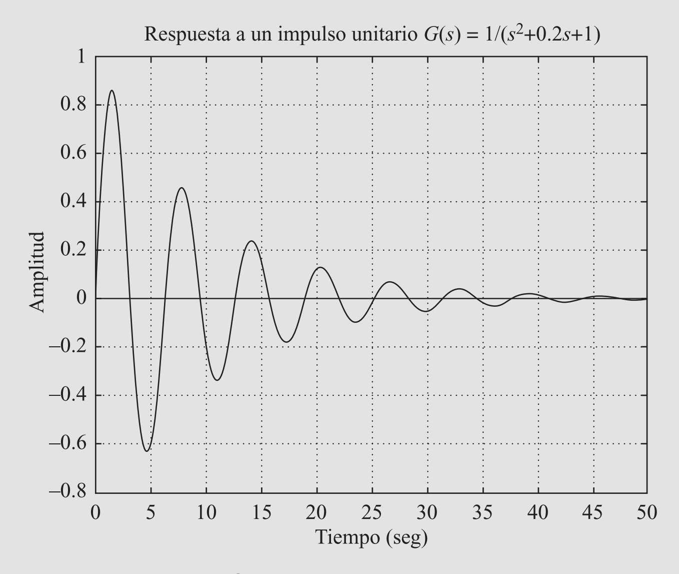


Figura 5-24. Curva de respuesta a impulso unitario.

Enfoque alternativo para obtener la respuesta impulso. Obsérvese que, cuando las condiciones iniciales son cero, la respuesta impulso unitario de $G(s)$ es igual a la respuesta escalón unitario de $sG(s)$.

Considérese la respuesta impulso unitario del sistema del Ejemplo 5-6. Como $R(s) = 1$ para la entrada impulso unitario, se tiene que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = C(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

$$= \frac{s}{s^2 + 0.2s + 1} \frac{1}{s}$$

Por tanto, se convierte la respuesta impulso unitario de $G(s)$ en la respuesta impulso unitario de $sG(s)$.

Si se introducen los siguientes `num` y `den` en MATLAB,

```
num = [0  1  0]
den = [1  0.2  1]
```

y se usa el comando de respuesta unitaria, como se incluye en el Programa MATLAB 5-9, se obtiene una gráfica de la respuesta impulso unitario del sistema que aparece en la Figura 5-25.

MATLAB Programa 5-9

```
num = [1  0];
den = [1  0.2  1];
step(num,den);
grid
title('Respuesta a un impulso unitario de sG(s) = s/(s^2 + 0.2s + 1)')
```

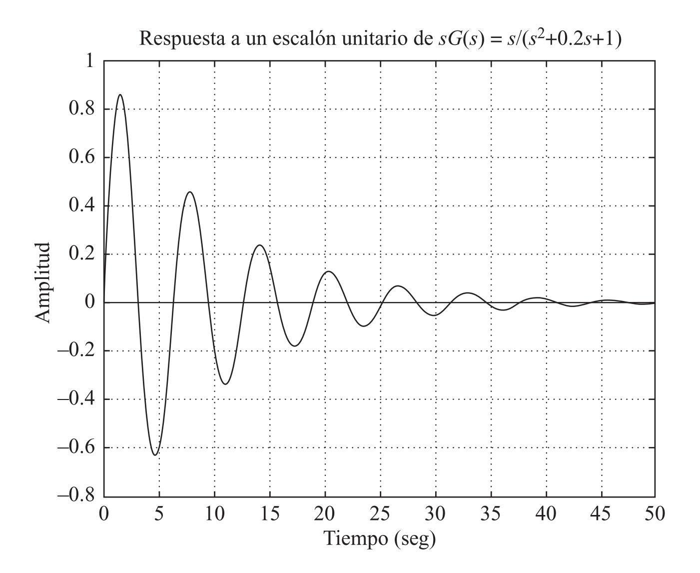


Figura 5-25. Curva de respuesta a un impulso unitario obtenida como la respuesta a un escalón unitario de $sG(s) = s/(s^2 + 0.2s + 1)$.

Respuesta rampa. No hay un comando rampa de MATLAB. Por tanto, es necesario utilizar el comando step para obtener la respuesta rampa. Específicamente, para obtener la respuesta rampa del sistema con función de transferencia $G(s)$, divídase $G(s)$ entre s y utilícese el comando de respuesta escalón. Por ejemplo, considérese el sistema en lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 1}$$

Para una entrada rampa unitaria, $R(s) = 1/s^2$. Por tanto,

$$C(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 1}\,\frac{1}{s^2} = \frac{2s + 1}{(s^2 + s + 1)s}\,\frac{1}{s}$$

Para obtener la respuesta rampa unitaria de este sistema, introdúzcanse el numerador y el denominador siguientes en el Programa MATLAB:

```
num = [2  1];
den = [1  1  1  0];
```

y utilícese el comando de respuesta escalón. Véase el Programa MATLAB 5-10. En la Figura 5-26 aparece la gráfica obtenida mediante este programa.

MATLAB Programa 5-10

```
% --------------- Respuesta a una rampa unitaria ---------------
% ***** La respuesta a una rampa unitaria se obtiene como
% la respuesta a un escalón unitario de G(s)/s *****
% ***** Introduzca el numerador y el denominador de G(s)/s *****
num = [2  1];
den = [1  1  1  0];
% ***** Especifique los puntos de tiempo de cálculo (como t = 0:0.1:7)
% e introduzca entonces la orden de respuesta a un escalón:
% c = step(num,den,t) *****
t = 0:0.1:10;
c = step(num,den,t);
% ***** Para representar la respuesta a una rampa, añada la entrada de
% referencia a la gráfica. La entrada de referencia es t. Añada como
% argumento de la orden plot lo siguiente: t, t,'-'. Así la orden plot
% queda como sigue: plot(t,c,'o',t,t,'-') *****
plot(t,c,'o',t,t,'-')
% ***** Añada grid, title, xlabel, e ylabel *****
grid
title('Respuesta a una rampa unitaria del sistema G(s) = (2s+1)/(s^2+s+1)')
xlabel('t Seg')
ylabel('Entrada y Salida')
```

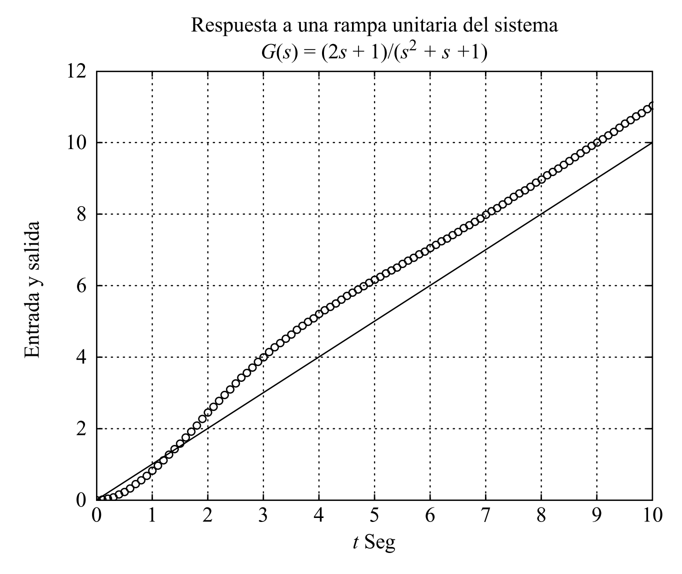


Figura 5-26. Curva de respuesta a una rampa unitaria.

Respuesta rampa unitaria de un sistema definido en el espacio de estados. A continuación, se trata la respuesta rampa unitaria del sistema en el espacio de estados. Considérese el sistema descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

donde u es la función rampa unitaria. A continuación, se considera un ejemplo sencillo para explicar el método. Supóngase el caso en el que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = 0, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad D = [0]$$

Cuando las condiciones iniciales son cero, la respuesta rampa unitaria es la integral de la respuesta escalón unitario. Por tanto, la respuesta rampa unitaria se obtiene mediante

$$z = \int_0^t y\,dt \tag{5-44}$$

A partir de la Ecuación (5-44), se obtiene

$$\dot{z} = y = x_1 \tag{5-45}$$

Sea

$$z = x_3$$

Entonces, la Ecuación (5-45) se convierte en

$$\dot{x}_3 = x_1 \tag{5-46}$$

Combinando la Ecuación (5-46) con la ecuación original en el espacio de estados, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{5-47}$$

$$z = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{5-48}$$

donde la u que aparece en la Ecuación (5-47) es la función escalón unitario. Esas ecuaciones se pueden escribir como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{AA}\mathbf{x} + \mathbf{BB}u$$

$$z = \mathbf{CC}\mathbf{x} + DDu$$

donde

$$\mathbf{AA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hdashline \mathbf{C} & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{BB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CC} = [0 \quad 0 \quad 1], \quad DD = [0]$$

Obsérvese que x_3 es el tercer elemento de **x**. Una gráfica de la curva de respuesta rampa unitaria $z(t)$ se obtiene introduciendo el Programa MATLAB 5-11 en la computadora. La Figura 5-27 muestra una gráfica de la curva de respuesta rampa unitaria obtenida de este programa MATLAB.

MATLAB Programa 5-11

```
% --------------- Respuesta a una rampa unitaria ---------------
% ***** La respuesta a una rampa unitaria se obtiene añadiendo una nueva
% variable de estado x3. La dimensión de la ecuación de estado
% se amplía en uno *****
% ***** Introduzca las matrices A, B, C, y D de la ecuación de estado original
% y la ecuación de salida *****
A = [0  1;-1  -1];
B = [0;  1];
C = [1  0];
D = [0];
% ***** Introduzca las matrices A, B, C, y D de la nueva,
% ecuación de estado ampliada y de la ecuación de salida *****
AA = [A zeros(2,1);C  0];
BB = [B;0];
CC = [0  0  1];
DD = [0];
% ***** Introduzca la orden de respuesta a un salto:
% [z,x,t] = step(AA,BB,CC,DD) *****
[z,x,t] = step(AA,BB,CC,DD);
% ***** Para representar x3 añada la entrada rampa unitaria en la gráfica
% introduciendo la siguiente orden: plot(t,x3,'o',t,t,'-') *****
x3 = [0 0 1]*x'; plot(t,x3,'o',t,t,'-')
grid
title('Respuesta a una rampa unitaria')
xlabel('t Seg')
ylabel('Entrada y Salida')
```

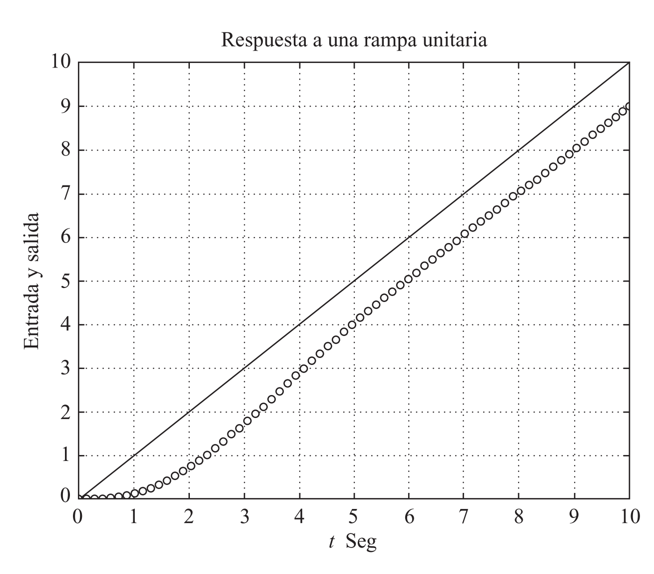


Figura 5-27. Curva de respuesta a una rampa unitaria.

Obtención de la respuesta frente a una entrada arbitraria. Para obtener la respuesta frente a una entrada arbitraria, se puede utilizar el comando `lsim`. Comandos como

```
lsim(num,den,r,t)
lsim(A,B,C,D,u,t)
y = lsim(num,den,r,t)
y = lsim(A,B,C,D,u,t)
```

generarán la respuesta a la función entrada temporal `r` o `u`. Véanse los dos ejemplos siguientes (véanse también los Problemas **A-5-14** a **A-5-16**).

EJEMPLO 5-6 Utilizando la orden `lsim`, obtenga la respuesta frente a una rampa unitaria del siguiente sistema:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Se puede escribir el Programa 5-12 en MATLAB en el computador para obtener la respuesta frente a la rampa unitaria. En la Figura 5-28 se muestra la gráfica que se obtiene.

MATLAB Programa 5-12

```
% ------- Respuesta a una rampa -------
num = [2  1];
den = [1  1  1];
t = 0:0.1:10;
r = t;
y = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,y,'o')
grid
title('Respuesta a una rampa unitaria obtenida con la orden "lsim"')
xlabel('t Seg')
ylabel('Entrada en rampa unitaria y salida del sistema')
text(6.3,4.6, 'Entrada en rampa unitaria')
text(4.75,9.0,'Salida')
```

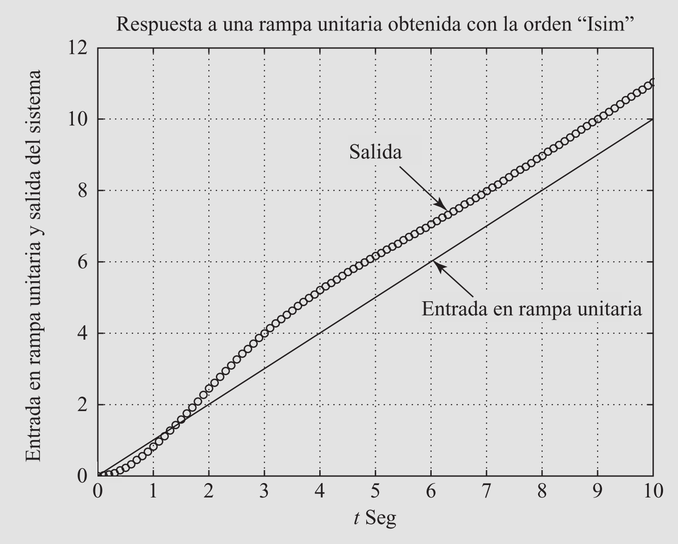


Figura 5-28. Curva de respuesta a rampa unitaria.

EJEMPLO 5-7 Considere el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Utilizando MATLAB, obtenga las curvas de respuesta $y(t)$ cuando la entrada u está dada por

1. u = entrada escalón unitario
2. $u = e^{-t}$

Suponga que el estado inicial es $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.

Un posible programa en MATLAB que produce las respuestas de este sistema a la entrada escalón unitario [$u = 1(t)$] y la entrada exponencial [$u = e^{-t}$] es el Programa 5-13. Las curvas de respuesta que se obtienen se muestran en las Figuras 5-29(a) y (b), respectivamente.

MATLAB Programa 5-13

```
t = 0:0.1:12;
A = [–1  0.5;–1  0];
B = [0;1];
C = [1  0];
D = [0];

% Para la entrada en escalón unitario u = 1(t),
% use la orden "y = step(A,B,C,D,1,t)".

y = step(A,B,C,D,1,t);
plot(t,y)
grid
title('Respuesta a un escalón unitario')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salida')

% Para la respuesta a una entrada exponencial u = exp(–t),
% use la orden z = lsim(A,B,C,D,u,t).

u = exp(-t);
z = lsim(A,B,C,D,u,t);
plot(t,u,'-',t,z,'o')
grid
title('Respuesta a una entrada exponencial u = exp(–t)')
xlabel('t Seg')
ylabel('Entrada exponencial y salida del sistema')
text(2.3,0.49,'Entrada exponencial')
text(6.4,0.28,'Salida')
```

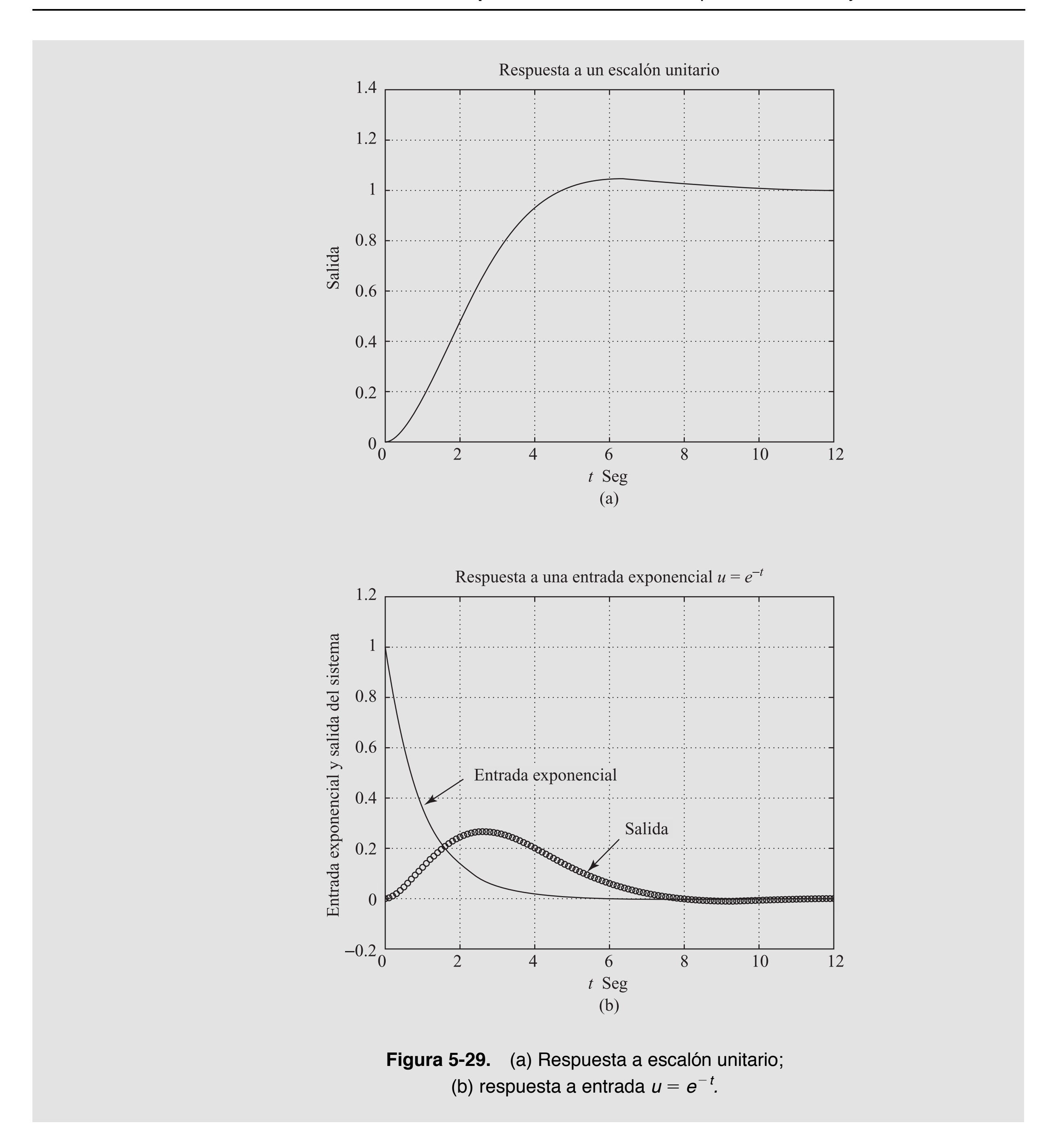


Figura 5-29. (a) Respuesta a escalón unitario; (b) respuesta a entrada $u = e^{-t}$.

Respuesta a condiciones iniciales. A continuación se presentan unos cuantos métodos para obtener la respuesta a condiciones iniciales. Los comandos que se pueden utilizar son «step» o «initial». En primer lugar se presenta un método para obtener la respuesta a condiciones iniciales utilizando un ejemplo simple. Después se analizará la respuesta a la condición inicial cuando el sistema está dado en la forma de espacio de estados. Por último, se presentará un comando «initial» para obtener la respuesta de un sistema descrito en el espacio de estados.

EJEMPLO 5-8 Considere el sistema mecánico de la Figura 5-30, en el que $m = 1$ kg, $b = 3$ N-seg/m y $k = 2$ N/m. Suponga que en $t = 0$ la masa m se tira hacia abajo, de modo que $x(0) = 0.1$ m y que $\dot{x}(0) = 0.05$ m/seg. El desplazamiento $\bar{x}(t)$ se mide a partir de la posición de equilibrio antes de que la masa se tire hacia abajo. Obtenga el movimiento de la masa sujeto a las condiciones iniciales. (Suponga que no existe una función de excitación externa.)

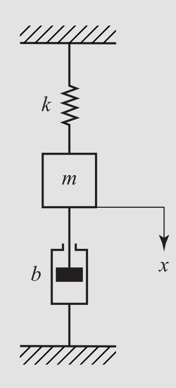


Figura 5-30. Sistema mecánico

La ecuación del sistema es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

con la condición inicial $x(0) = 0.1$ m y $\dot{x}(0) = 0.05$ m/seg. (x está medido desde la posición de equilibrio.) La transformada de Laplace de esta ecuación del sistema produce

$$m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + b[sX(s) - x(0)] + kX(s) = 0$$

o bien

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = mx(0)s = m\dot{x}(0) + bx(0)$$

Despejando $X(s)$ de esta última ecuación y sustituyendo los valores numéricos dados, se obtiene

$$X(s) = \frac{ms(0)s + m\dot{x}(0) + bx(0)}{ms^2 + bs + k}$$

$$= \frac{0.1s + 0.35}{s^2 + 3s + 2}$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$X(s) = \frac{0.1s^2 + 0.35s}{s^2 + 3s + 2}\,\frac{1}{s}$$

Por tanto, el movimiento de la masa se obtiene como la respuesta escalón unitario del sistema siguiente:

$$G(s) = \frac{0.1s^2 + 0.35s}{s^2 + 3s + 2}$$

El Programa MATLAB 5-14 proporciona una gráfica del movimiento de la masa. La gráfica aparece en la Figura 5-31.

MATLAB Programa 5-14

```
% --------------- Respuesta a condición inicial ---------------

% ***** La respuesta del sistema a condición inicial se convierte a una respuesta
% en escalón unitario modificando el numerador del polinomio *****

% **** Introduzca el numerador y el denominador de la función
% de transferencia G(s) ****

num = [0.1  0.35  0];
den = [1  3  2];

% ***** Introduzca la siguiente orden de respuesta a un salto *****

step(num,den)

% ***** Introduzca grid y title en la gráfica *****

grid
title('Respuesta del sistema de resorte-masa-amortiguador a condición inicial')
```

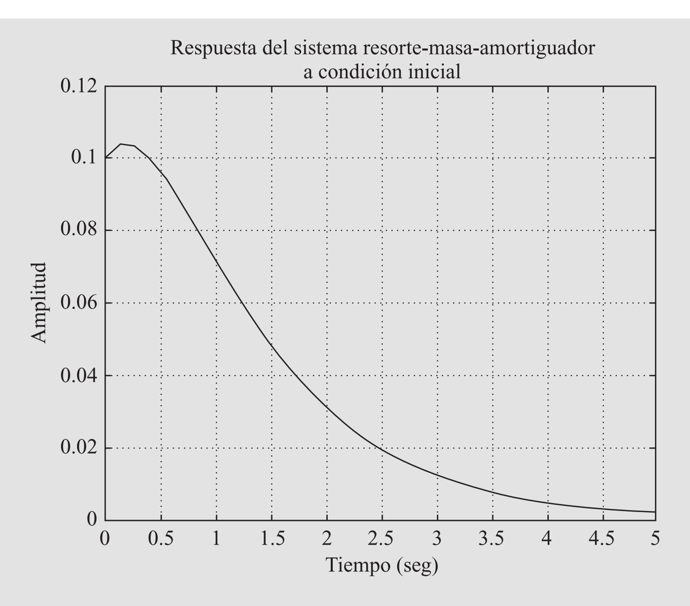


Figura 5-31. Respuesta del sistema mecánico considerado en el Ejemplo 5-8.

Respuesta a condiciones iniciales (enfoque en el espacio de estados, caso 1). Considérese el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{5-49}$$

Se va a obtener la respuesta $\mathbf{x}(t)$ cuando se especifica la condición inicial $\mathbf{x}(0)$. (Ninguna función de entrada externa actúa sobre este sistema.) Supóngase que $\mathbf{x}$ es un vector de dimensión n.

Primero, tome las transformadas de Laplace de ambos miembros de la Ecuación (5-49).

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

Esta ecuación puede reescribirse como

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{x}(0) \tag{5-50}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la Ecuación (5-50), se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}(0)\,\delta(t) \tag{5-51}$$

(Obsérvese que, tomando la transformada de Laplace de una ecuación diferencial y después la transformada inversa de Laplace de la ecuación transformada mediante el sistema de Laplace, se genera una ecuación diferencial que contiene las condiciones iniciales.)

Ahora se define

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{x} \tag{5-52}$$

A continuación, la Ecuación (5-51) se escribe como

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{x}(0)\,\delta(t) \tag{5-53}$$

Integrando la Ecuación (5-53) con respecto a t, se obtiene

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{x}(0)1(t) = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u \tag{5-54}$$

donde

$$\mathbf{B} = \mathbf{x}(0), \qquad u = 1(t)$$

Si se remite a la Ecuación (5-52), el estado $\mathbf{x}(t)$ se obtiene mediante $\dot{\mathbf{z}}(t)$. Por tanto,

$$\mathbf{x} = \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u \tag{5-55}$$

La solución de las Ecuaciones (5-54) y (5-55) proporciona la respuesta a las condiciones iniciales.

Resumiendo, la respuesta de la Ecuación (5-49) para la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ se obtiene despejando las siguientes ecuaciones en el espacio de estados:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

donde

$$\mathbf{B} = \mathbf{x}(0), \qquad u = 1(t)$$

A continuación se presentan los comandos de MATLAB para obtener las curvas de respuesta, donde no se especifica el vector de tiempo `t` (esto es, se permite que el vector de tiempo sea determinado automáticamente por MATLAB).

```
% Especificar las matrices A y B
[x,z,t] = step(A,B,A,B);
x1 = [1 0 0 ... 0]*x';
x2 = [0 1 0 ... 0]*x';
    .
    .
    .
xn = [0 0 0 ... 1]*x';
plot(t,xl,t,x2, ... ,t,xn)
```

Si elegimos el vector de tiempo `t` (por ejemplo, permitiendo que la duración del tiempo de computación vaya desde `t = 0` a `t = tp` con el incremento `Δt`) se utilizarán los siguientes comandos de MATLAB:

```
t = 0; Δt: tp;
% Especificar las matrices A y B
[x,z,t] = step(A,B,A,B,1,t);
x1 = [1  0  0 ... 0]*x';
x2 = [0  1  0 ... 0]*x';
    .
    .
    .
xn = [0  0  0 ... 1]*x';
plot(t,xl,t,x2, ... ,t,xn)
```

(Véase el Ejemplo 5-9.)

Respuesta a condiciones iniciales (enfoque en el espacio de estados, caso 2). Considérese el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{5-56}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{5-57}$$

(Supóngase que $\mathbf{x}$ es un vector de dimensión n y que $\mathbf{y}$ es un vector de dimensión m).

Igual que en el caso 1, si se define

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{x}$$

se obtiene la ecuación siguiente:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{x}(0)1(t) = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u \tag{5-58}$$

donde

$$\mathbf{B} = \mathbf{x}(0), \qquad u = 1(t)$$

Considerando que $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{z}}$, la Ecuación (5-57) puede escribirse

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}} \tag{5-59}$$

Sustituyendo la Ecuación (5-58) en la Ecuación (5-59), se obtiene

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{C}\mathbf{B}u \tag{5-60}$$

La solución de las Ecuaciones (5-58) y (5-60), reescritas de la forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{C}\mathbf{B}u$$

donde $\mathbf{B} = \mathbf{x}(0)$ y $u = 1(t)$, proporciona la respuesta del sistema para condiciones iniciales determinadas. A continuación aparecen los comandos de MATLAB para obtener las curvas de respuesta (curvas de salida `y1` frente a `t`, `y2` frente a `t`, `...`, `ym` frente a `t`) para dos casos:

Caso A. Cuando el vector de tiempo `t` no se especifica (esto es, el vector de tiempo `t` se determina automáticamente con MATLAB):

```
% Especificar las matrices A, B y C
[y,z,t] = step(A,B,C*A,C*B);
y1 = [1  0  0 ... 0]*y';
y2 = [0  1  0 ... 0]*y';
    .
    .
    .
ym = [0  0  0 ... 1]*y';
plot(t,y1,t,y2, ... ,t,ym)
```

Caso B. Cuando el vector de tiempo t se especifica:

```
t = 0: Δt: tp;
% Especificar las matrices A, B y C
[y,z,t] = step(A,B,C*A,C*B,1,t);
y1 = [1  0  0 ... 0]*y';
y2 = [0  1  0 ... 0]*y';
   .
   .
   .
ym = [0  0  0 ... 1]*y';
plot(t,y1,t,y2, ... ,t,ym)
```

EJEMPLO 5-9 Obtenga la respuesta del sistema sujeto a las condiciones iniciales dadas.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Obtener la respuesta del sistema a las condiciones iniciales dadas se convierte en despejar la respuesta escalón unitario del sistema siguiente:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

donde

$$\mathbf{B} = \mathbf{x}(0), \qquad u = 1(t)$$

Por tanto, el Programa MATLAB 5-15 sirve para obtener la respuesta. Las curvas de respuesta resultantes se muestran en la Figura 5-32.

MATLAB Programa 5-15

```
t = 0:0.01:3;
A = [0  1;-10  -5];
B = [2;1];
[x,z,t] = step(A,B,A,B,1,t);
x1 = [1  0]*x';
x2 = [0  1]*x';
plot(t,x1,'x',t,x2,'-')
grid
title('Respuesta a condición inicial')
xlabel('t Seg')
ylabel('Variables de estado x1 y x2')
gtext('x1')
gtext('x2')
```

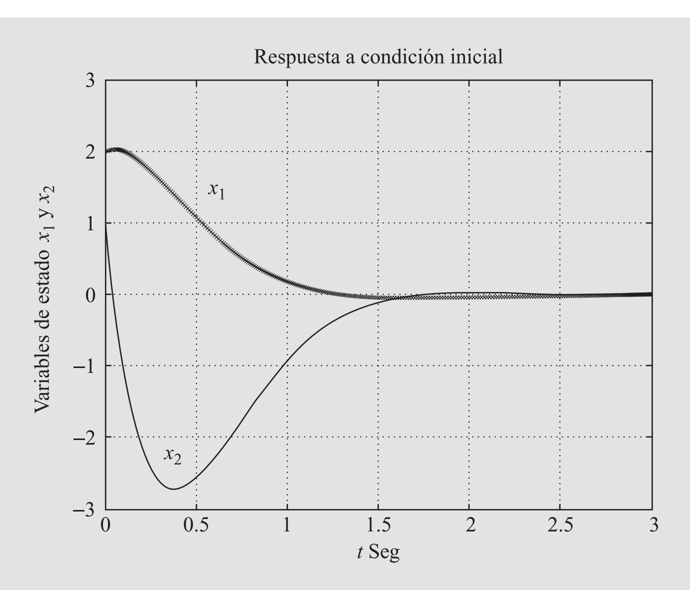


Figura 5-32. Respuesta del sistema del Ejemplo 5-9 a condición inicial.

Obtención de la respuesta a condiciones iniciales utilizando el comando Initial. Si el sistema está descrito en el espacio de estados, entonces la siguiente orden

```
initial(A,B,C,D,[initial condition],t)
```

producirá la respuesta a las condiciones iniciales.

Supóngase que se tiene el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [0 \quad 0], \qquad D = 0$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces el comando «initial» se puede utilizar como se muestra en el Programa 5-16 de MATLAB para obtener la respuesta a la condición inicial. Las curvas de respuesta $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se muestran en la Figura 5-33. Son las mismas que aparecen en la Figura 5-32.

MATLAB Programa 5-16

```
t = 0:0.05:3;
A = [0  1;–10  –5];
B = [0;0];
C = [0  0];
D = [0];
[y,x] = initial(A,B,C,D,[2;1],t);
x1 = [1  0]*x';
x2 = [0  1]*x';
plot(t,x1,'o',t,x1,t,x2,'x',t,x2)
grid
title('Respuesta a condición inicial')
xlabel('t Seg')
ylabel('Variables de estado x1 y x2')
gtext('x1')
gtext('x2')
```

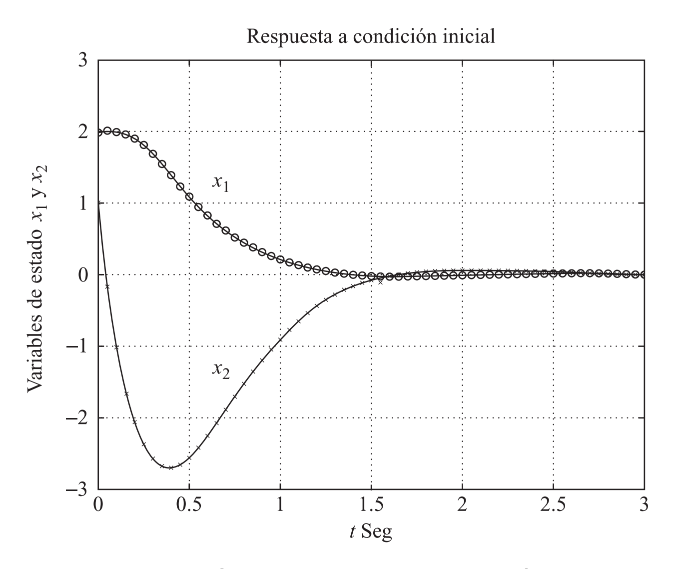


Figura 5-33. Curvas de respuesta a condición inicial.

EJEMPLO 5-10 Considere el siguiente sistema que está sujeto a condiciones iniciales. (No hay fuerzas externas presentes.)

$$\dddot{y} + 8\ddot{y} + 17\dot{y} + 10y = 0$$

$$y(0) = 2, \qquad \dot{y}(0) = 1, \qquad \ddot{y}(0) = 0.5$$

Obtenga la respuesta $y(t)$ a condiciones iniciales dadas.

Si se definen las variables de estado como

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

se obtiene la siguiente representación en el espacio de estados para el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

En el Programa 5-17 en MATLAB se muestra un posible programa en MATLAB para obtener la respuesta $y(t)$. En la Figura 5-34 se muestra la curva de respuesta resultante.

MATLAB Programa 5-17

```
t = 0:0.05:10;
A = [0  1  0;0  0  1;-10  -17  -8];
B = [0;0;0];
C = [1  0  0];
D = [0];
y = initial(A,B,C,D,[2;1;0.5],t);
plot(t,y)
grid
title('Respuesta a condición inicial')
xlabel('t (seg)')
ylabel('Salida y')
```

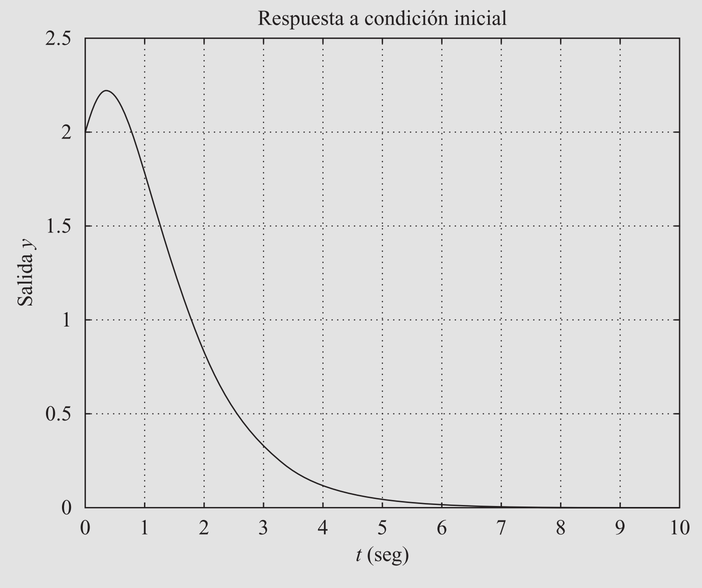


Figura 5-34. Respuesta a condición inicial.

5-6 Criterio de estabilidad de Routh

El problema más importante de los sistemas de control lineal tiene que ver con la estabilidad. Es decir, ¿en qué condiciones se vuelve inestable un sistema? Si es inestable, ¿cómo se estabiliza? En la Sección 5-4 se planteó que un sistema de control es estable si y sólo si todos los polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s. La mayoría de los sistemas lineales en lazo cerrado tienen funciones de transferencia en lazo cerrado de la forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

donde las a y las b son constantes y $m \leqslant n$. Un criterio simple, conocido como el criterio de estabilidad de Routh, permite determinar la cantidad de polos en lazo cerrado que se encuentran en el semiplano derecho del plano s sin tener que factorizar el polinomio. (El polinomio puede incluir parámetros que MATLAB no puede manejar.)

Criterio de estabilidad de Routh. El criterio de estabilidad de Routh dice si existen o no raíces inestables en una ecuación polinomial, sin tener que obtenerlas en realidad. Este criterio de estabilidad sólo se aplica a los polinomios con una cantidad finita de términos. Cuando se aplica el criterio a un sistema de control, la información sobre la estabilidad absoluta se obtiene directamente de los coeficientes de la ecuación característica.

El procedimiento en el criterio de estabilidad de Routh es el siguiente:

1. Se escribe el polinomio en s de la forma siguiente:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0 \tag{5-61}$$

donde los coeficientes son cantidades reales. Se supone que $a_n \neq 0$; es decir, se elimina cualquier raíz cero.

2. Si alguno de los coeficientes es cero o negativo, ante la presencia de al menos un coeficiente positivo, hay una raíz o raíces imaginarias o que tienen partes reales positivas. En tal caso, el sistema no es estable. Si sólo interesa la estabilidad absoluta, no es necesario continuar con el procedimiento. Obsérvese que todos los coeficientes deben ser positivos. Esta es una condición necesaria, como se aprecia a partir del argumento siguiente. Un polinomio en s con coeficientes reales siempre puede factorizarse en factores lineales y cuadráticos tales como $(s + a)$ y $(s^2 + bs + c)$, donde a, b y c son números reales. Los factores lineales producen las raíces reales y los factores cuadráticos producen las raíces complejas del polinomio. El factor $(s^2 + bs + c)$ produce las raíces con partes reales negativas sólo si b y c son ambas positivas. Para todas las raíces que tienen partes reales negativas, las constantes a, b, c, ... deben ser positivas en todos los factores. El producto de cualquier cantidad de factores lineales y cuadráticos que contengan sólo coeficientes positivos siempre produce un polinomio con coeficientes positivos. Es importante señalar que la condición de que todos los coeficientes sean positivos no es suficiente para asegurar la estabilidad. La condición necesaria, pero no suficiente, para la estabilidad es que todos los coeficientes de la Ecuación (5-61) estén presentes y tengan un signo positivo. (Si todas las a son negativas, se hacen positivas multiplicando ambos miembros de la ecuación por -1.)

3. Si todos los coeficientes son positivos, se ordenan los coeficientes del polinomio en filas y columnas de acuerdo con el patrón siguiente:

$$\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\
. & . & & & & \\
. & . & & & & \\
. & . & & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}$$

El proceso de formar filas continúa hasta que no quedan más elementos. (El número total de filas es $n + 1$.) Los coeficientes b_1, b_2, b_3, etc., se evalúan del modo siguiente:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$\vdots$$

La evaluación de las b continúa hasta que todas las restantes son cero. Se sigue el mismo patrón de multiplicación cruzada de los coeficientes de las dos filas anteriores al evaluar las c, las d, las e, etc. Es decir,

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

$$\vdots$$

y

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

$$\vdots$$

Este proceso continúa hasta que se completa la n-ésima fila. El array completo de los coeficientes es triangular. Obsérvese que, al desarrollar el array, una fila completa se divide entre, o se multiplica por, un número positivo para simplificar el cálculo numérico subsecuente sin alterar la conclusión de la estabilidad.

El criterio de estabilidad de Routh plantea que el número de raíces de la Ecuación (5-61) con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de los coeficientes de la primera columna del array. Debe señalarse que no es necesario conocer los valores exactos de los términos de la primera columna; sólo se necesitan los signos. La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la Ecuación (5-61) se encuentren en el semiplano izquierdo del plano s es que los coeficientes de la Ecuación (5-61) sean positivos y que todos los términos de la primera columna del array tengan signo positivo.

EJEMPLO 5-11 Se va a aplicar el criterio de estabilidad de Routh al siguiente polinomio de tercer orden:

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

donde todos los coeficientes son números positivos. El array de coeficientes se convierte en

$$\begin{array}{lcc} s^3 & a_0 & a_2 \\ s^2 & a_1 & a_3 \\ s^1 & \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & \\ s^0 & a_3 & \end{array}$$

La condición de que todas las raíces tengan partes reales negativas se obtiene mediante

$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

EJEMPLO 5-12 Considere el polinomio siguiente:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

Se va a seguir el procedimiento que se acaba de presentar para construir el array de coeficientes. (Las dos primeras filas se obtienen directamente del polinomio dado. Los términos restantes se obtienen de estos. Si faltan coeficientes en el array, se sustituyen con ceros.)

s^4	1	3	5	s^4	1	3	5	
s^3	2	4	0	s^3	~~2~~	~~4~~	~~0~~	La segunda fila se divide entre 2.
					1	2	0	
s^2	1	5		s^2	1	5		
s^1	-6			s^1	-3			
s^0	5			s^0	5			

En este ejemplo, hay dos cambios de signo en los coeficientes de la primera columna. Esto significa que existen dos raíces con partes reales positivas. Observe que el resultado no se modifica cuando los coeficientes de cualquier fila se multiplican por, o se dividen entre, un número positivo para simplificar el cálculo.

Casos especiales. Si el término de la primera columna de cualquier fila es cero, pero los términos restantes no son cero, o no hay términos restantes, el término cero se sustituye con un número positivo muy pequeño ε y se evalúa el resto del array. Por ejemplo, considérese la Ecuación

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0 \tag{5-62}$$

El array de coeficientes es

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 \approx \varepsilon & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Si el signo del coeficiente que está encima del cero (ε) es el mismo que el signo que está debajo de él, quiere decir que hay un par de raíces imaginarias. En realidad, la Ecuación (5-62) tiene dos raíces en $s = \pm j$.

Sin embargo, si el signo del coeficiente que está encima del cero (ε) es opuesto al del que está debajo, quiere decir que hay un cambio de signo. Por ejemplo, para la ecuación

$$s^3 - 3s + 2 = (s - 1)^2(s + 2) = 0$$

el array de coeficientes es

$$\begin{array}{llcc} & s^3 & 1 & -3 \\ \text{Un cambio de signo:} & s^2 & 0 \approx \varepsilon & 2 \\ \text{Un cambio de signo:} & s^1 & -3 - \dfrac{2}{\varepsilon} & \\ & s^0 & 2 & \end{array}$$

Hay dos cambios de signo en los coeficientes de la primera columna. Por lo tanto hay dos raíces en el semiplano derecho s. Esto coincide con el resultado correcto indicado por la forma factorizada de la ecuación polinomial.

Si todos los coeficientes de cualquier fila son cero, significa que existen raíces de igual magnitud que se encuentran radialmente opuestas en el plano s, es decir, dos raíces con magnitudes iguales y signos opuestos y/o dos raíces imaginarias conjugadas. En este caso, la evaluación del resto del arreglo continúa mediante la formación de un polinomio auxiliar con los coeficientes de la última fila y mediante el empleo de los coeficientes de la derivada de este polinomio en la fila siguiente. Tales raíces con magnitudes iguales y radialmente opuestas en el plano s se encuentran despejando el polinomio auxiliar, que siempre es par. Para un polinomio auxiliar de grado $2n$, existen n pares de raíces iguales y opuestas. Por ejemplo, considérese la ecuación:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

El array de coeficientes es

$$\begin{array}{llll} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \quad \leftarrow \text{Polinomio auxiliar } P(s) \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array}$$

Todos los términos del renglón s^3 son cero. (Obsérvese que tal caso ocurre sólo en una fila numerada impar.) Después se forma el polinomio auxiliar a partir de los coeficientes del renglón s^4. El polinomio auxiliar $P(s)$ es

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

lo cual indica que hay dos pares de raíces de igual magnitud y signo opuesto (esto es, dos raíces reales con la misma magnitud pero signos opuestos o dos raíces complejas conjugadas en el eje imaginario). Estos pares se obtienen resolviendo la ecuación del polinomio auxiliar $P(s) = 0$. La derivada de $P(s)$ con respecto a s es

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

Los coeficientes de la última ecuación, es decir, 8 y 96, sustituyen los términos de la fila s^3. Por consiguiente, el array de coeficientes se convierte en

$$\begin{array}{llll} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 8 & 96 & \quad \leftarrow \text{Coeficientes de } dP(s)/ds \\ s^2 & 24 & -50 & \\ s^1 & 112.7 & 0 & \\ s^0 & -50 & & \end{array}$$

Se observa que hay un cambio de signo en la primera columna del array nuevo. Por tanto, la ecuación original tiene una raíz con una parte real positiva. Despejando las raíces de la ecuación del polinomio auxiliar

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

se obtiene

$$s^2 = 1, \qquad s^2 = -25$$

o bien

$$s = \pm 1, \qquad s = \pm j5$$

Estos dos pares de raíces de $P(s)$ son una parte de las raíces de la ecuación original. De hecho, la ecuación original se escribe en forma factorizada del modo siguiente:

$$(s+1)(s-1)(s+j5)(s-j5)(s+2)=0$$

Es evidente que la ecuación original tiene una raíz con una parte real positiva.

Análisis de estabilidad relativa. El criterio de estabilidad de Routh proporciona la respuesta a la pregunta de la estabilidad absoluta. Esto, en muchos casos prácticos, no es suficiente. Por lo general, se requiere información acerca de la estabilidad relativa del sistema. Un enfoque útil para examinar la estabilidad relativa es cambiar el eje del plano s y aplicar el criterio de estabilidad de Routh. Es decir, se sustituye

$$s=\hat{s}-\sigma \qquad (\sigma = \text{constante})$$

en la ecuación característica del sistema, se escribe el polinomio en términos de $\hat{s}$, y se aplica el criterio de estabilidad de Routh al nuevo polinomio en $\hat{s}$. El número de cambios de signo en la primera columna del array desarrollado para el polinomio en $\hat{s}$ es igual a la cantidad de raíces que se localizan a la derecha de la línea vertical $s=-\sigma$. Por tanto, esta prueba revela la cantidad de raíces que se encuentran a la derecha de la línea vertical $s=-\sigma$.

Aplicación del criterio de estabilidad de Routh al análisis de un sistema de control. El criterio de estabilidad de Routh tiene una utilidad limitada en el análisis de un sistema de control lineal, sobre todo porque no sugiere cómo mejorar la estabilidad relativa ni como estabilizar un sistema inestable. Sin embargo, es posible determinar los efectos de cambiar uno o dos parámetros de un sistema si se examinan los valores que producen inestabilidad. A continuación se considera el problema de determinar el rango de estabilidad para el valor de un parámetro.

Considérese el sistema de la Figura 5-35. Se va a determinar el rango de valores de K para la estabilidad. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)+K}$$

La ecuación característica es

$$s^4+3s^3+3s^2+2s+K=0$$

El array de coeficientes se convierte en

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 3 & K \\ s^3 & 3 & 2 & 0 \\ s^2 & \frac{7}{3} & K & \\ s^1 & 2-\frac{9}{7}K & & \\ s^0 & K & & \end{array}$$

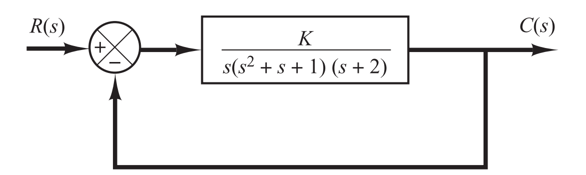


Figura 5-35. Sistema de control.

Para la estabilidad, K debe ser positivo, y todos los coeficientes de la primera columna deben serlo también. Por tanto,

$$\frac{14}{9} > K > 0$$

Cuando $K = \frac{14}{9}$, el sistema se vuelve oscilatorio y, matemáticamente, la oscilación se mantiene en una amplitud constante.

Obsérvese que los rangos de los parámetros de diseño que conducen a la estabilidad se pueden determinar utilizando el criterio de estabilidad de Routh.

5-7 Efectos de las acciones de control integral y derivativa en el comportamiento del sistema

En esta sección se investigarán los efectos de las acciones de control integral y derivativa sobre el comportamiento de un sistema. Aquí sólo se considerarán los sistemas simples, para apreciar con claridad los efectos de las acciones de control integral y derivativa en el comportamiento de un sistema.

Acción de control integral. En el control proporcional de una planta, cuya función de transferencia no posee un integrador $1/s$, hay un error en estado estacionario, o desplazamiento (offset), en la respuesta para una entrada escalón. Tal offset se elimina si se incluye la acción de control integral en el controlador.

En el control integral de una planta, la señal de control, que es la señal de salida a partir del controlador, es en todo momento el área bajo la curva de la señal de error hasta tal momento. La señal de control $u(t)$ tiene un valor diferente de cero cuando la señal de error $e(t)$ es cero, como se aprecia en la Figura 5-36(a). Esto es imposible en el caso del controlador proporcional, ya que una señal de control diferente de cero requiere una señal de error diferente de cero. (Una señal de error diferente de cero en estado estacionario significa que hay una equivalencia.) La Figura 5-39(b) muestra la curva $e(t)$ frente a t y la curva $u(t)$ correspondiente frente a t cuando el controlador es de tipo proporcional.

Obsérvese que la acción de control integral, aunque elimina el offset o el error en estado estacionario, puede conducir a una respuesta oscilatoria de amplitud decreciente lenta o, incluso, de amplitud creciente, y ambos casos, por lo general, se consideran indeseables.

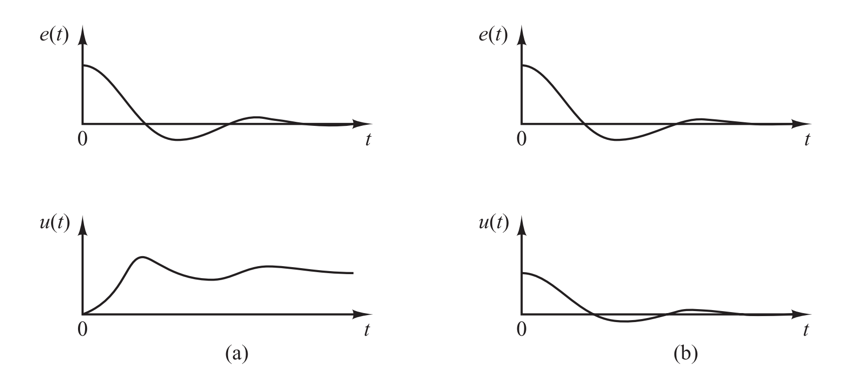


Figura 5-36. (a) Gráficas de las curvas de $e(t)$ y $u(t)$ con señales de control distintas de cero cuando la señal de error es cero (control integral); (b) gráficas de las curvas de $e(t)$ y $u(t)$ con señal de control cero cuando la señal de error es cero (control proporcional).

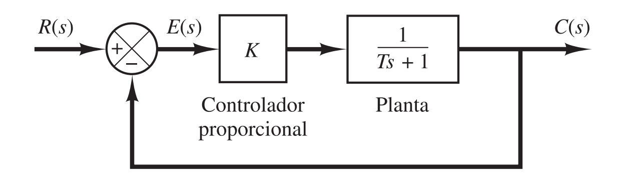


Figura 5-37. Sistema con control proporcional.

Control proporcional de sistemas. Se mostrará que el control proporcional de un sistema sin un integrador originará un error en estado estacionario frente a una entrada escalón. Se verá que tal error se puede eliminar si se incluye una acción de control integral en el controlador.

Considérese el sistema que se muestra en la Figura 5-37. Se va a obtener el error en estado estacionario de la respuesta escalón unitario del sistema. Se define

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

Como

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - C(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

el error $E(s)$ está dado por

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) = \frac{1}{1 + \dfrac{K}{Ts + 1}} R(s)$$

Para la entrada escalón unitario $R(s) = 1/s$, se tiene

$$E(s) = \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + K} \frac{1}{s}$$

El error en estado estacionario es

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + K} = \frac{1}{K + 1}$$

Tal sistema sin un integrador en el camino directo siempre tiene un error en estado estacionario como respuesta a un escalón. Dicho error en estado estacionario se denomina offset. La Figura 5-38 muestra la respuesta escalón unitario y el offset.

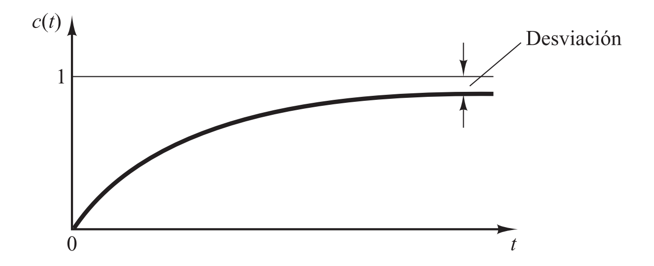


Figura 5-38. Respuesta a escalón unidad y offset.

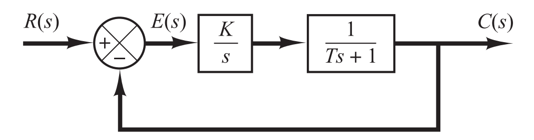


Figura 5-39. Sistema con control integral.

Control integral de sistemas. Considérese el sistema que se muestra en la Figura 5-39. El controlador es de tipo integral. La función de transferencia en lazo cerrado del sistema es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(Ts + 1) + K}$$

De ahí

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - C(s)}{R(s)} = \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + K}$$

Como el sistema es estable, el error en estado estacionario como respuesta a un escalón unitario se puede obtener aplicando el teorema del valor final de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{s^2(Ts + 1)}{Ts^2 + s + K} \frac{1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el control integral del sistema elimina el error en estado estacionario en respuesta a un escalón unitario. Esta es una mejora importante respecto al simple control proporcional, que produce un offset.

Respuesta a perturbaciones de par (control proporcional). Se va a investigar el efecto de una perturbación de par que ocurre en el elemento de carga. Considérese el sistema de la Figura 5-40. El controlador proporcional produce un par T para posicionar el elemento de carga, que consiste en el momento de inercia y una fricción viscosa. El par de la perturbación se representa mediante D.

Suponiendo que la entrada de referencia es cero, o $R(s) = 0$, la función de transferencia entre $C(s)$ y $D(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + K_p}$$

Figura 5-40. Sistema de control con par de perturbación.

Por tanto,

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{C(s)}{D(s)} = -\frac{1}{Js^2 + bs + K_p}$$

El error en estado estacionario producido por un par de perturbación escalón de magnitud T_d se obtiene mediante

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{-s}{Js^2 + bs + K_p} \frac{T_d}{s} \\ &= -\frac{T_d}{K_p} \end{aligned}$$

En el estado estacionario, el controlador proporcional aporta el par $-T_d$, que tiene igual magnitud pero signo opuesto que el par de perturbación T_d. La salida en estado estacionario producida por el par de perturbación escalón es

$$c_{ss} = -e_{ss} = \frac{T_d}{K_p}$$

El error en estado estacionario se reduce si se incrementa el valor de la ganancia K_p. Sin embargo, acrecentar este valor haría que la respuesta del sistema fuera más oscilatoria.

Respuesta a perturbaciones de par (control proporcional-integral). Para eliminar el offset debido a una perturbación de par, el controlador proporcional se sustituye por un controlador proporcional-integral, y luego, mientras existe una señal de error, el controlador desarrolla un par para reducir este error, siempre y cuando el sistema de control sea estable.

La Figura 5-41 muestra el control proporcional-integral del elemento de carga, formado por el momento de inercia y una fricción viscosa.

La función de transferencia en lazo cerrado entre $C(s)$ y $D(s)$ es

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \dfrac{K_p}{T_i}}$$

Ante la ausencia de la entrada de referencia, o $r(t) = 0$, la señal de error se obtiene de

$$E(s) = -\frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \dfrac{K_p}{T_i}} D(s)$$

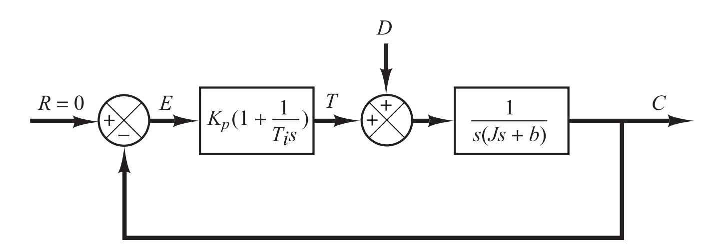


Figura 5-41. Control proporcional-integral de un elemento de carga formado por un momento de inercia y una fricción viscosa.

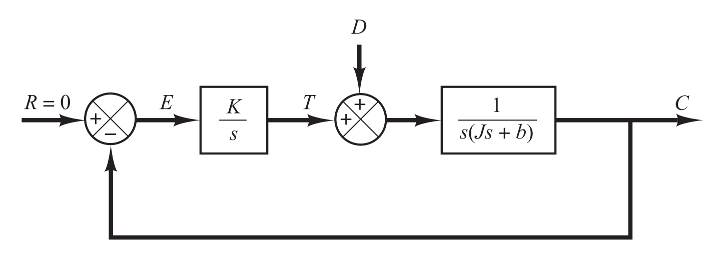


Figura 5-42. Control integral de un elemento de carga formado por un momento de inercia y una fricción viscosa.

Si este sistema de control es estable, es decir, si las raíces de la ecuación característica

$$Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i} = 0$$

tienen partes reales negativas, el error en estado estacionario en la respuesta a un par de perturbación escalón unitario se obtiene aplicando el teorema de valor final del modo siguiente:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \to 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{-s^2}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \dfrac{K_p}{T_i}} \frac{1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, el error en estado estacionario para el par de perturbación escalón se elimina si el controlador es del tipo proporcional-integral.

Obsérvese que la acción de control integral agregada al control proporcional convirtió el sistema, originalmente de segundo orden, en uno de tercer orden. Por ende, el sistema de control puede volverse inestable para un valor grande de K_p, ya que las raíces de la ecuación característica pueden tener partes reales positivas. (El sistema de segundo orden siempre es estable si los coeficientes de la ecuación diferencial del sistema son todos positivos.)

Es importante señalar que, si el controlador fuera integral, como en la Figura 5-42, el sistema siempre se volvería inestable, porque la ecuación característica

$$Js^3 + bs^2 + K = 0$$

tendría raíces con partes reales positivas. Tal sistema inestable no se puede usar en la práctica.

Obsérvese que, en el sistema de la Figura 5-41, la acción de control proporcional tiende a estabilizar el mismo, en tanto que la acción de control integral tiende a eliminar o reducir el error en estado estacionario en respuesta a diversas entradas.

Acción de control derivativa. Cuando una acción de control derivativa se agrega a un controlador proporcional, aporta un modo de obtener un controlador con alta sensibilidad. Una ventaja de usar una acción de control derivativa es que responde a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. Por tanto, el control derivativo prevé el error, inicia una acción correctiva oportuna y tiende a aumentar la estabilidad del sistema.

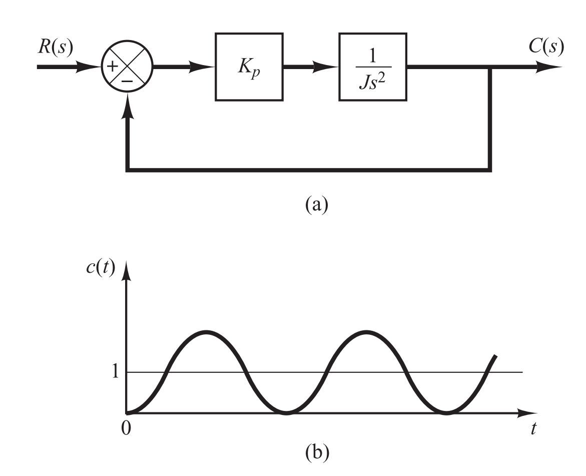


Figura 5-43. (a) Control proporcional de un sistema con carga de inercia; (b) respuesta a una entrada escalón unitario.

Aunque el control derivativo no afecta en forma directa al error en estado estacionario, añade amortiguamiento al sistema y, por tanto, permite el uso de un valor más grande que la ganancia K, lo cual provoca una mejora en la precisión en estado estacionario.

Debido a que el control derivativo opera sobre la velocidad de cambio del error, y no sobre el error mismo, este modo nunca se utiliza solo. Siempre se emplea junto con una acción de control proporcional o proporcional-integral.

Control proporcional de sistemas con carga de inercia. Antes de analizar el efecto de una acción de control derivativa sobre el comportamiento de un sistema, se analizará el control proporcional de una carga de inercia.

Considérese el sistema de la Figura 5-43(a). La función de transferencia en lazo cerrado se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{Js^2 + K_p}$$

Como las raíces de la ecuación característica

$$Js^2 + K_p = 0$$

son imaginarias, la respuesta a una entrada escalón unitario oscila indefinidamente, como se observa en la Figura 5-43(b).

No son convenientes los sistemas de control que muestran tales características de respuesta. Se verá que la adición de un control derivativo estabilizará el sistema.

Control proporcional-derivativo de un sistema con carga de inercia. Se va a modificar el controlador proporcional para obtener un controlador proporcional-derivativo cuya función de transferencia sea $K_p(1 + T_d s)$. El par que desarrolla el controlador es proporcional a $K_p(e + T_d \dot{e})$. El control derivativo es esencialmente de previsión, mide la velocidad instantánea del error, predice la sobreelongación significativa adelantándose en el tiempo y produce una respuesta adecuada antes de que ocurra una sobreelongación demasiado grande.

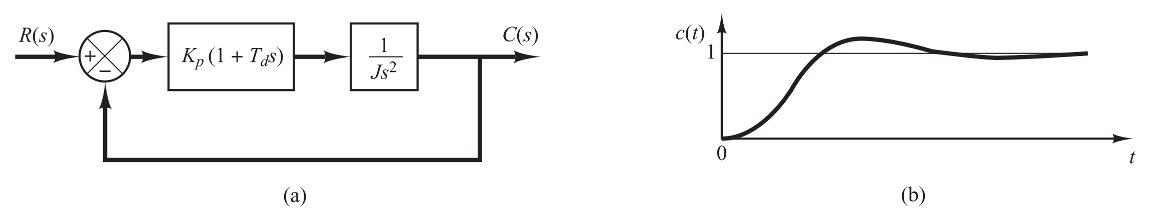


Figura 5-44. (a) Control proporcional-derivativo de un sistema con carga de inercia; (b) respuesta a entrada escalón unitario.

Considérese el sistema de la Figura 5-44(a). La función de transferencia en lazo cerrado se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1 + T_d s)}{Js^2 + K_p T_d s + K_p}$$

La ecuación característica

$$Js^2 + K_p T_d s + K_p = 0$$

tiene ahora dos raíces con partes reales negativas para valores positivos de J, K_p y T_d. Por tanto, el control derivativo introduce un efecto de amortiguamiento. La Figura 5-44(b) presenta una curva de respuesta común $c(t)$ para una entrada escalón unitario. Es evidente que la curva de respuesta muestra una marcada mejora sobre la curva de respuesta original de la Figura 5-44(b).

Control proporcional-derivativo de sistemas de segundo orden. Si se usa una acción de control proporcional-derivativo, se obtiene un equilibrio entre un comportamiento aceptable para una respuesta transitoria y un comportamiento aceptable en un estado estacionario.

Considérese el sistema de la Figura 5-45. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p + K_d s}{Js^2 + (B + K_d)s + K_p}$$

El error en estado estacionario para una entrada rampa unitaria es

$$e_{ss} = \frac{B}{K_p}$$

La ecuación característica es

$$Js^2 + (B + K_d)s + K_p = 0$$

Por tanto, el coeficiente de amortiguamiento efectivo de este sistema es $B + K_d$ en lugar de B. Como el factor de amortiguamiento relativo ζ de este sistema es

$$\zeta = \frac{B + K_d}{2\sqrt{K_p J}}$$

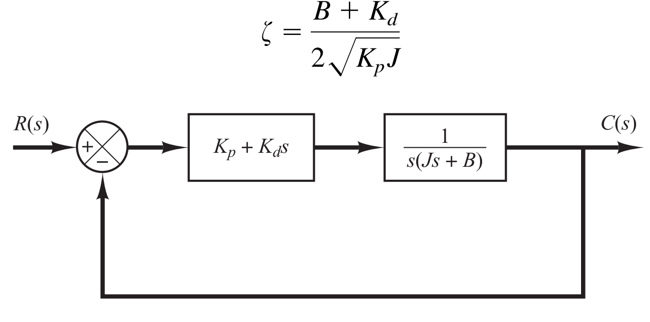


Figura 5-45. Sistema de control.

es posible obtener tanto el error en estado estacionario e_{ss} para una entrada rampa, como la sobreelongación máxima para una entrada escalón pequeña, si se hace que B sea pequeño, K_p sea grande y K_d, lo suficientemente grande para que ζ esté entre 0.4 y 0.7.

5-8 Errores en estado estacionario en los sistemas de control con realimentación unitaria

Los errores en un sistema de control se pueden atribuir a muchos factores. Los cambios en la entrada de referencia provocan errores inevitables durante los periodos transitorios y también pueden producir errores en estado estacionario. Las imperfecciones en los componentes del sistema, tales como la fricción estática, juego o bamboleo y la deriva del amplificador, al igual que el envejecimiento o el deterioro, provocan errores en el estado uniforme. Sin embargo, en esta sección no se analizarán los errores producidos por las imperfecciones de los componentes del sistema. Más bien, se investigará un tipo de error en estado estacionario provocado por la incapacidad del sistema de seguir determinados tipos de entradas.

Cualquier sistema de control físico sufre, por naturaleza, un error en estado estable en respuesta a ciertos tipos de entrada. Un sistema puede no tener un error en estado estacionario para una entrada escalón, pero el mismo sistema puede exhibir un error en estado estacionario diferente de cero ante una entrada rampa. (La única forma de eliminar este error es modificar la estructura del sistema.) El que un sistema determinado exhiba un error en estado estacionario para un tipo específico de entrada depende del tipo de función de transferencia en lazo abierto del sistema, lo cual se analizará a continuación.

Clasificación de los sistemas de control. Los sistemas de control se clasifican de acuerdo con su capacidad de seguir entradas escalón, rampa, parábola, etc. Este es un esquema de clasificación razonable, porque las entradas reales con frecuencia se consideran combinaciones de las entradas mencionadas. Las magnitudes de los errores en estado estacionario producidos por estas entradas individuales indican la bondad del sistema. Considérese el sistema de control con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto $G(s)$:

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

Este sistema contiene el término s^N en el denominador, que representa un polo de multiplicidad N en el origen. El esquema de clasificación actual se basa en la cantidad de integraciones indicadas por la función de transferencia en lazo abierto. Un sistema se denomina de tipo 0, de tipo 1, de tipo 2, ..., si $N = 0$, $N = 1$, $N = 2$, ..., respectivamente. Téngase en cuenta que esta clasificación es diferente de la que se basa en el orden del sistema. Conforme el número del tipo es mayor, mejora la precisión; sin embargo, aumentar el número del tipo agrava el problema de la estabilidad. Siempre es necesario un equilibrio entre la precisión en estado estacionario y la estabilidad relativa. En la práctica, es muy raro tener sistemas de tipo 3 o superiores, pues, por lo general, resulta difícil diseñar sistemas estables que tengan dos o más integradores en la trayectoria directa.

Se verá después que, si $G(s)$ se escribe para que cada término del numerador y el denominador, excepto el término s^N, tienda a la unidad, conforme s tiende a cero, entonces la ganancia en lazo abierto K está directamente relacionada con el error en estado estacionario.

Errores en estado estacionario. Considérese el sistema de la Figura 5-46. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

La función de transferencia entre la señal de error $e(t)$ y la señal de entrada $r(t)$ es

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

donde el error $e(t)$ es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de salida.

El teorema del valor final ofrece una forma conveniente de determinar el comportamiento en estado estacionario de un sistema estable. Como $E(s)$ es

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

el error en estado estacionario es

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

Las constantes de error estático definidas a continuación son figuras de mérito de los sistemas de control. Cuánto más altas sean las constantes, más pequeño es el error en estado estacionario. En un sistema determinado, la salida puede ser la posición, la velocidad, la presión, la temperatura, etc. Sin embargo, la forma física de la salida no viene al caso en el análisis actual. Por tanto, en lo sucesivo se denominará «posición» a la salida, «velocidad» a la razón de cambio de la salida, etc. Esto significa que, en un sistema de control de temperatura, «posición» representa la temperatura de salida, «velocidad» representa la razón de cambio de la temperatura de salida, etcétera.

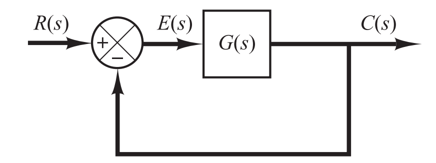


Figura 5-46. Sistema de control.

Constante de error de posición estática K_p. El error en estado estacionario del sistema para una entrada escalón unitario es

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + G(0)}$$

La constante de error de posición estática K_p se define mediante

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = G(0)$$

Por ende, el error en estado estacionario en términos de la constante de error de posición estática K_p se obtiene mediante

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

Para un sistema de tipo 0,

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = K$$

Para un sistema de tipo 1 o mayor,

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = \infty, \qquad \text{para } N \geqslant 1$$

De este modo, para un sistema de tipo 0, la constante de error de posición estática K_p es finita, mientras que, para un sistema de tipo 1 o mayor, K_p es infinita.

Para una entrada escalón unitario, el error en estado estacionario e_{ss} se resume como sigue:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K}, \qquad \text{para sistemas de tipo 0}$$

$$e_{ss} = 0, \qquad \text{para sistemas de tipo 1 o mayor}$$

A partir del análisis anterior, se observa que la respuesta de un sistema de control de realimentación para una entrada escalón implica un error en estado estacionario si no existe un integrador en la trayectoria directa. (Si es posible tolerar errores pequeños para entradas escalón, es permisible un sistema de tipo 0, siempre y cuando la ganancia K sea suficientemente grande. Sin embargo, si la ganancia K es demasiado grande, es difícil obtener una estabilidad relativa razonable.) Si se pretende un error en estado estacionario de cero para una entrada escalón, el tipo del sistema debe ser uno o mayor.

Constante de error de velocidad estática K_v. El error en estado estacionario del sistema con una entrada rampa unitaria se obtiene mediante

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sG(s)}$$

La constante de error de velocidad estática K_v se define mediante

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)$$

Así, el error en estado estacionario en función de la constante de error de velocidad estática K_v se obtiene mediante

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

Aquí se usa el término *error de velocidad* para expresar el error en estado estacionario para una entrada rampa. La dimensión del error de velocidad es igual que la del error del sistema. Es decir, el error de velocidad no es un error en la velocidad, sino un error en la posición debido a una entrada rampa.

Para un sistema de tipo 0,

$$K_v = \lim_{s\to 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = 0$$

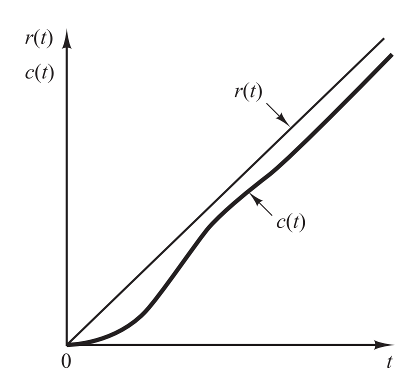


Figura 5-47. Respuesta de un sistema de tipo 1 con realimentación unitaria para una rampa de entrada.

Para un sistema de tipo 1,

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = K$$

Para un sistema de tipo 2 o mayor,

$$K_v = \lim_{s \to 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1)\cdots}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = \infty, \qquad \text{para } N \geqslant 2$$

El error en estado estacionario e_{ss} para la entrada rampa unitaria se resume del modo siguiente:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty, \qquad \text{para sistemas de tipo 0}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}, \qquad \text{para sistemas de tipo 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0, \qquad \text{para sistemas de tipo 2 o mayor}$$

El análisis anterior indica que un sistema de tipo 0 es incapaz de seguir una entrada rampa en el estado uniforme. El sistema de tipo 1 con realimentación unitaria sigue la entrada rampa con un error finito. Operando en estado estacionario, la velocidad de salida es igual a la velocidad de entrada, pero hay un error de posición. Este error es proporcional a la velocidad de la entrada y es inversamente proporcional a la ganancia K. La Figura 5-47 muestra un ejemplo de la respuesta de un sistema de tipo 1 con realimentación unitaria para una entrada rampa. El sistema de tipo 2 o mayor sigue una entrada rampa con un error de cero en estado estacionario.

Constante de error de aceleración estática K_a. El error en estado estacionario del sistema con una entrada parábola unitaria (entrada de aceleración), que se define mediante

$$r(t) = \frac{t^2}{2}, \qquad \text{para } t \geqslant 0$$

$$= 0, \qquad \text{para } t < 0$$

se obtiene a partir de

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^3}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s^2 G(s)}$$

La constante de error de aceleración estática K_a se define mediante la ecuación

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

De esta manera, el error en estado estacionario es

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

Obsérvese que el error de aceleración, el error en estado estacionario producido por una entrada parábola, es un error en la posición.

Los valores de K_a se obtienen del modo siguiente:

Para un sistema de tipo 0,

$$K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)/(T_b s + 1)\cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = 0$$

Para un sistema de tipo 1,

$$K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)/(T_b s + 1)\cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = 0$$

Para un sistema de tipo 2,

$$K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)/(T_b s + 1)\cdots}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = K$$

Para un sistema de tipo 3 o mayor,

$$K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)/(T_b s + 1)\cdots}{s^N(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\cdots} = \infty, \qquad \text{para } N \geqslant 3$$

Por tanto, el error en estado estacionario para la entrada parábola unitaria es

$$e_{ss} = \infty, \qquad \text{para sistemas de tipo 0 y tipo 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K}, \qquad \text{para sistemas de tipo 2}$$

$$e_{ss} = 0, \qquad \text{para sistemas de tipo 3 o mayor}$$

Obsérvese que tanto los sistemas de tipo 0 como los de tipo 1 son incapaces de seguir una entrada parábola en estado estacionario. El sistema de tipo 2 con realimentación unitaria puede seguir una entrada parábola con una señal de error finita. La Figura 5-48 muestra un ejemplo de la respuesta de un sistema de tipo 2 con realimentación unitaria a una entrada parábola. El sistema de tipo 3 o mayor con realimentación unitaria sigue una entrada parábola con un error de cero en estado uniforme.

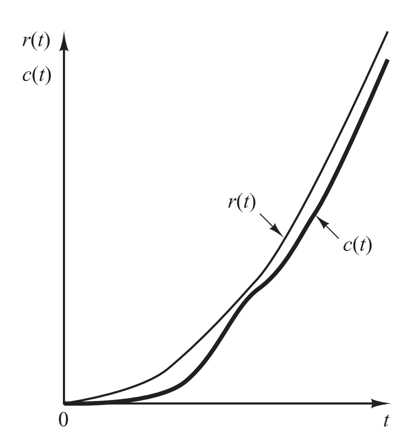


Figura 5-48. Respuesta de un sistema de tipo 2 con realimentación unitaria a una entrada parabólica.

Resumen. La Tabla 5-1 resume los errores en estado estacionario para los sistemas de tipo 0, de tipo 1 y de tipo 2 cuando están sujetos a diversas entradas. Los valores finitos para los errores en estado estacionario aparecen en la línea diagonal. Sobre la diagonal, los errores en estado estacionario son infinitos; bajo la diagonal, son cero.

Tabla 5-1. Error en estado estacionario en función de la ganancia *K*.

	Entrada escalón $r(t) = 1$	Entrada rampa $r(t) = t$	Entrada aceleración $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
Sistema tipo 0	$\dfrac{1}{1+K}$	∞	∞
Sistema tipo 1	0	$\dfrac{1}{K}$	∞
Sistema tipo 2	0	0	$\dfrac{1}{K}$

Recuérdese que los términos *error de posición*, *error de velocidad* y *error de aceleración* significan desviaciones en estado estacionario en la posición de salida. Un error de velocidad finito implica que, después de que han desaparecido los transitorios, la entrada y la salida se mueven a la misma velocidad, pero tienen una diferencia de posición finita.

Las constantes de error K_p, K_v y K_a describen la capacidad de un sistema de realimentación unitaria de reducir o eliminar el error en estado estacionario. Por tanto, indican el comportamiento en estado estacionario. En general, es conveniente aumentar las constantes de error, al tiempo que se conserva la respuesta transitoria dentro de un rango aceptable. Si hay un conflicto entre la constante de error de velocidad estática y la constante de error de la aceleración, esta última se considera menos importante que la primera. Debe señalarse que, para mejorar el comportamiento en estado estacionario se aumenta el tipo del sistema agregando uno o más integradores a la trayectoria directa. Sin embargo, esto introduce un problema de estabilidad adicional. Por lo general, es difícil realizar el diseño de un sistema satisfactorio con más de dos integradores en serie en la trayectoria directa.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-5-1. En el sistema de la Figura 5-49, $x(t)$ es el desplazamiento de entrada y $\theta(t)$ es el desplazamiento angular de salida. Suponga que las masas involucradas son tan pequeñas que pueden no considerarse y que todos los movimientos tienen la restricción de ser pequeños; por tanto, el sistema se considera lineal. Las condiciones iniciales para x y θ son cero, o $x(0-) = 0$ y $\theta(0-) = 0$. Demuestre que este sistema es un diferenciador. Después, obtenga la respuesta $\theta(t)$ cuando $x(t)$ es una entrada escalón unitario.

Solución. La ecuación para el sistema es

$$b(\dot{x} - L\dot{\theta}) = kL\theta$$

o bien

$$L\dot{\theta} + \frac{k}{b}L\theta = \dot{x}$$

La transformada de Laplace de esta última ecuación, con condiciones iniciales cero, da

$$\left(Ls + \frac{k}{b}L\right)\Theta(s) = sX(s)$$

Y, por tanto,

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{1}{L}\,\frac{s}{s + (k/b)}$$

En este caso, se trata de un sistema diferenciador.

Para la entrada escalón unitario $X(s) = 1/s$, la salida $\Theta(s)$ se convierte en

$$\Theta(s) = \frac{1}{L}\,\frac{1}{s + (k/b)}$$

La transformada inversa de Laplace de $\Theta(s)$ produce

$$\theta(t) = \frac{1}{L}e^{-(k/b)t}$$

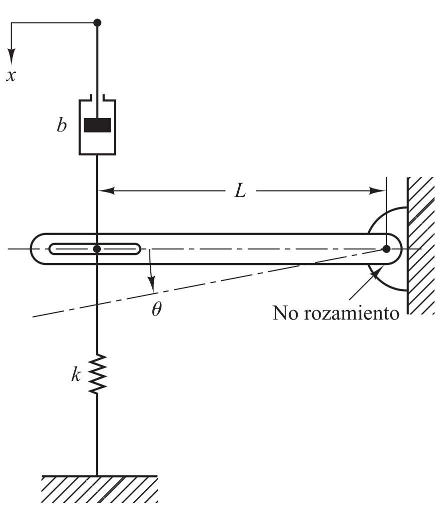
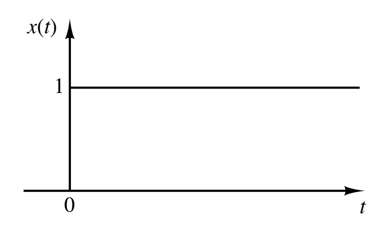


Figura 5-49. Sistema mecánico.



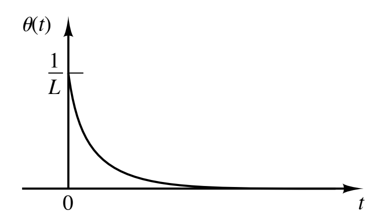


Figura 5-50. Entrada escalón unitario y la respuesta de sistema mecánico mostrado en la Figura 5-49.

Observe que, si el valor de k/b es grande, la respuesta $\theta(t)$ se aproxima a una señal pulso como se aprecia en la Figura 5-50.

A-5-2. Con frecuencia se usan trenes de engranajes en sistemas de seguimiento para reducir la velocidad, aumentar el par u obtener la transferencia de potencia más eficiente, haciendo coincidir el miembro de manejo con la carga determinada.

Considere el sistema de tren de engranajes de la Figura 5-51. En este sistema, un motor maneja una carga mediante un tren de engranajes. Suponiendo que la rigidez de los ejes del tren de engranajes es infinita (no existe juego o bamboleo ni deformación elástica) y que el número de dientes en cada engranaje es proporcional al radio del mismo, obtenga el momento de inercia equivalente y el coeficiente de fricción viscosa equivalente referido al eje del motor y con el eje de la carga.

En la Figura 5-51, el número de dientes en los engranajes 1, 2, 3 y 4 es N_1, N_2, N_3 y N_4 respectivamente. Los desplazamientos angulares de los ejes 1, 2 y 3 son θ_1, θ_2 y θ_3, respectivamente. Por tanto, $\theta_2/\theta_1 = N_1/N_2$ y $\theta_3/\theta_2 = N_3/N_4$. El momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa de cada componente del tren de engranajes se representan mediante J_1, b_1; J_2, b_2; y J_3, b_3, respectivamente. (J_3 y b_3 incluyen el momento de inercia y la fricción de la carga.)

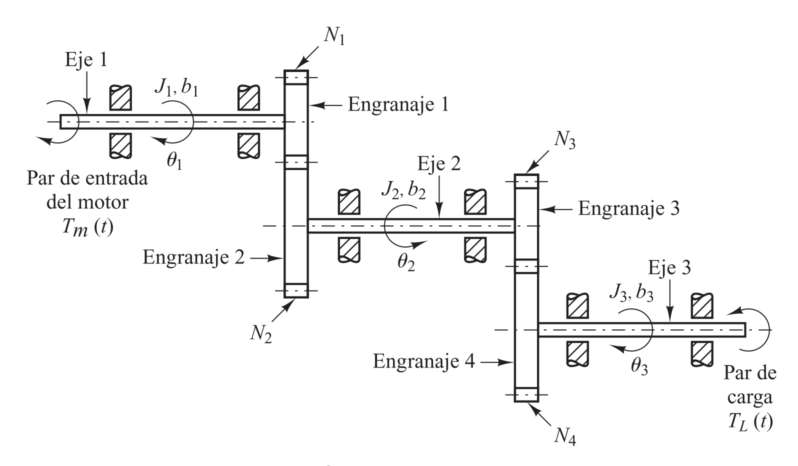


Figura 5-51. Sistema de tren de engranajes.

Solución. Para este sistema de tren de engranajes, se obtienen las tres ecuaciones siguientes. Para el eje 1,

$$J_1\ddot{\theta}_1 + b_1\dot{\theta}_1 + T_1 = T_m \tag{5-63}$$

donde T_m es el par desarrollado por el motor y T_1 es el par de carga en el engranaje 1 debido al reposo del tren de carga. Para el eje 2,

$$J_2\ddot{\theta}_2 + b_2\dot{\theta}_2 + T_3 = T_2 \tag{5-64}$$

donde T_2 es el par transmitido al engranaje 2 y T_3 es el par de carga en el engranaje 3 debido al reposo del tren de engranajes. Como el trabajo realizado por el engranaje 1 es igual al del engranaje 2,

$$T_1\theta_1 = T_2\theta_2 \qquad \text{o} \qquad T_2 = T_1\frac{N_2}{N_1}$$

Si $N_1/N_2 < 1$, la relación de engranajes reduce la velocidad, al igual que aumenta el par. Para el tercer eje,

$$J_3\ddot{\theta}_3 + b_3\dot{\theta}_3 + T_L = T_4 \tag{5-65}$$

donde T_L es el par de carga y T_4 es el par transmitido al engranaje 4. T_3 y T_4 se relacionan mediante

$$T_4 = T_3\frac{N_4}{N_3}$$

y θ_3 y θ_1 se relacionan mediante

$$\theta_3 = \theta_2\frac{N_3}{N_4} = \theta_1\frac{N_1}{N_2}\frac{N_3}{N_4}$$

La eliminación de T_1, T_2, T_3 y T_4 de las Ecuaciones (5-63), (5-64) y (5-65) produce

$$J_1\ddot{\theta}_1 + b_1\dot{\theta}_1 + \frac{N_1}{N_2}(J_2\ddot{\theta}_2 + b_2\dot{\theta}_2) + \frac{N_1N_3}{N_2N_4}(J_3\ddot{\theta}_3 + b_3\dot{\theta}_3 + T_L) = T_m$$

Eliminando θ_2 y θ_3 de esta última ecuación, y escribiendo la ecuación resultante en función de θ_1 y sus derivadas con respecto al tiempo, se obtiene

$$\left[J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_3\right]\ddot{\theta}_1 + \left[b_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 b_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 b_3\right]\dot{\theta}_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)\left(\frac{N_3}{N_4}\right)T_L = T_m \tag{5-66}$$

Por tanto, el momento de inercia equivalente y el coeficiente de fricción del tren de engranajes referido a la flecha 1, se obtienen, respectivamente, mediante

$$J_{1\text{eq}} = J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_3$$

$$b_{1\text{eq}} = b_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 b_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 b_3$$

Asimismo, el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa equivalentes del tren de engranajes, referido a la flecha de carga (eje 3), se obtienen, respectivamente, mediante

$$J_{3\text{eq}} = J_3 + \left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 J_2 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_1$$

$$b_{3\text{eq}} = b_3 + \left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 b_2 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\left(\frac{N_4}{N_3}\right)^2 b_1$$

Por tanto, la relación entre J_{1eq} y J_{3eq} es

$$J_{1eq} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_{3eq}$$

y aquella entre b_{1eq} y b_{3eq} es

$$b_{1eq} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 b_{3eq}$$

El efecto de J_2 y J_3 en un momento de inercia equivalente se determina mediante las relaciones de engranajes N_1/N_2 y N_3/N_4. Para los trenes de engranajes que reducen la velocidad, por lo general las relaciones N_1/N_2 y N_3/N_4 son menores que la unidad. Si $N_1/N_2 \ll 1$ y $N_3/N_4 \ll 1$, el efecto de J_2 y J_3 en el momento de inercia equivalente J_{1eq} es insignificante. Para el coeficiente de fricción viscosa equivalente b_{1eq} del tren de engranajes se aplican comentarios similares. En función del momento de inercia equivalente J_{1eq} y el coeficiente de fricción viscosa equivalente b_{1eq} la Ecuación (5-66) se simplifica para dar

$$J_{1eq}\ddot{\theta}_1 + b_{1eq}\dot{\theta}_1 + nT_L = T_m$$

donde

$$n = \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4}$$

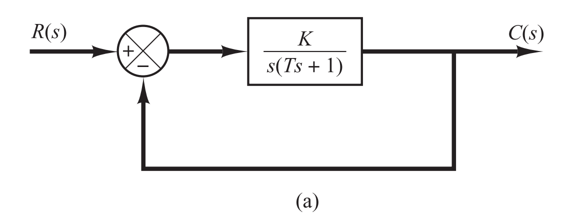
A-5-3. Cuando el sistema de la Figura 5-52(a) está sujeto a una entrada escalón unitario, la salida del sistema responde como se aprecia en la Figura 5-52(b). Determine los valores de K y T a partir de la curva de respuesta.

Solución. La sobreelongación máxima de 25.4% corresponde $\zeta = 0.4$. A partir de la curva de respuesta, se tiene que

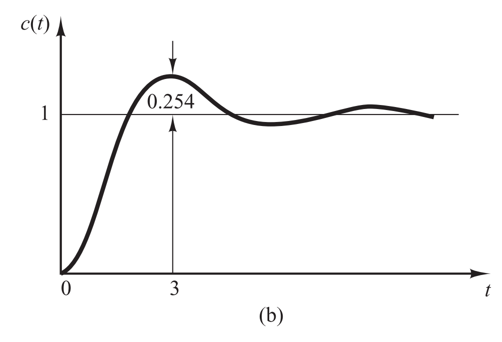
$$t_p = 3$$

En consecuencia,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-0.4^2}} = 3$$



(a)



(b)

Figura 5-52. (a) Sistema en lazo cerrado; (b) curva de respuesta a escalón unitario.

De aquí se deduce que

$$\omega_n = 1.14$$

A partir del diagrama de bloques, se tiene que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

de donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}, \qquad 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}$$

Por tanto, los valores de T y K se determinan como

$$T = \frac{1}{2\zeta\omega_n} = \frac{1}{2 \times 0.4 \times 1.14} = 1.09$$

$$K = \omega_n^2 T = 1.14^2 \times 1.09 = 1.42$$

A-5-4. Determine los valores de K y k del sistema en lazo cerrado de la Figura 5-53 para que la sobreelongación máxima de la respuesta escalón unitario sea del 25% y el tiempo pico sea de 2 seg. Suponga que $J = 1$ kg-m^2.

Solución. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Kks + K}$$

Sustituyendo $J = 1$ kg-m^2 en esta última ecuación se tiene que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + Kks + K}$$

Observe que en este problema

$$\omega_n = \sqrt{K}, \qquad 2\zeta\omega_n = Kk$$

La sobreelongación máxima M_p es

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

que se especifica como 25%. Por tanto,

$$e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.25$$

de donde

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.386$$

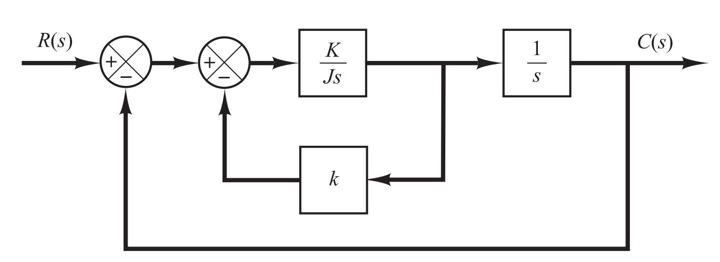


Figura 5-53. Sistema en lazo cerrado.

o bien

$$\zeta = 0.404$$

El tiempo pico t_p se especifica como 2 seg. Y, por tanto,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 2$$

o bien

$$\omega_d = 1.57$$

En este caso la frecuencia natural no amortiguada ω_n es

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{1.57}{\sqrt{1 - 0.404^2}} = 1.72$$

Por tanto, se obtiene

$$K = \omega_n^2 = 1.72^2 = 2.95 \text{ N-m}$$

$$k = \frac{2\zeta\omega_n}{K} = \frac{2 \times 0.404 \times 1.72}{2.95} = 0.471 \text{ seg}$$

A-5-5. La Figura 5-54(a) muestra un sistema vibratorio mecánico. Cuando se aplica al sistema una fuerza de 2 lb (entrada escalón), la masa oscila como se aprecia en la Figura 5-54(b). Determine m, b y k del sistema a partir de esta curva de respuesta. El desplazamiento x se mide a partir de la posición de equilibrio.

Solución. La función de transferencia de este sistema es

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Como

$$P(s) = \frac{2}{s}$$

se obtiene

$$X(s) = \frac{2}{s(ms^2 + bs + k)}$$

de lo cual se deduce que el valor en estado estacionario de x es

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s) = \frac{2}{k} = 0.1 \text{ ft}$$

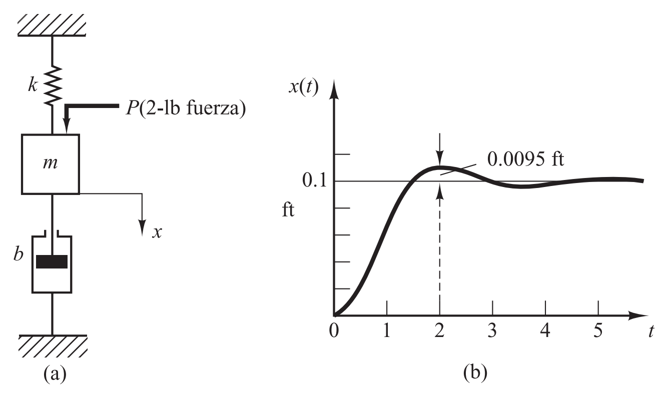


Figura 5-54. (a) Sistema vibratorio mecánico; (b) curva de respuesta a un escalón.

Por tanto,

$$k = 20 \text{ lb}_f/\text{ft}$$

Observe que $M_p = 9.5\%$ corresponde a $\zeta = 0.6$. El tiempo pico t_p se obtiene mediante

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{0.8\omega_n}$$

La curva experimental muestra que $t_p = 2$ seg. Por tanto,

$$\omega_n = \frac{3.14}{2 \times 0.8} = 1.96 \text{ rad/seg}$$

Como $\omega_n^2 = k/m = 20/m$, se obtiene

$$m = \frac{20}{\omega_n^2} = \frac{20}{1.96^2} = 5.2 \text{ slug} = 166 \text{ lb}$$

(Observe que 1 slug = 1 $\text{lb}_f\text{-seg}^2/\text{ft}$.) Después b se determina a partir de

$$2\zeta\omega_n = \frac{b}{m}$$

o bien

$$b = 2\zeta\omega_n m = 2 \times 0.6 \times 1.96 \times 5.2 = 12.2 \text{ lb}_f/\text{ft/seg}$$

A-5-6. Considere la respuesta escalón unitario del sistema de segundo orden

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

La amplitud de la sinusoide exponencialmente amortiguada cambia como una serie geométrica. En el tiempo $t = t_p = \pi/\omega_d$, la amplitud es igual a $e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}$. Después de una oscilación, o en $t = t_p + 2\pi/\omega_d = 3\pi/\omega_d$, la amplitud es igual a $e^{-(\sigma/\omega_d)3\pi}$; después de otro ciclo de oscilación, la amplitud es $e^{-(\sigma/\omega_d)5\pi}$. El logaritmo de la razón de las sucesivas amplitudes se denomina *logaritmo decremental*. Determe el logaritmo decremental para este sistema de segundo orden. Describa un método para determinar experimentalmente la razón de amortiguamiento a partir de la razón con la que decae la oscilación.

Solución. Se define la amplitud de la oscilación de salida en $t = t_i$ como x_i, donde $t_i = t_p + (i-1)T$ (T = periodo de oscilación). La razón de amplitud por un periodo de oscilación amortiguada es

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}}{e^{-(\sigma/\omega_d)3\pi}} = e^{2(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Por tanto, el logaritmo decremental δ es

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Es una función exclusivamente del coeficiente de amortiguamiento ζ. Por tanto, el coeficiente de amortiguamiento ζ se puede determinar utilizando el logaritmo decremental.

En la determinación experimental del coeficiente de amortiguamiento ζ a partir de la razón con que decae la oscilación, se mide la amplitud x_1 en $t = t_p$ y la amplitud x_n en $t = t_p + (n-1)T$. Observe que es necesario escoger n lo suficientemente grande para que la razón o bien x_1/x_n no sea cercano a la unidad. Entonces,

$$\frac{x_1}{x_n} = e^{(n-1)2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

o bien

$$\ln \frac{x_1}{x_n} = (n-1)\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

De ahí

$$\zeta = \frac{\frac{1}{n-1}\left(\ln \frac{x_1}{x_n}\right)}{\sqrt{4\pi^2 + \left[\frac{1}{n-1}\left(\ln \frac{x_1}{x_n}\right)\right]^2}}$$

A-5-7. En el sistema de la Figura 5-55, los valores numéricos de m, b y k son $m = 1$ kg, $b = 2$ N-seg/m, y $k = 100$ N/m. La masa se desplaza 0.05 m y se libera sin velocidad inicial. Encuentre la frecuencia observada en la vibración. Además, encuentre la amplitud cuatro ciclos después. El desplazamiento x se mide a partir de la posición de equilibrio.

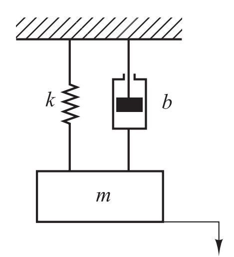


Figura 5-55. Sistema de masa-resorte-amortiguador.

Solución. La ecuación de movimiento para el sistema es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Sustituyendo los valores numéricos para m, b y k en esta ecuación se tiene

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 100x = 0$$

donde las condiciones iniciales son $x(0) = 0.05$ y $\dot{x}(0) = 0$. A partir de esta última ecuación, la frecuencia natural no amortiguada ω_n y el factor de amortiguamiento relativo ζ resultan

$$\omega_n = 10, \qquad \zeta = 0.1$$

La frecuencia observada en realidad en la vibración es la frecuencia natural amortiguada ω_d.

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 10\sqrt{1-0.01} = 9.95 \text{ rad/seg}$$

En el análisis actual, $\dot{x}(0)$ se obtiene como cero. Por tanto, la solución $x(t)$ se escribe como

$$x(t) = x(0)e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d t\right)$$

de lo que se deduce que, en $t = nT$, donde $T = 2\pi/\omega_d$,

$$x(nT) = x(0)e^{-\zeta\omega_n nT}$$

En consecuencia, la amplitud cuatro ciclos después se convierte en

$$x(4T) = x(0)e^{-\zeta\omega_n 4T} = x(0)e^{-(0.1)(10)(4)(0.6315)}$$

$$= 0.05e^{-2.526} = 0.05 \times 0.07998 = 0.004 \text{ m}$$

A-5-8. Obtenga tanto la solución analítica como la computacional de la respuesta escalón unitario del sistema de orden alto siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3s^2 + 25s^2 + 72s + 80}{s^4 + 8s^3 + 40s^2 + 96s + 80}$$

[Obtenga la expansión en fracciones simples de $C(s)$ con MATLAB cuando $R(s)$ es una función escalón unitario.]

Solución. El Programa de MATLAB 5-18 proporciona la curva de respuesta escalón unitario que aparece en la Figura 5-56. También origina la expansión en fracciones simples de $C(s)$ siguiente:

$$C(s) = \frac{3s^3 + 25s^2 + 72s + 80}{s^4 + 8s^3 + 40s^2 + 96s + 80} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{-0.2813 - j0.1719}{s + 2 - j4} + \frac{-0.2813 + j0.1719}{s + 2 + j4}$$

$$+ \frac{-0.4375}{s + 2} + \frac{-0.375}{(s + 2)^2} + \frac{1}{s}$$

$$= \frac{-0.5626(s + 2)}{(s + 2)^2 + 4^2} + \frac{(0.3438) \times 4}{(s + 2)^2 + 4^2}$$

$$- \frac{0.4375}{s + 2} - \frac{0.375}{(s + 2)^2} + \frac{1}{s}$$

MATLAB Programa 5-18

```
% -------Respuesta a escalón unitario de C(s)/R(s) y desarrollo
% en fracciones simples de C(s) -------

num = [3  25  72  80];
den = [1  8  40  96  80];
step(num,den);
v = [0  3  0  1.2]; axis(v), grid

% Para obtener el desarrollo en fracciones simples de C(s),
% introduzca las órdenes
%    num1 = [3  25  72  80];
%    den1 = [1  8  40  96  80  0];
%    [r,p,k] = residue(num1,den1)

num1 = [25  72  80];
den1 = [1  8  40  96  80  0];
[r,p,k] = residue(num1,den1)

r =

   -0.2813-0.1719i
   -0.2813+0.1719i
   -0.4375
   -0.3750
    1.0000

p =
   -2.0000+4.0000i
   -2.0000-4.0000i
   -2.0000
   -2.0000
    0

k =

   []
```

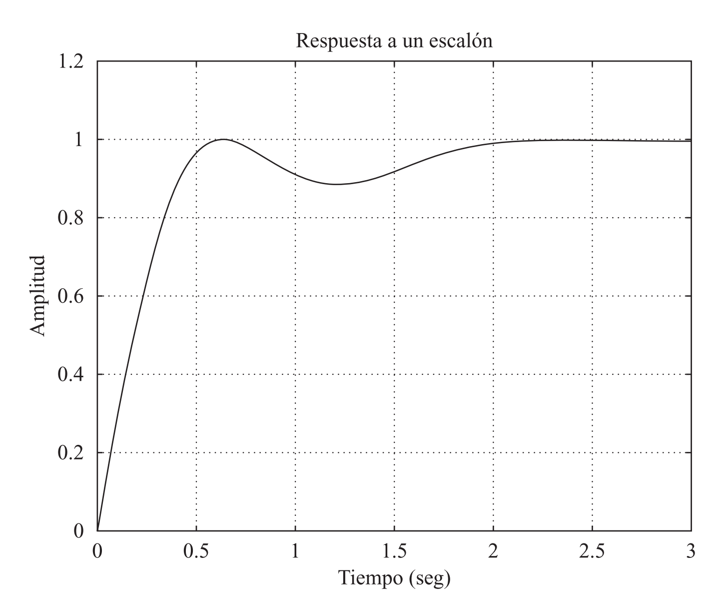


Figura 5-56. Curva de respuesta a un escalón unitario.

Por tanto, la respuesta temporal $c(t)$ está dada por

$$c(t) = -0.5626e^{-2t}\cos 4t + 0.3438e^{-2t}\,\text{sen}\,4t$$
$$-0.4375e^{-2t} - 0.375te^{-2t} + 1$$

En la Figura 5-56 se observa el hecho de que la curva de respuesta es una curva exponencial superpuesta a una sinusoide amortiguada.

A-5-9. Cuando un sistema en lazo cerrado involucra un numerador con dinámica, la curva de respuesta a un escalón unitario puede presentar una sobreelongación grande. Obtenga la respuesta a un escalón unitario del siguiente sistema utilizando MATLAB:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10s + 4}{s^2 + 4s + 4}$$

Obtenga también la respuesta a una rampa unitaria con MATLAB.

Solución. El Programa de MATLAB 5-19 calcula la respuesta del sistema a un escalón unitario y a una rampa unitaria. En las Figuras 5-57(a) y (b) se muestran, respectivamente, la curva de respuesta al escalón unitario y a la entrada rampa unitaria junto con la entrada rampa unitaria.

Observe que la curva de respuesta al escalón unitario presenta una sobreelongación de más del 215%. La curva de respuesta a la rampa unitaria tiende a la curva de entrada. Estos fenómenos se producen por la presencia de un término derivativo grande en el numerador.

MATLAB Programa 5-19

```
num = [10  4];
den = [1  4  4];
t = 0:0.02:10;
y = step(num,den,t);
plot(t,y)
grid
title('Respuesta a un escalón unitario')
xlabel('t (seg)')
ylabel('Salida')

num1 = [10  4];
den1 = [1  4  4  0];
y1 = step(num1,den1,t);
plot(t,t,'--',t,y1)
v = [0  10  0  10]; axis(v);
grid
title('Respuesta a una rampa unitaria')
xlabel('t (sec)')
ylabel('Entrada rampa unitaria y salida')
text(6.1,5,0,'Entrada rampa unitaria')
text(3.5,7.1,'Salida')
```

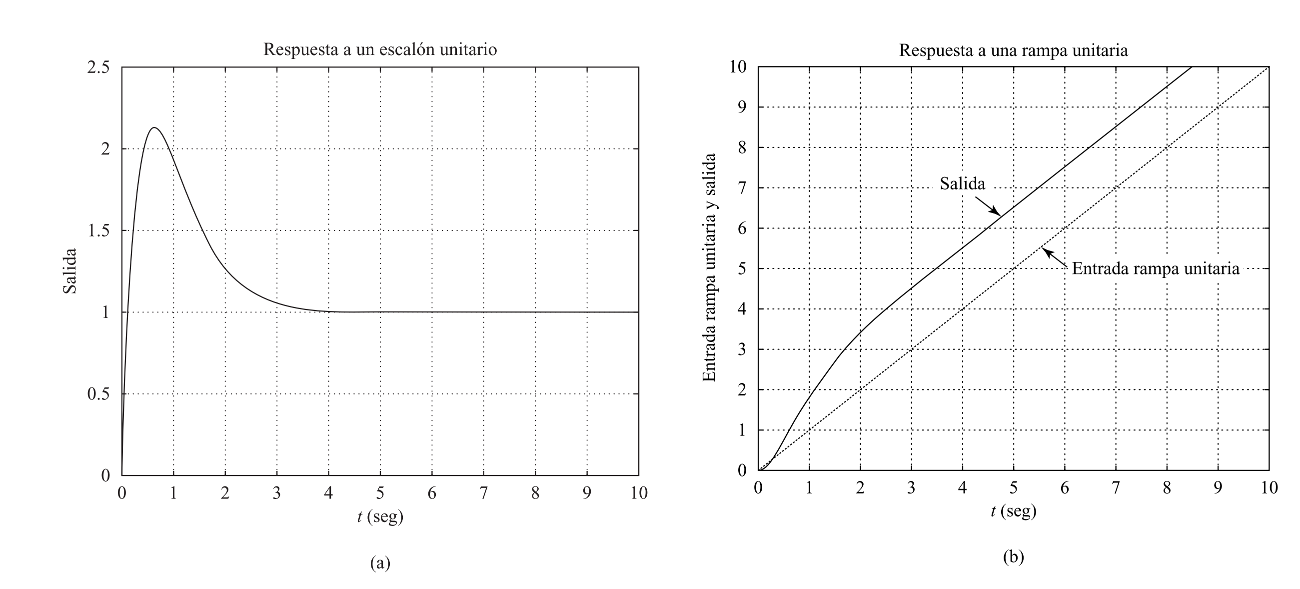


Figura 5-57. (a) Curva de respuesta a un escalón unitario; (b) curva de respuesta a una rampa unitaria junto con entrada rampa unitaria.

A-5-10. Considere el sistema de orden alto definido por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6.3223s^2 + 18s + 12.811}{s^4 + 6s^3 + 11.3223s^2 + 18s + 12.811}$$

Dibuje la curva de respuesta a un escalón unitario de este sistema utilizando MATLAB. Obtenga también utilizando MATLAB el tiempo de subida, el tiempo de pico, la máxima sobreelongación y el tiempo de asentamiento.

Solución. El Programa de MATLAB 5-20 dibuja la curva de respuesta a un escalón unitario y calcula el tiempo de subida, el tiempo de pico, la máxima sobreelongación y el tiempo de asentamiento. En la Figura 5-58 se muestra la curva de respuesta a un escalón unitario.

MATLAB Programa 5-20

```
% ------- Este programa representa la respuesta a un escalón
% unitario, así como encuentra el tiempo de subida, tiempo
% de pico, sobreelongación máxima, y tiempo de asentamiento.
% En este programa el tiempo de subida se calcula como el
% tiempo requerido para que la respuesta pase del 10%
% al 90% de su valor final. -------

num = [6.3223  18  12.811];
den = [1  6  11.3223  18  12.811];
t = 0:0.02:20;
[y,x,t] = step(num,den,t);
plot(t,y)
grid
title('Respuesta a un escalón unitario')
xlabel('t (seg)')
ylabel('Salida y(t)')

r1 = 1; while y(r1) < 0.1, r1 = r1+1; end;
r2 = 1; while y(r2) < 0.9, r2 = r2+1; end;
tiempo_subida = (r2-r1)*0.02

tiempo_subida =

   0.5800

[ymax,tp] = max(y);
tiempo_pico = (tp-1)*0.02

tiempo_pico =

   1.6600

sobreelongacion_max = ymax-1

sobreelongacion_max =

   0.6182

s = 1001; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02; s = s-1; end;
tiempo_asentamiento = (s-1)*0.02

tiempo_asentamiento =

   10.0200
```

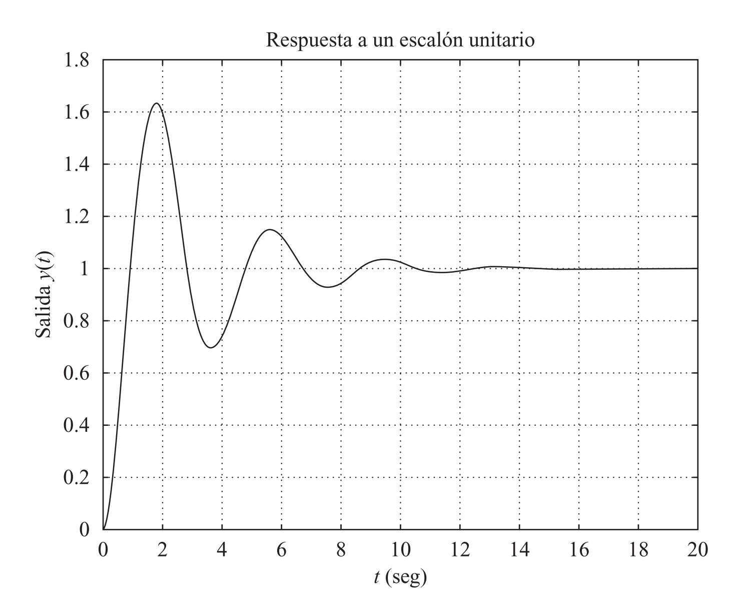


Figura 5-58. Curva de respuesta a un escalón unitario.

A-5-11. Considere el sistema en lazo cerrado definido por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Utilizando un «bucle for», escriba un programa en MATLAB para obtener la respuesta de este sistema en los cuatro casos siguientes:

Caso 1: $\zeta = 0.3, \quad \omega_n = 1$

Caso 2: $\zeta = 0.5, \quad \omega_n = 2$

Caso 3: $\zeta = 0.7, \quad \omega_n = 4$

Caso 4: $\zeta = 0.8, \quad \omega_n = 6$

Solución. Se define $\omega_n^2 = a$ y $2\zeta\omega_n = b$. Entonces, a y b tienen cada uno cuatro elementos, que son:

```
a = [1  4  16  36]

b = [0.6  2  5.6  9.6]
```

Utilizando los vectores `a` y `b`, el Programa de MATLAB 5-21 calculará las curvas de respuesta al escalón unitario que se muestran en la Figura 5-59.

MATLAB Programa 5-21

```
a = [1  4  16  36];
b = [0.6  2  5.6  9.6];
t = 0:0.1:8;
y = zeros(81,4);
   for i = 1:4;
   num = [a(i)];
   den = [1  b(i)  a(i)];
   y(:,i) = step(num,den,t);
   end
plot(t,y(:,1),'o',t,y(:,2),'x',t,y(:,3),'-',t,y(:,4),'-.')
grid
title('Respuesta a un escalón unitario para cuatro casos')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas')
gtext('1')
gtext('2')
gtext('3')
gtext('4')
```

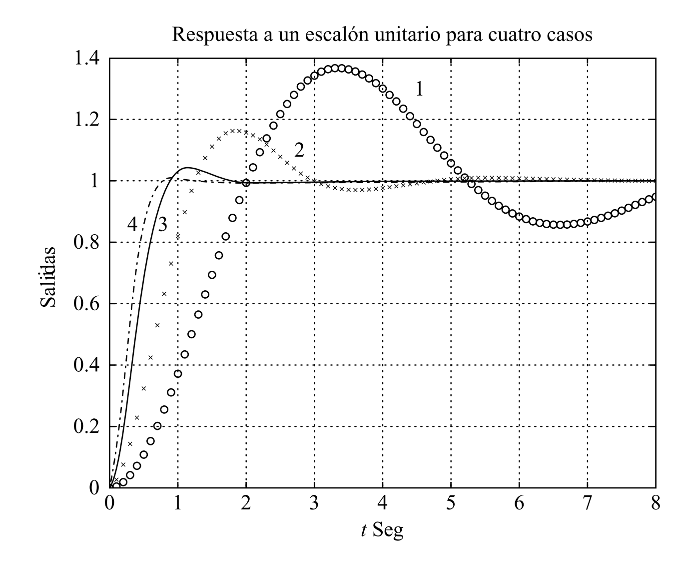


Figura 5-59. Curvas de respuesta a un escalón unitario para cuatro casos.

A-5-12. Utilizando MATLAB, obtenga la respuesta a una rampa unitaria del sistema de control en lazo cerrado cuya función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s + 10}{s^3 + 6s^2 + 9s + 10}$$

Obtenga también la respuesta de este sistema cuando la entrada está dada por

$$r = e^{-0.5t}$$

Solución. El Programa de MATLAB 5-22 calcula la respuesta a una rampa unitaria y la respuesta a la entrada exponencial $r = e^{-0.5t}$. Las curvas de respuesta que resultan se muestran en las Figuras 5-60(a) y (b), respectivamente.

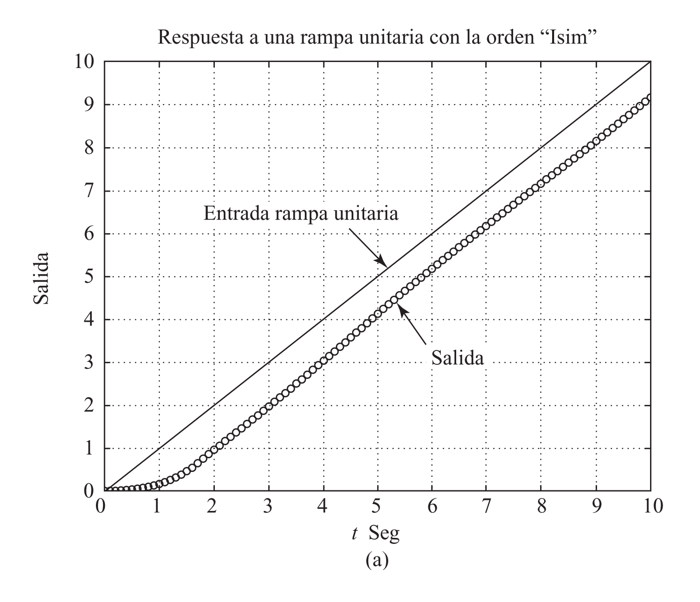
MATLAB Programa 5-22

```
% --------- Respuesta a una rampa unitaria ---------

num = [1  10];
den = [1  6  9  10];
t = 0:0.1:10;
r = t;
y = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,y,'o')
grid
title('Respuesta a una rampa unitaria con la orden "lsim"')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salida')
text(3.2,6.5,'Entrada rampa unitaria')
text(6.0,3.1,'Salida')

% --------- Respuesta a entrada r1 = exp(-0.5t). ---------

num = [0  0  1  10];
den = [1  6  9  10];
t = 0:0.1:12;
r1 = exp(-0.5*t);
y1 = lsim(num,den,r1,t);
plot(t,r1,'-',t,y1,'o')
grid
title('Respuesta a la entrada r1 = exp(-0.5t)')
xlabel('t Seg')
ylabel('Entrada y salida')
text(1.4,0.75,'Entrada r1 = exp(-0.5t)')
text(6.2,0.34,'Salida')
```



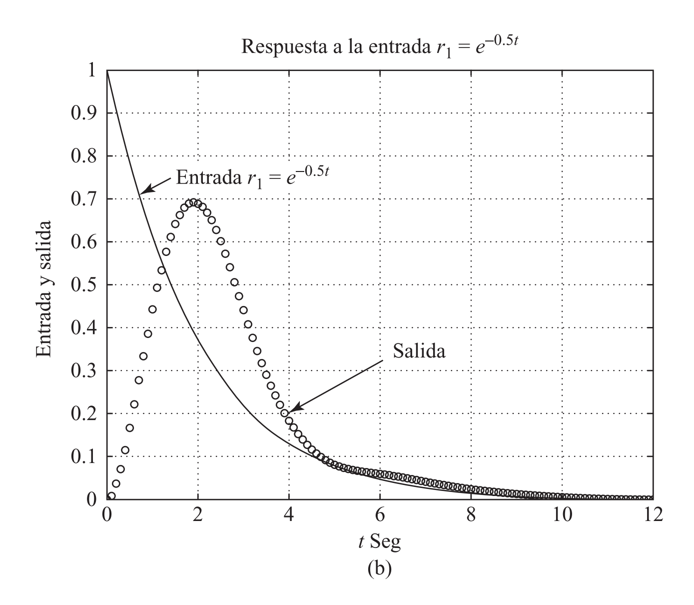


Figura 5-60. (a) Curva de respuesta a rampa unitaria; (b) respuesta a entrada exponencial $r = e^{-0.5t}$.

A-5-13. Obtenga la respuesta del sistema en lazo cerrado definido por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2 + s + 5}$$

cuando la entrada $r(t)$ está dada por

$$r(t) = 2 + t$$

[La entrada $r(t)$ es una entrada escalón de magnitud 2 más una rampa unitaria.]

Solución. El Programa MATLAB 5-23 es una posible solución. En la Figura 5-61 se muestra la curva de respuesta resultante junto con un dibujo de la función de entrada.

MATLAB Programa 5-23

```
num = [5];
den = [1  1  5];
t = 0:0.05:10;
r = 2 + t ;
c = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,c,'o')
grid
title('Respuesta a la entrada r(t) = 2 + t')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salida c(t) y entrada r(t) = 2 + t')
```

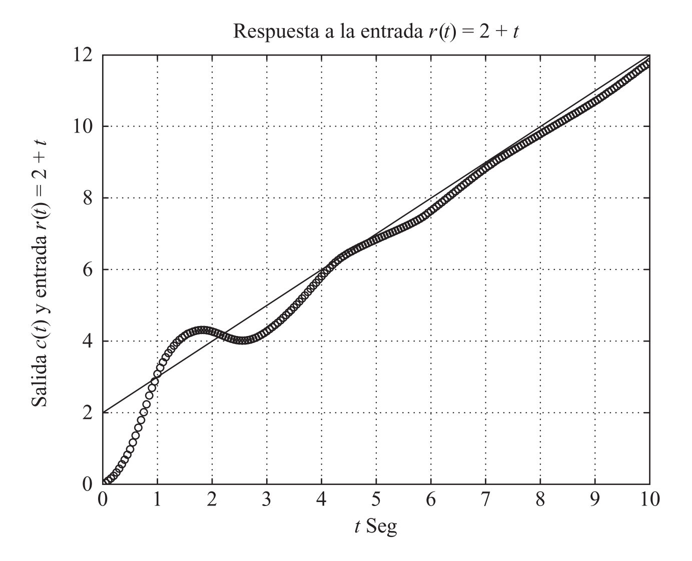


Figura 5-61. Respuesta a entrada $r(t) = 2 + t$.

A-5-14. Obtenga la respuesta del sistema que se muestra en la Figura 5-62 cuando la entrada $r(t)$ está dada por

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2$$

[La entrada $r(t)$ es una entrada aceleración unitaria.]

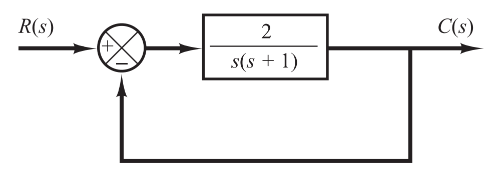


Figura 5-62. Sistema de control.

Solución. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + s + 2}$$

El Programa MATLAB 5-24 calcula la respuesta a la aceleración unitaria. En la Figura 5-63 se muestra la respuesta resultante junto con la entrada aceleración unitaria.

MATLAB Programa 5-24

```
num = [2];
den = [1  1  2];
t = 0:0.2:10;
r = 0.5*t.^2;
y = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,y,'o',t,y,'-')
grid
title('Respuesta a aceleración unitaria')
xlabel('t Seg')
ylabel('Entrada y salida')
text(2.1,27.5,'Entrada aceleración unitaria')
text(7.2,7.5,'Salida')
```

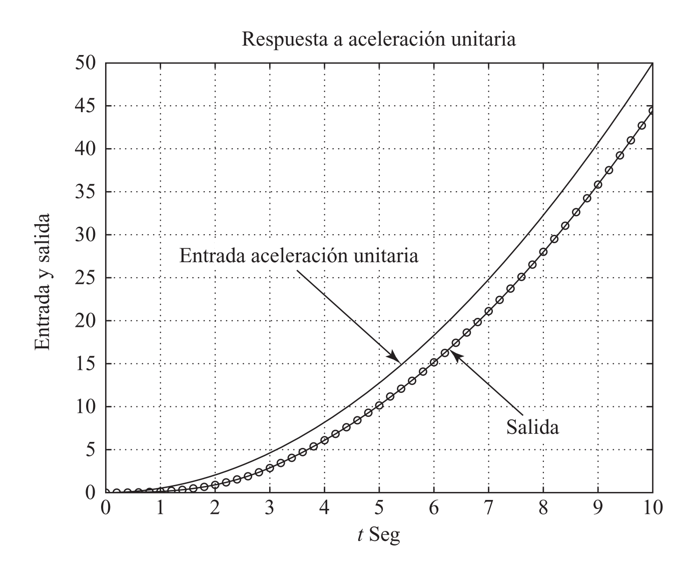


Figura 5-63. Respuesta a entrada aceleración unitaria.

A-5-15. Considere el sistema definido por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

donde $\zeta = 0$, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 y 1.0. Escriba un programa en MATLAB utilizando un «bucle for» para obtener las gráficas en dos y en tres dimensiones de la salida del sistema. La entrada es una función escalón unitario.

Solución. El Programa MATLAB 5-25 es una posible solución para obtener los diagramas en dos y en tres dimensiones. La Figura 5-64(a) es el dibujo en dos dimensiones de las curvas de respuesta al escalón unitario para distintos valores de ζ. La Figura 5-64(b) es el dibujo en tres dimensiones obtenido utilizando el comando «mesh(y)», y la Figura 5-64(c) se ha obtenido utilizando el comando «mesh(y′)». (Estos dos dibujos en tres dimensiones son prácticamente iguales. La única diferencia es que el eje *x* y el eje *y* están intercambiados.)

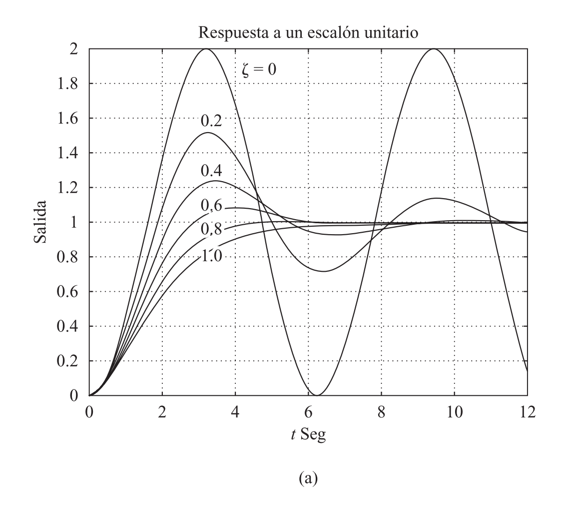
MATLAB Programa 5-25

```
t = 0:0.2:12;
      for n = 1:6;
      num = [1];
      den = [1  2*(n–1)*0.2  1];
      [y(1:61,n),x,t] = step(num,den,t);
      end
plot(t,y)
grid
title('Respuestas a un escalón unitario')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas')
gtext('\zeta = 0'),
gtext('0.2')
gtext('0.4')
gtext('0.6')
gtext('0.8')
gtext('1.0')

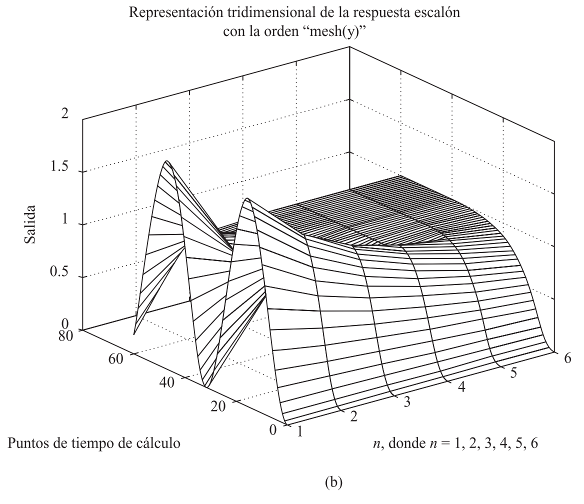
% Para dibujar una gráfica tridimensional, introduzca las órdenes: mesh(y) o mesh(y').
% Se mostrarán dos gráficas tridimensionales, usando en una "mesh(y)" y en la otra
% "mesh(y')". Las dos gráficas son iguales, excepto que se intercambian los ejes x e y.

mesh(y)
title('Representación tridimensional de la respuesta escalón con la orden "mesh(y)" ')
xlabel('n, donde n = 1,2,3,4,5,6')
ylabel('Puntos de tiempo de cálculo')
zlabel('Salidas')

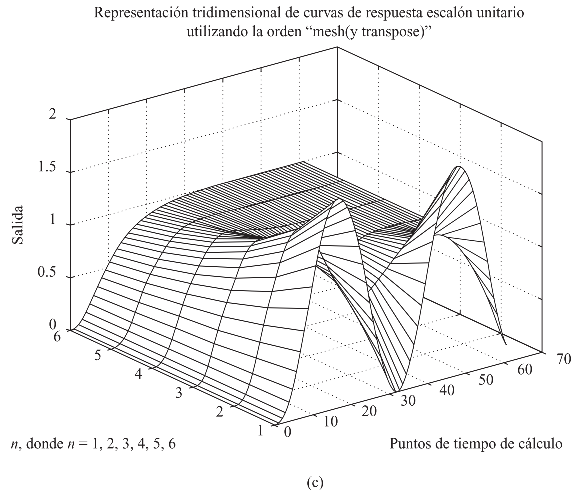
mesh(y')
title('Representación tridimensional de la respuesta escalón con la
orden "mesh(y transpose)" ')
xlabel('Puntos de tiempo de cálculo')
ylabel('n, donde n = 1,2,3,4,5,6')
zlabel('Salidas')
```



(a)



(b)



(c)

Figura 5-64. (a) Gráfica bidimensional de las curvas de respuesta a un escalón unitario; (b) gráfica tridimensional de las curvas de respuesta a un escalón unitario con la orden «mesh(y)»; (c) gráfica tridimensional de las curvas de respuesta a un escalón unitario con la orden «mesh(y′)».

A-5-16. Considérese el sistema sujeto a la condición inicial descrita a continuación.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(No hay entrada o función forzante en este sistema.) Obténgase la respuesta $y(t)$ frente a t para la condición inicial utilizando las Ecuaciones (5-58) y (5-60).

Solución. El programa MATLAB 5-26 es un posible programa en MATLAB basado en las Ecuaciones (5-58) y (5-60). En la Figura 5-65 se muestra la curva de la respuesta obtenida. (Obsérvese que este problema se resolvió en el Ejemplo 5-16 utilizando la orden «inicial». La curva de la respuesta obtenida aquí es la misma que se mostró en la Figura 5-34.)

MATLAB Programa 5-26

```
t = 0:0.05:10;
A = [0 1 0;0 0 1;-10 -17 -8];
B = [2;1;0.5];
C = [1 0 0];
[y,x,t] = step(A,B,C*A,C*B,1,t);
plot(t,y)
grid;
title('Respuesta a condición inicial')
xlabel('t (seg)')
ylabel('Salida y')
```

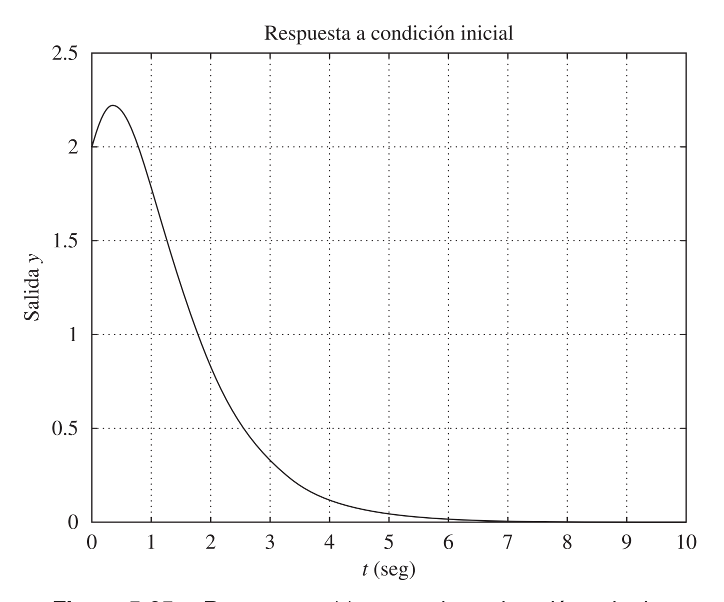


Figura 5-65. Respuesta $y(t)$ a entrada aceleración unitaria.

A-5-17. Considere la siguiente ecuación característica:

$$s^4 + Ks^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

Determine el rango de valores de K para la estabilidad.

Solución. El array de coeficientes de Routh es

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & K & 1 & 0 \\ s^2 & \dfrac{K-1}{K} & 1 & \\ s^1 & 1 - \dfrac{K^2}{K-1} & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

Para la estabilidad, es necesario que

$$K > 0$$

$$\frac{K-1}{K} > 0$$

$$1 - \frac{K^2}{K-1} > 0$$

A partir de la primera y segunda condición, K debe ser mayor que 1. Para $K > 1$, observe que el término $1 - [K^2/(K-1)]$ siempre es negativo, ya que

$$\frac{K - 1 - K^2}{K-1} = \frac{-1 + K(1-K)}{K-1} < 0$$

Por tanto, no es posible cumplir con las tres condiciones en forma simultánea. Por tal razón, no existe un valor de K que permita la estabilidad del sistema.

A-5-18. Considere la ecuación característica obtenida mediante

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \qquad (5\text{-}67)$$

El criterio de estabilidad de Hurwitz, que se presenta a continuación, ofrece las condiciones para todas las raíces que tienen partes reales negativas en función de los coeficientes del polinomio. Como se planteó en el análisis del criterio de estabilidad de Routh, de la Sección 5-6, para todas las raíces que tengan partes reales negativas, todos los coeficientes de las a deben ser positivos. Esta es una condición necesaria, pero no suficiente. Si no se satisface esta condición, quiere decir que algunas de las raíces tienen partes reales positivas, son imaginarias o son cero. Una condición suficiente para que todas las raíces tengan partes reales negativas se obtiene mediante el siguiente criterio de estabilidad de Hurwitz: si todos los coeficientes del polinomio son positivos, arréglelos en el determinante siguiente:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_n & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & a_{n-2} & a_n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

donde los ceros se sustituyen por a_s si $s > n$. Para todas las raíces que tienen partes reales negativas, es necesario y suficiente que los menores principales de Δ_n sean positivos. Los menores principales sucesivos son los determinantes siguientes:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdots & a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & \cdots & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & \cdots & a_{2i-3} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_i \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, ..., n-1)$$

donde $a_s = 0$ si $s > n$. (Se observa que se incluyen algunas condiciones para los determinantes de orden inferior en las condiciones para los determinantes de orden superior.) Si todos estos

determinantes son positivos, y si se ha supuesto $a_0 > 0$, el estado de equilibrio del sistema cuya ecuación característica se obtiene mediante la Ecuación (5-67) es asintóticamente estable. Observe que no se necesitan valores exactos de los determinantes; sólo se requieren los signos de estos determinantes para el criterio de estabilidad.

Ahora considere la siguiente ecuación característica:

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

Obtenga la condición para la estabilidad mediante el criterio de estabilidad de Hurwitz.

Solución. Las condiciones para la estabilidad son que todas las a sean positivas y que

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_0 a_3^2 \\ &= a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0 \end{aligned}$$

Es evidente que todas las a son positivas y que, si se satisface la condición $\Delta_3 > 0$, también se cumple la condición $\Delta_2 > 0$. Por tanto, para todas las raíces de la ecuación característica determinada que tengan partes reales negativas, es necesario y suficiente que todos los coeficientes de a sean positivos y $\Delta_3 > 0$.

A-5-19. Demuestre que la primera columna del array de Routh de

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

se obtiene mediante

$$1, \quad \Delta_1, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad ..., \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

donde

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdot & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \vdots \\ a_{2r-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_r \end{vmatrix}, \quad (n \geqslant r \geqslant 1)$$

$$a_k = 0 \qquad \text{si } k > n$$

Solución. El array de coeficientes de Routh tiene la forma de

$$\begin{matrix} 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & & \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & & \\ c_1 & c_2 & \cdot & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{matrix}$$

El primer término de la primera columna del array de Routh es 1. El término siguiente de la primera columna es a_1, que es igual a Δ_1. El término siguiente es b_1, que es igual a

$$\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

El término que sigue en la primera columna es c_1, que es igual a

$$\frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} = \frac{\left[\dfrac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}\right] a_3 - a_1 \left[\dfrac{a_1 a_4 - a_5}{a_1}\right]}{\left[\dfrac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}\right]}$$

$$= \frac{a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5}{a_1 a_2 - a_3}$$

$$= \frac{\Delta_3}{\Delta_2}$$

Los términos restantes de la primera columna del array de Routh se encuentran en forma similar.

El array de Routh tiene la propiedad de que los últimos términos diferentes de cero de cualquier columna son iguales; es decir, si el array se obtiene mediante

$$\begin{matrix} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \\ c_1 & c_2 & c_3 & \\ d_1 & d_2 & & \\ e_1 & e_2 & & \\ f_1 & & & \\ g_1 & & & \end{matrix}$$

entonces

$$a_7 = c_3 = e_2 = g_1$$

y si el array se obtiene mediante

$$\begin{matrix} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \\ c_1 & c_2 & 0 & \\ d_1 & d_2 & & \\ e_1 & 0 & & \\ f_1 & & & \end{matrix}$$

entonces

$$a_6 = b_3 = d_2 = f_1$$

En cualquier caso, el último término de la primera columna es igual a a_n, o bien

$$a_n = \frac{\Delta_{n-1} a_n}{\Delta_{n-1}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

Por ejemplo, si $n = 4$, entonces

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \Delta_3 a_4$$

Por tanto, se ha demostrado que la primera columna del array de Routh se obtiene mediante

$$1, \quad \Delta_1, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad ..., \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

A-5-20. Demuestre que el criterio de estabilidad de Routh y el criterio de estabilidad de Hurwitz son equivalentes.

Solución. Si se escriben los determinantes de Hurwitz en la forma triangular

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & & & & * \\ & a_{22} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & a_{ii} \end{vmatrix}, \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

en la que todos los elementos debajo de la línea diagonal son cero y todos los elementos sobre la línea diagonal son cualquier número, las condiciones de Hurwitz para la estabilidad asintótica se convierten en

$$\Delta_i = a_{11}a_{22} \cdots a_{ii} > 0, \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

que equivalen a las condiciones

$$a_{11} > 0, \qquad a_{22} > 0, \qquad ..., \qquad a_{nn} > 0$$

Ahora se demostrará que estas condiciones equivalen a

$$a_1 > 0, \qquad b_1 > 0, \qquad c_1 > 0, \qquad ...$$

donde a_1, b_1, c_1, ..., son los elementos de la primera columna en el array de Routh.

Por ejemplo, considere el siguiente determinante de Hurwitz, que corresponde a $i = 4$:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

El determinante no se altera si se resta de la i-ésima fila la j-ésima fila multiplicado por k. Restando de la segunda fila a_0/a_1 veces la primera fila, se obtiene

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

donde

$$a_{11} = a_1$$

$$a_{22} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3$$

$$a_{23} = a_4 - \frac{a_0}{a_1} a_5$$

$$a_{24} = a_6 - \frac{a_0}{a_1} a_7$$

Asimismo, restando de la cuarta fila la tercera fila multiplicado por a_0/a_1 resulta

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & \hat{a}_{43} & \hat{a}_{44} \end{vmatrix}$$

donde

$$\hat{a}_{43} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3$$

$$\hat{a}_{44} = a_4 - \frac{a_0}{a_1} a_5$$

A continuación, restando de la tercera fila la segunda fila multiplicada por a_1/a_{22} resulta

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & \hat{a}_{43} & \hat{a}_{44} \end{vmatrix}$$

donde

$$a_{33} = a_3 - \frac{a_1}{a_{22}} a_{23}$$

$$a_{34} = a_5 - \frac{a_1}{a_{22}} a_{24}$$

Por último, restando de la última fila la segunda fila multiplicada por $\hat{a}_{43}/a_{33}$ resulta

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

donde

$$a_{44} = \hat{a}_{44} - \frac{\hat{a}_{43}}{a_{33}} a_{34}$$

A partir de este análisis, se observa que

$$\Delta_4 = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$
$$\Delta_3 = a_{11}a_{22}a_{33}$$
$$\Delta_2 = a_{11}a_{22}$$
$$\Delta_1 = a_{11}$$

Las condiciones de Hurwitz para la estabilidad asintótica

$$\Delta_1 > 0, \qquad \Delta_2 > 0, \qquad \Delta_3 > 0, \qquad \Delta_4 > 0, \qquad ...$$

se reducen a las condiciones

$$a_{11} > 0, \qquad a_{22} > 0, \qquad a_{33} > 0, \qquad a_{44} > 0, \qquad ...$$

El array de Routh para el polinomio

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

donde $a_0 > 0$ y $n = 4$, se obtiene a partir de

$$\begin{matrix} a_0 & a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 & \\ b_1 & b_2 & \\ c_1 & & \\ d_1 & & \end{matrix}$$

A partir de este array de Routh se observa que

$$a_{11} = a_1$$
$$a_{22} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3 = b_1$$
$$a_{33} = a_3 - \frac{a_1}{a_{22}} a_{23} = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_2}{b_1} = c_1$$
$$a_{44} = \hat{a}_{44} - \frac{\hat{a}_{43}}{a_{33}} a_{34} = a_4 = d_1$$

(La última ecuación se obtiene utilizando el hecho de que $a_{34} = 0$, $\hat{a}_{44} = a_4$ y $a_4 = b_2 = d_1$.) Por tanto, las condiciones de Hurwitz para la estabilidad asintótica se transforman en

$$a_1 > 0, \qquad b_1 > 0, \qquad c_1 > 0, \qquad d_1 > 0$$

De esta manera, se demuestra que las condiciones de Hurwitz para la estabilidad asintótica se reducen a las condiciones de Routh para la estabilidad asintótica. El mismo argumento se extiende para los determinantes de Hurwitz de cualquier orden, y es posible establecer la equivalencia entre el criterio de estabilidad de Routh y el criterio de estabilidad de Hurwitz.

A-5-21. Considere la ecuación característica

$$s^4 + 2s^3 + (4 + K)s^2 + 9s + 25 = 0$$

Utilizando el criterio de estabilidad de Hurwitz, determine el rango de K para la estabilidad.

Solución. Comparando la ecuación característica dada

$$s^4 + 2s^3 + (4 + K)s^2 + 9s + 25 = 0$$

con la ecuación característica estándar de cuarto orden

$$a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$$

se tiene

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4 + K, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 25$$

El criterio de estabilidad de Hurwitz indica que Δ_4 está dado por

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

Para que todas las raíces tengan partes reales negativas es necesario y suficiente que los menores principales sucesivos a Δ_4 sean positivos. Los menores principales sucesivos son

$$\Delta_1 = |a_1| = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4+K \end{vmatrix} = 2K - 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 1 & 4+K & 25 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 18K - 109$$

Para que todos los menores principales sean positivos, se requiere que $\Delta_i(i = 1, 2, 3)$ sean positivos. Por tanto, se exige que

$$2K - 1 > 0$$

$$18K - 109 > 0$$

de lo cual se obtiene que la región de K para la estabilidad es

$$K > \frac{109}{18}$$

A-5-22. Explique por qué el control proporcional de una planta que no posee una propiedad de integración (lo que significa que la función de transferencia de la planta no incluye el factor $1/s$) sufre un offset en la respuesta a las entradas escalón.

Solución. Considere, por ejemplo, el sistema de la Figura 5-66. En estado uniforme, si c fuera igual a una constante r diferente de cero, entonces $e = 0$ y $u = Ke = 0$, resultando que $c = 0$, lo cual contradice la suposición de que $c = r =$ constante diferente de cero.

Debe existir un offset diferente de cero para la operación adecuada de un sistema de control. En otras palabras, en estado estacionario, si e fuera igual a $r/(1 + K)$, entonces $u = Kr/(1 + K)$ y $c = Kr/(1 + K)$, lo cual provocaría la señal de error supuesta $e = r/(1 + K)$. Por tanto, el offset de $r/(1 + K)$ debe existir en tal sistema.

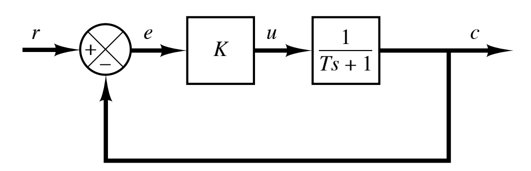


Figura 5-66. Sistema de control.

A-5-23. El diagrama de bloques de la Figura 5-67 muestra un sistema de control de velocidad en el cual el miembro de salida del sistema está sujeto a una perturbación de par. En el diagrama, $\Omega_r(s)$, $\Omega(s)$, $T(s)$ y $D(s)$ son las transformadas de Laplace de la velocidad de referencia, la velocidad de salida, el par de excitación y el par de perturbación, respectivamente. En ausencia de un par de perturbación, la velocidad de salida es igual a la velocidad de referencia.

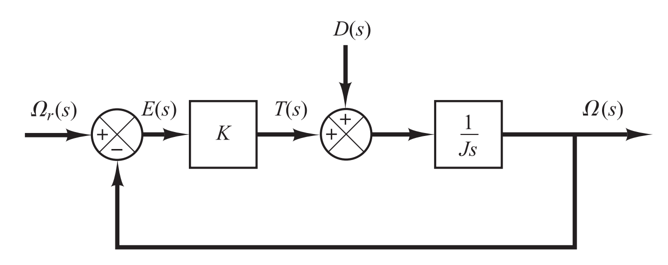


Figura 5-67. Diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad.

Investigue la respuesta de este sistema para un par de perturbación escalón unitario. Suponga que la entrada de referencia es cero, es decir, $\Omega_r(s) = 0$.

Solución. La Figura 5-68 es un diagrama de bloques modificado, conveniente para el análisis presente. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} = \frac{1}{Js + K}$$

donde $\Omega_D(s)$ es la transformada de Laplace de la velocidad de salida producida por el par de perturbación. Para un par de perturbación escalón unitario, la velocidad de salida en estado estable es

$$\begin{aligned}\omega_D(\infty) &= \lim_{s\to 0} s\Omega_D(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{s}{Js + K}\,\frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{K}\end{aligned}$$

A partir de este análisis se concluye que, si se aplica un par de perturbación escalón al miembro de salida del sistema, se producirá una velocidad de error tal que el par del motor resultante cancelará exactamente el par de perturbación. Para desarrollar el par del motor es necesario que exista un error en la velocidad para que se produzca un par diferente de cero. (La discusión continúa en el Problema **A-5-24**.)

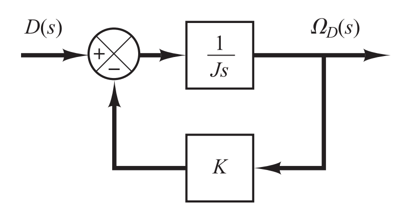


Figura 5-68. Diagrama de bloques del sistema de control de velocidad de la Figura 5-67 cuando $\Omega_r(s) = 0$.

A-5-24. En el sistema considerado en el Problema **A-5-23**, se pretende eliminar lo más posible los errores de velocidad producidos por los pares de perturbación.

¿Es posible cancelar el efecto de un par de perturbación en estado estacionario para que un par de perturbación constante aplicado al miembro de salida no produzca un cambio de velocidad en estado estable?

Solución. Suponga que se elige un controlador conveniente cuya función de transferencia sea $G_c(s)$, como se observa en la Figura 5-69. En ausencia de la entrada de referencia, la función de transferencia en lazo cerrado entre la velocidad de salida $\Omega_D(s)$ y el par de perturbación $D(s)$ es

$$\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} = \frac{\frac{1}{Js}}{1 + \frac{1}{Js} G_c(s)}$$

$$= \frac{1}{Js + G_c(s)}$$

La velocidad de salida en estado estable producida por el par de perturbación escalón unitario es

$$\omega_D(\infty) = \lim_{s \to 0} s\Omega_D(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{s}{Js + G_c(s)} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{G_c(0)}$$

Para satisfacer el requerimiento de que

$$\omega_D(\infty) = 0$$

se debe seleccionar $G_c(0) = \infty$. Esto se comprende si se elige

$$G_c(s) = \frac{K}{s}$$

Una acción de control integral seguirá corrigiendo hasta que el error sea cero. Sin embargo, este controlador presenta un problema de estabilidad, debido a que la ecuación característica tendrá dos raíces imaginarias.

Un método para estabilizar un sistema como éste es agregar un modo proporcional al controlador, o elegir

$$G_c(s) = K_p + \frac{K}{s}$$

Figura 5-69. Diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad.

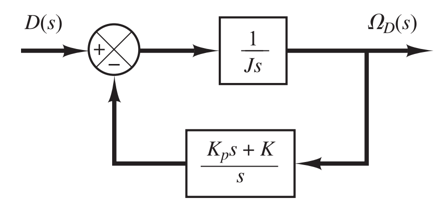


Figura 5-70. Diagrama de bloques del sistema de control de velocidad de la Figura 5-69 cuando $G_c(s) = K_p + (K/s)$ y $\Omega_r(s) = 0$.

Con este controlador, el diagrama de bloques de la Figura 5-69, ante la ausencia de la entrada de referencia, se convierte en el de la Figura 5-70. La función de transferencia en lazo cerrado $\Omega_D(s)/D(s)$ se convierte en

$$\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^2 + K_p s + K}$$

Para un par de perturbación escalón unitario, la velocidad de salida en estado estacionario es

$$\omega_D(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,\Omega_D(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s^2}{Js^2 + K_p s + K}\,\frac{1}{s} = 0$$

Por tanto, se observa que el controlador proporcional-integral elimina el error de velocidad en estado estacionario.

El uso de una acción de control integral ha aumentado el orden del sistema en 1. (Esto tiende a producir una respuesta oscilatoria.)

En el problema actual, un par de perturbación escalón provocará un error transitorio en la velocidad de salida, pero el error se convertirá en cero en estado estacionario. El integrador proporciona una salida diferente de cero con un error de cero. (La salida diferente de cero del integrador produce un par del motor que cancela exactamente el par de perturbación.)

Observe que el integrador de la función de transferencia de la planta no elimina el error en estado estacionario debido a un par de perturbación escalón. Para eliminar dicho error, se debe tener un integrador antes del punto en el que se introduce el par de perturbación.

A-5-25. Considere el sistema de la Figura 5-71(a). El error en estado estacionario para una entrada rampa unitaria es $e_{ss} = 2\zeta/\omega_n$. Demuestre que el error en estado estacionario se elimina para seguir una entrada rampa si la entrada se incorpora al sistema a través de un filtro proporcional-derivativo, como se observa en la Figura 5-71(b), y el valor de k se establece en forma proporcional. Observe que el error $e(t)$ se obtiene mediante $r(t) - c(t)$.

Solución. La función de transferencia en lazo cerrado del sistema de la Figura 5-71(b) es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(1 + ks)\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Por tanto,

$$R(s) - C(s) = \left(\frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s - \omega_n^2 ks}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right) R(s)$$

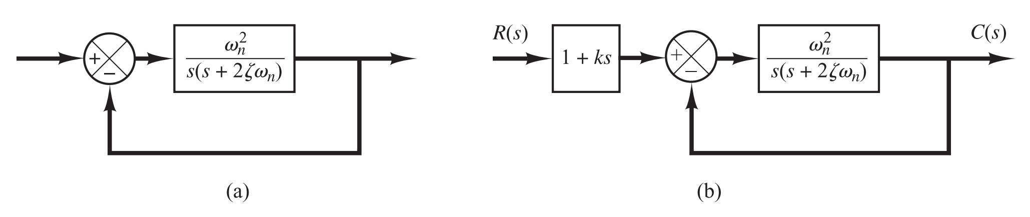


Figura 5-71. (a) Sistema de control; (b) sistema de control con filtro de entrada.

Si la entrada es una rampa unitaria, el error en estado estacionario es

$$e(\infty) = r(\infty) - c(\infty)$$

$$= \lim_{s \to 0} s \left(\frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s - \omega_n^2 k s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) \frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{2\zeta\omega_n - \omega_n^2 k}{\omega_n^2}$$

Por tanto, si se selecciona k como

$$k = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

el error en estado estacionario después de una entrada rampa es igual a cero. Observe que, si existen variaciones en los valores de ζ y/o ω_n debido a los cambios ambientales o al envejecimiento, puede producirse un error en estado estacionario diferente de cero para una respuesta rampa.

A-5-26. Considere el sistema estable de control con realimentación unidad con una función de transferencia de trayectoria directa $G(s)$. Suponga que la función de transferencia en lazo cerrado se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} \qquad (m \leqslant n)$$

Demuestre que

$$\int_0^\infty e(t)\,dt = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

donde $e(t) = r(t) - c(t)$ es el error en la respuesta escalón unitario. Asimismo, demuestre que

$$\frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} sG(s)} = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

Solución. Sean

$$(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1) = P(s)$$

y

$$(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1) = Q(s)$$

Por tanto,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

y

$$E(s) = \frac{Q(s) - P(s)}{Q(s)} R(s)$$

Para una entrada escalón unitario, $R(s) = 1/s$ y

$$E(s) = \frac{Q(s) - P(s)}{sQ(s)}$$

Como el sistema es estable, $\int_0^\infty e(t)\,dt$ converge a un valor constante. Obsérvese que

$$\int_0^\infty e(t)\,dt = \lim_{s\to 0} s\,\frac{E(s)}{s} = \lim_{s\to 0} E(s)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e(t)\,dt &= \lim_{s\to 0} \frac{Q(s) - P(s)}{sQ(s)} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{Q'(s) - P'(s)}{Q(s) + sQ'(s)} \\ &= \lim_{s\to 0} [Q'(s) - P'(s)]\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{s\to 0} P'(s) = T_a + T_b + \cdots + T_m$$

$$\lim_{s\to 0} Q'(s) = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

se tiene que

$$\int_0^\infty e(t)\,dt = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

Para una entrada escalón unitario $r(t)$, como

$$\int_0^\infty e(t)\,dt = \lim_{s\to 0} E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + G(s)} R(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + G(s)}\,\frac{1}{s} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)} = \frac{1}{K_v}$$

se tiene que

$$\frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)} = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

Observe que los ceros en el semiplano izquierdo del plano (es decir, T_a, T_b, ..., T_m positivos) aumentan K_v. Los polos cerca del origen provocan constantes de error de velocidad bajas a menos que haya ceros cercanos.

PROBLEMAS

B-5-1. Un termómetro requiere de un minuto para alcanzar el 98% del valor final de la respuesta a una entrada escalón. Suponiendo que el termómetro es un sistema de primer orden, encuentre la constante de tiempo.

Si el termómetro se coloca en un baño, cuya temperatura cambia en forma lineal a una velocidad de 10°/min, ¿qué error muestra el termómetro?

B-5-2. Considere la respuesta escalón unitario de un sistema de control realimentado unitariamente cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 1)}$$

Obtenga el tiempo de subida, el tiempo pico, la sobreelongación máxima y el tiempo de asentamiento.

B-5-3. Considere el sistema en lazo cerrado dado por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Determine los valores de ζ y ω_n para que el sistema responda a una entrada escalón con una sobreelongación de aproximadamente el 5% y con un tiempo de asentamiento de 2 seg. (Utilice el criterio del 2%.)

B-5-4. Considere el sistema de la Figura 5-72. Inicialmente el sistema está en reposo. Suponga que el carro se pone en movimiento mediante una fuerza de impulso unitario. ¿Puede detenerse mediante otra fuerza de impulso equivalente?

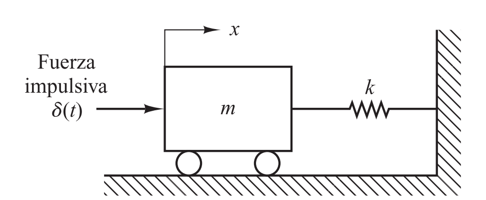


Figura 5-72. Sistema mecánico.

Suponga que existe un registro de una oscilación amortiguada, tal como aparece en la Figura 5-73. Determine el factor de amortiguamiento relativo ζ del sistema a partir de la gráfica.

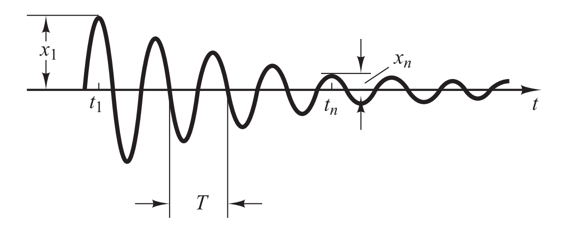


Figura 5-73. Oscilación amortiguada.

B-5-5. Obtenga la respuesta impulso unitario y la respuesta escalón unitario de un sistema realimentado unitariamente cuya función de transferencia en lazo abierto sea

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2}$$

B-5-6. Se sabe que un sistema oscilatorio tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

B-5-7. Considere el sistema de la Figura 5-74(a). El factor de amortiguamiento relativo de este sistema es 0.158 y la frecuencia natural no amortiguada es de 3.16 rad/seg. Para mejorar la estabilidad relativa, se emplea una realimentación tacométrica. La Figura 5-74(b) muestra tal sistema de realimentación tacométrica.

Determine el valor de K_h para que el factor de amortiguamiento relativo del sistema sea 0.5. Dibuje curvas de respuesta escalón unitario tanto del sistema original como del sistema de realimentación tacométrica. También dibuje las curvas de error frente al tiempo para la respuesta rampa unitaria de ambos sistemas.

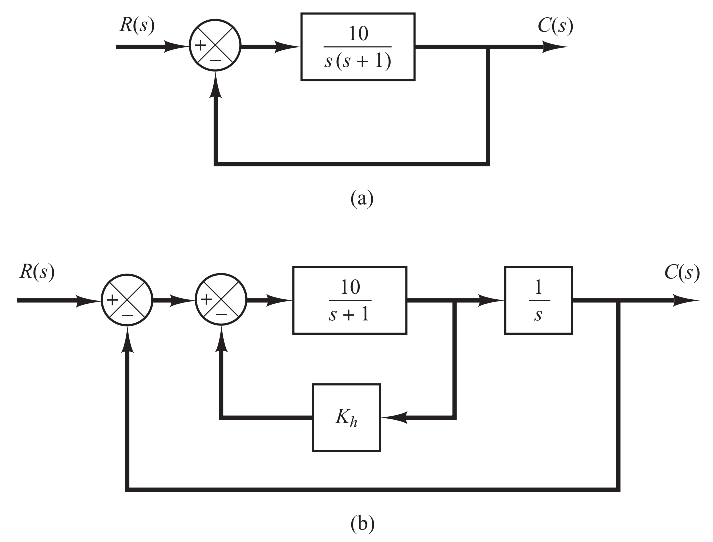


Figura 5-74. (a) Sistema de control; (b) sistema de control con realimentación tacométrica.

B-5-8. Remitiéndose al sistema de la Figura 5-75, determine los valores de K y k tales que el sistema tenga un factor de amortiguamiento ζ de 0.7 y una frecuencia natural no amortiguada ω_n de 4 rad/seg.

B-5-9. Considere el sistema de la Figura 5-76. Determine el valor de k de modo que el factor de amortiguamiento ζ sea 0.5. Después obtenga el tiempo de subida t_r, el tiempo pico t_p, la sobreelongación máxima M_p y el tiempo de asentamiento t_s en la respuesta escalón unitario.

B-5-12. Utilice MATLAB para obtener la respuesta escalón unitario, la respuesta rampa unitaria y la respuesta impulso unitario del sistema siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

donde $R(s)$ y $C(s)$ son transformadas de Laplace de la entrada $r(t)$ y la salida $c(t)$, respectivamente.

B-5-11. Utilizando MATLAB, obtenga la respuesta escalón unitario, rampa unitaria e impulso unitario del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

donde u es la entrada e y es la salida.

B-5-12. Obtenga de forma analítica y de forma computacional el tiempo de subida, el tiempo de pico, la máxima sobreelongación y el tiempo de asentamiento como respuesta a un escalón unitario del sistema en lazo cerrado dado por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{36}{s^2 + 2s + 36}$$

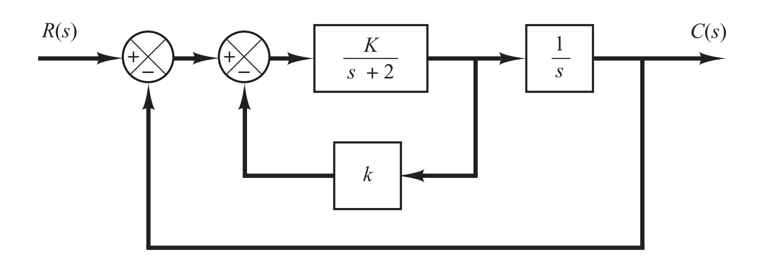


Figura 5-75. Sistema en lazo de control.

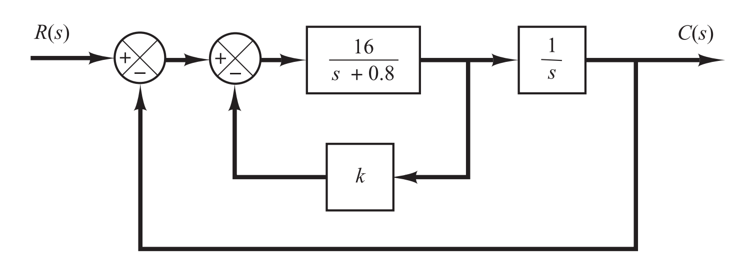


Figura 5-76. Diagrama de bloques de un sistema.

B-5-13. La Figura 5-77 muestra tres sistemas. El sistema I es un sistema de control de posición. El sistema II es un sistema de control de posición con acción de control PD. El sistema III es un sistema de control de posición con realimentación de velocidad. Compare las respuestas escalón unitario, de impulso unitario y rampa unitaria de los tres sistemas. ¿Qué sistema es mejor con respecto a la velocidad de respuesta y la sobreelongación máxima en la respuesta escalón?

B-5-14. Considere el sistema de control de posición de la Figura 5-78. Escriba un programa de MATLAB para obtener una respuesta escalón unitario y una respuesta rampa unitaria del sistema. Trace las curvas de $x_1(t)$ frente a t, $x_2(t)$ frente t, $x_3(t)$ frente t, y $e(t)$ frente t [donde $e(t) = r(t) - x_1(t)$] para la respuesta a un escalón unitario y la respuesta a una rampa unitaria.

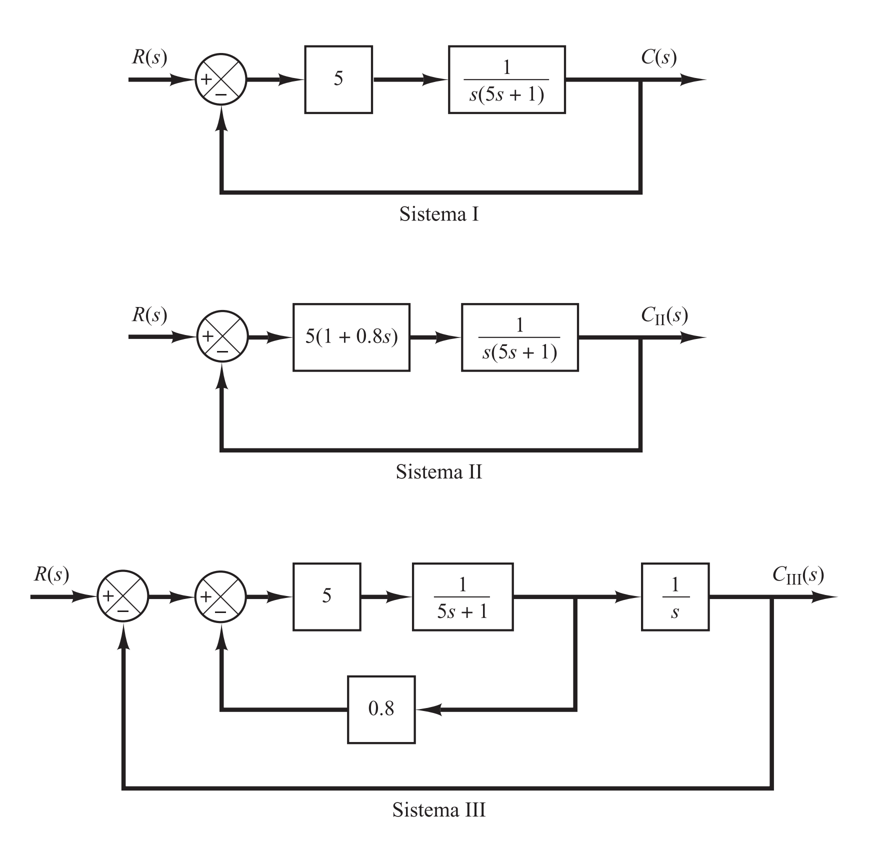


Figura 5-77. Servosistema posicional (sistema I), servosistema posicional con acción de control PD (sistema II), y servosistema posicional con realimentación de velocidad (sistema III).

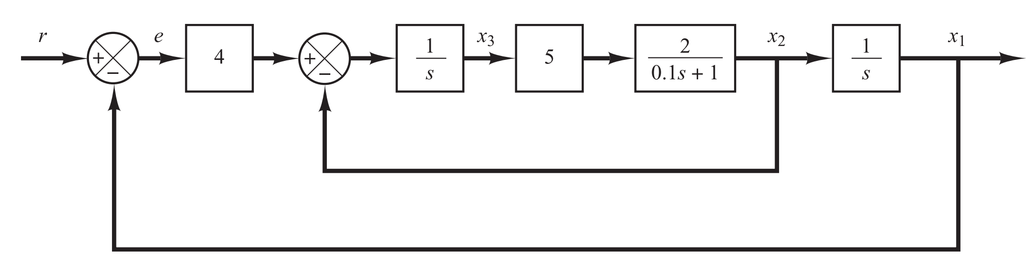


Figura 5-78. Sistema de control de posición.

B-5-15. Obtenga, utilizando MATLAB, la curva de respuesta escalón unitario para el sistema de control con realimentación unidad cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+4)}$$

Obtenga además, utilizando MATLAB, el tiempo de subida, el tiempo de pico, la máxima sobreelongación y el tiempo de asentamiento en la curva de respuesta a un escalón unitario.

B-5-16. Considere el sistema en lazo cerrado definido por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2\zeta s + 1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

donde $\zeta = 0.2$, 0.4, 0.6, 0.8 y 1.0. Dibuje, utilizando MATLAB, un diagrama en dos dimensiones de las curvas de respuesta a un impulso unitario. También dibuje un diagrama en tres dimensiones de las curvas de respuesta.

B-5-17. Considere el sistema de segundo orden definido por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

donde $\zeta = 0.2$, 0.4, 0.6, 0.8 y 1.0. Dibuje un diagrama en tres dimensiones de las curvas de respuesta a un escalón unitario.

B-5-18. Obtenga la respuesta a una rampa unitaria del sistema definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

donde u es una entrada rampa unitaria. Utilice el comando `lsim` para obtener la respuesta.

B-5-19. Considere la ecuación diferencial de un sistema dada por

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0, \quad y(0) = 0.1, \quad \dot{y}(0) = 0.05$$

Obtenga la respuesta $y(t)$, sujeta a la condición inicial dada.

B-5-20. Determine el rango de valores de K para la estabilidad de un sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

B-5-21. Considere la ecuación característica siguiente:

$$s^4 + 2s^3 + (4 + K)s^2 + 9s + 25 = 0$$

Utilizando el criterio de estabilidad de Routh, determinar el rango de estabilidad de K.

B-5-22. Considere el sistema en lazo cerrado que se muestra en la Figura 5-79. Determine el rango de estabilidad para K. Suponga que $K > 0$.

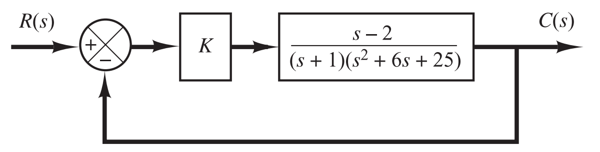


Figura 5-79. Sistema de lazo cerrado.

B-5-23. Considere el sistema de control de altitud de satélites que se muestra en la Figura 5-80(a). La salida de este sistema ofrece constantes oscilaciones no deseadas. El sistema puede ser estabilizado mediante el uso de realimentación tacométrica, como se muestra en la Figura 5-80(b). Si $K/J = 4$, ¿qué valor de K_h llevará a que el coeficiente de amortiguamiento relativo sea 0.6?

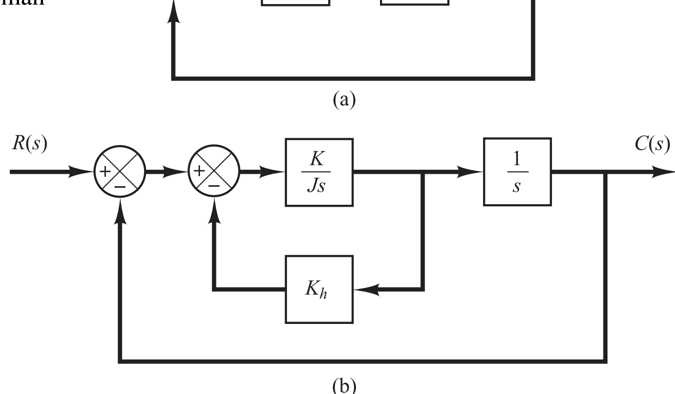


Figura 5-80. (a) Sistema de control de altitud de satélites inestables; (b) sistema estabilizado.

B-5-24. Considere el servosistema con realimentación tacométrica que se muestra en la Figura 5-81. Determine los rangos de estabilidad para K y K_h. (K_h debe ser positiva.)

B-5-25. Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

donde la matriz **A** se obtiene mediante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b_3 & 0 & 1 \\ 0 & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix}$$

(**A** se conoce como la matriz de Schwarz). Pruebe que la primera columna de la matriz de Routh de la ecuación característica $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ está formada por 1, b_1, b_2 y $b_1 b_3$.

B-5-26. Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la función de transferencia en lazo cerrado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ks + b}{s^2 + as + b}$$

Determine la función de transferencia en lazo abierto $G(s)$.

Demuestre que el error en estado estacionario en la respuesta rampa unitaria se obtiene mediante

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{a - K}{b}$$

B-5-27. Considere un sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{K}{s(Js + B)}$$

Analice los efectos que se obtienen sobre el error en estado estacionario como respuesta a una rampa unitaria al variar los valores de K y B. Trace curvas de respuesta rampa unitaria para valores de K pequeño, mediano y grande, suponiendo que B es constante.

B-5-28. Si la trayectoria directa de un sistema contiene al menos un elemento de integración, la salida sigue cambiando mientras haya un error presente. La salida se detiene cuando el error es exactamente cero. Si se introduce al sistema una perturbación externa, es conveniente tener un elemento de integración entre el elemento que mide el error y el punto donde se introduce la perturbación, a fin de que el efecto de la perturbación externa se haga cero en estado estacionario.

Demuestre que, si la perturbación es una función rampa, el error en estado estacionario provocado por esta perturbación rampa sólo se elimina si dos integradores preceden al punto en el que se introduce la perturbación.

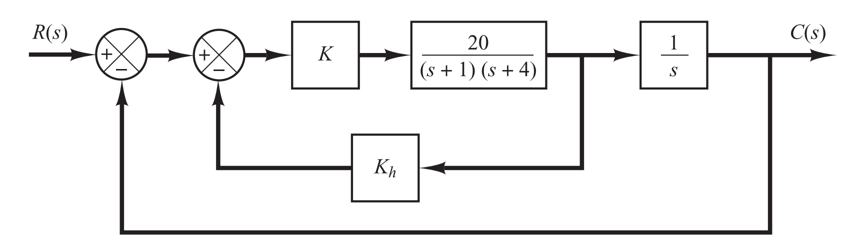


Figura 5-81. Servosistema con realimentación tacométrica.



6 Análisis y diseño de sistemas de control por el método del lugar de las raíces

6-1 Introducción

La característica básica de la respuesta transitoria de un sistema en lazo cerrado se relaciona estrechamente con la localización de los polos en lazo cerrado. Si el sistema tiene una ganancia de lazo variable, la localización de los polos en lazo cerrado depende del valor de la ganancia de lazo elegida. Por tanto, es importante que el diseñador conozca cómo se mueven los polos en lazo cerrado en el plano *s* conforme varía la ganancia de lazo.

Desde el punto de vista del diseño, un simple ajuste de la ganancia en algunos sistemas mueve los polos en lazo cerrado a las posiciones deseadas. A continuación el problema de diseño se centra en la selección de un valor de ganancia adecuado. Si el ajuste de la ganancia no produce por sí solo un resultado conveniente, será necesario añadir un compensador al sistema. (Este tema se analiza con detalle en las Secciones 6-6 a 6-9.)

Los polos en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica. Si esta tiene un grado superior a 3, es muy laborioso encontrar sus raíces y se requerirá de una solución con computadora. (MATLAB proporciona una solución sencilla para este problema.). Sin embargo, simplemente encontrar las raíces de la ecuación característica puede tener un valor limitado, debido a que a medida que varía la ganancia de la función de transferencia en lazo abierto, la ecuación característica cambia y deben repetirse los cálculos.

W. R. Evans diseñó un método sencillo para encontrar las raíces de la ecuación característica, que se utiliza ampliamente en la ingeniería de control. Este método se denomina *método del lugar de las raíces*, y en él se representan las raíces de la ecuación característica para todos los valores de un parámetro del sistema.

A continuación se pueden localizar sobre la gráfica resultante las raíces correspondientes a un valor determinado de este parámetro. Observe que el parámetro es, por lo general, la ganancia, aunque es posible usar cualquier otra variable de la función de transferencia en lazo abierto. A menos que se indique lo contrario, aquí se supondrá que la ganancia de la función de transferencia en lazo abierto es el parámetro que puede adoptar todos los valores, de cero a infinito.

Mediante el método del lugar de las raíces, el diseñador puede predecir los efectos que tiene en la localización de los polos en lazo cerrado, variar el valor de la ganancia o añadir polos y/o ceros en lazo abierto. Por tanto, es conveniente que el diseñador comprenda bien el método para generar los lugares de las raíces del sistema en lazo cerrado, ya sea de forma manual o mediante el uso de programas de computadora como MATLAB.

Al diseñar un sistema de control lineal, encontramos que el método del lugar de las raíces resulta muy útil, debido a que indica la forma en la que deben modificarse los polos y ceros en lazo abierto para que la respuesta cumpla las especificaciones de comportamiento del sistema. Este método es particularmente conveniente para obtener resultados aproximados con mucha rapidez.

Debido a que generar los lugares de las raíces usando MATLAB es muy sencillo, se podría pensar que dibujar los lugares de las raíces de forma manual es una pérdida de tiempo y esfuerzo. Sin embargo, una buena forma de interpretar los lugares de las raíces generados por la computadora es adquirir la experiencia de dibujar los lugares de las raíces de forma manual, cosa que, además, proporciona con mucha rapidez una idea global de los lugares de las raíces.

Contenido del capítulo. La estructura del capítulo es la siguiente: la Sección 6-1 presentó una introducción del método del lugar de las raíces. La Sección 6-2 detalla los conceptos implícitos en el mismo y presenta algunos ejemplos del procedimiento general para dibujar los lugares de las raíces. La Sección 6-3 analiza la generación de gráficos de los lugares de las raíces con MATLAB. La Sección 6-4 trata como caso especial cuando el sistema en lazo cerrado se realimenta positivamente. La Sección 6-5 presenta aspectos generales del enfoque del lugar de las raíces al diseño de sistemas en lazo cerrado. La Sección 6-6 estudia el diseño de sistemas de control utilizando compensación por adelanto. La Sección 6-7 se dedica a la técnica de compensación por retardo. La Sección 6-8 analiza la compensación por retardo-adelanto. Finalmente la Sección 6-9 presenta la técnica de compensación paralela.

6-2 Gráficas del lugar de las raíces

Condiciones de ángulo y magnitud. Considérese el sistema de la Figura 6-1. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{6-1}$$

La ecuación característica para este sistema en lazo cerrado se obtiene haciendo que el denominador del lado derecho de la Ecuación (6-1) sea igual a cero. Es decir,

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

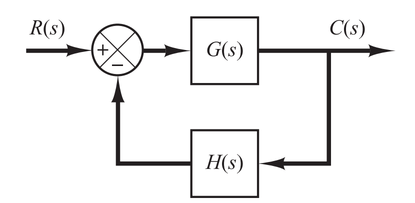


Figura 6-1. Sistema de control.

o bien

$$G(s)H(s) = -1 \tag{6-2}$$

Aquí se supone que $G(s)H(s)$ es un cociente de polinomios en s. [En la Sección 6-7 se extiende el análisis para el caso en el que $G(s)H(s)$ contiene el retardo de transporte e^{-Ts}.] Debido a que $G(s)H(s)$ es una cantidad compleja, la Ecuación (6-2) se divide en dos ecuaciones igualando, respectivamente, los ángulos y magnitudes de ambos lados, para obtener:

Condición de ángulo:

$$\underline{/G(s)H(s)} = \pm 180^{\circ}(2k + 1) \qquad (k = 0, 1, 2, ...) \tag{6-3}$$

Condición de magnitud:

$$|G(s)H(s)| = 1 \tag{6-4}$$

Los valores de s que cumplen tanto las condiciones de ángulo como las de magnitud son las raíces de la ecuación característica, o los polos en lazo cerrado. El lugar de las raíces es una gráfica de los puntos del plano complejo que sólo satisfacen la condición de ángulo. Las raíces de la ecuación característica (los polos en lazo cerrado) que corresponden a un valor específico de la ganancia se determinan a partir de la condición de magnitud. Los detalles de la aplicación de las condiciones de ángulo y magnitud para obtener los polos en lazo cerrado se presentan más adelante en esta sección.

En muchos casos, $G(s)H(s)$ contiene un parámetro de ganancia K, y la ecuación característica se escribe como

$$1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = 0$$

Entonces, los lugares de las raíces para el sistema son los lugares de los polos en lazo cerrado cuando la ganancia K varía de cero a infinito.

Obsérvese que, para empezar a dibujar los lugares de las raíces de un sistema mediante el método analizado aquí, se debe conocer la localización de los polos y los ceros de $G(s)H(s)$. Recuérdese que los ángulos de las cantidades complejas que se originan a partir de los polos y los ceros en lazo abierto para el punto de prueba s se miden en sentido contrario al de las agujas del reloj. Por ejemplo, si $G(s)H(s)$ se obtiene mediante

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)}$$

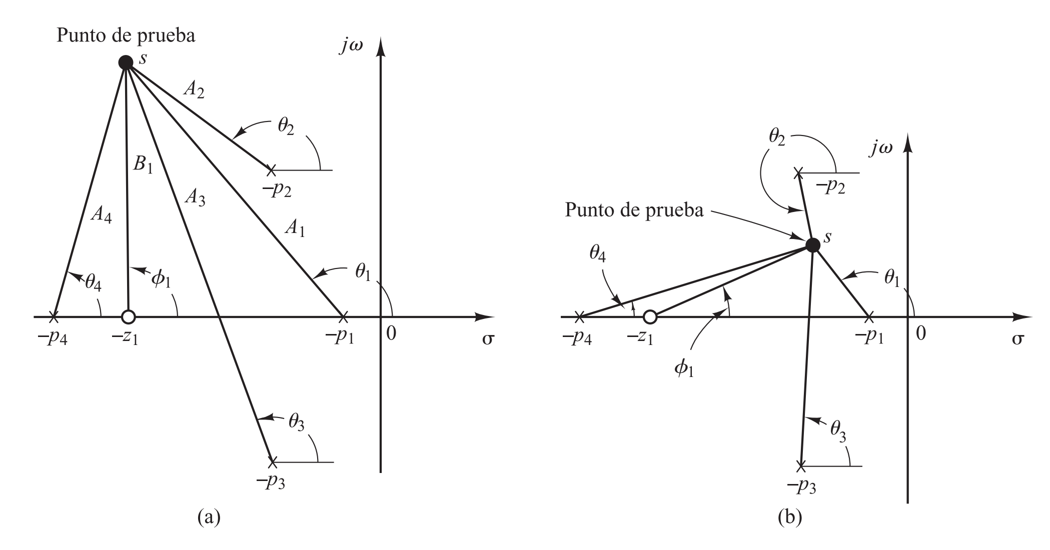


Figura 6-2. (a) y (b) Diagramas que muestran la medición de ángulos de los polos y los ceros en lazo abierto con el punto de prueba *s*.

donde $-p_2$ y $-p_3$ son polos complejos conjugados, el ángulo de $G(s)H(s)$ es

$$\underline{/G(s)H(s)} = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$

donde ϕ_1, θ_1, θ_2, θ_3 y θ_4 se miden en sentido contrario al de las agujas del reloj, como se muestra en las Figuras 6-2(a) y (b). La magnitud de $G(s)H(s)$ para este sistema es

$$|G(s)H(s)| = \frac{KB_1}{A_1A_2A_3A_4}$$

donde A_1, A_2, A_3, A_4 y B_1 son las magnitudes de las cantidades complejas $s + p_1$, $s + p_2$, $s + p_3$, $s + p_4$ y $s + z_1$, respectivamente, como se muestra en la Figura 6-2(a).

Obsérvese que, debido a que los polos complejos conjugados y los ceros complejos conjugados en lazo abierto, si existen, siempre se sitúan simétricamente con respecto al eje real, los lugares de las raíces siempre son simétricos con respecto a este eje. Por tanto, sólo es necesario construir la mitad superior de los lugares de las raíces y dibujar la imagen especular de la mitad superior en el plano *s* inferior.

Ejemplos ilustrativos. A continuación se presentarán dos ejemplos para construir gráficas del lugar de las raíces. Aunque las realizaciones mediante computador resultan muy sencillas para la construcción de los lugares de las raíces, aquí se usará el cálculo gráfico, combinado con una observación, para determinar los lugares de las raíces en los que deben situarse las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado. Esta aproximación gráfica ayudará a comprender mejor cómo se mueven los polos en lazo cerrado en el plano complejo cuando se mueven los polos y los ceros en lazo abierto. Aunque sólo se utilicen sistemas sencillos como ejemplo, el procedimiento para encontrar los lugares de las raíces, para sistemas de orden superior no resulta más complicado.

Debido a que las mediciones gráficas de ángulos y magnitudes están implícitas en el análisis, es necesario usar las mismas divisiones en el eje de las abscisas y en el de las ordenadas, cuando se dibujen los lugares de las raíces sobre papel para gráficas.

EJEMPLO 6-1 Considere el sistema de la Figura 6-3. (Se supone que el valor de la ganancia K es no negativo.) Para este sistema,

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \qquad H(s) = 1$$

Se dibuja la gráfica del lugar de las raíces y después se determina el valor de K tal que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes complejos conjugados en lazo abierto sea 0.5.

Para el sistema dado, la condición de ángulo es

$$\begin{aligned} \angle G(s) &= \angle \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \\ &= -\angle s - \angle s+1 - \angle s+2 \\ &= \pm 180^\circ(2k+1) \qquad (k = 0, 1, 2, ...) \end{aligned}$$

La condición de magnitud es

$$|G(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right| = 1$$

Un procedimiento común para dibujar la gráfica del lugar de las raíces es el siguiente:

1. *Determinar los lugares de las raíces sobre el eje real*. El primer paso al construir una gráfica del lugar de las raíces es situar los polos en lazo abierto, $s = 0$, $s = -1$ y $s = -2$, en el plano complejo. (En este sistema no hay ceros en lazo abierto.) Las localizaciones de los polos en lazo abierto se señalan mediante cruces. (En este libro las localizaciones de los ceros en lazo abierto se indicarán con círculos pequeños.) Observe que los puntos iniciales de los lugares de las raíces (los puntos que corresponden a $K = 0$) son los polos en lazo abierto. Los lugares de raíces individuales para este sistema son tres, que coincide con el número de polos en lazo abierto.

Para determinar los lugares de las raíces sobre el eje real, se selecciona un punto de prueba, s. Si el punto de prueba está en el eje real positivo, entonces

$$\angle s = \angle s+1 = \angle s+2 = 0^\circ$$

Esto demuestra que no es posible satisfacer la condición de ángulo. Por tanto, no hay un lugar de las raíces sobre el eje real positivo. A continuación, se selecciona un punto de prueba sobre el eje real negativo entre 0 y -1. Así,

$$\angle s = 180^\circ, \qquad \angle s+1 = \angle s+2 = 0^\circ$$

Por tanto,

$$-\angle s - \angle s+1 - \angle s+2 = -180^\circ$$

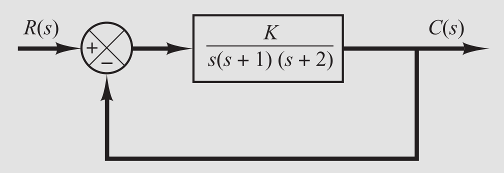


Figura 6-3. Sistema de control.

y se satisface la condición de ángulo. Así, la parte del eje real negativo entre 0 y -1 forma parte del lugar de las raíces. Si se selecciona un punto de prueba entre -1 y -2, entonces

$$\underline{/s} = \underline{/s+1} = 180^{\circ}, \qquad \underline{/s+2} = 0^{\circ}$$

y

$$-\underline{/s} - \underline{/s+1} - \underline{/s+2} = -360^{\circ}$$

Se observa que no se satisface la condición de ángulo. Por tanto, el eje real negativo de -1 a -2 no forma parte del lugar de las raíces. Asimismo, si se sitúa un punto de prueba sobre el eje real negativo de -2 a $-\infty$, se satisface la condición de ángulo. Por tanto, existen lugares de las raíces sobre el eje real negativo entre 0 y -1 y entre -2 y $-\infty$.

2. *Determinar las asíntotas de los lugares de las raíces*. Las asíntotas de los lugares de las raíces, conforme s tiende a infinito, se determinan del modo siguiente. Si se selecciona un punto de prueba muy lejano al origen, entonces

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^3}$$

y la condición de ángulo se convierte en

$$-3\underline{/s} = \pm 180^{\circ}(2k+1) \qquad (k = 0, 1, 2, ...)$$

o bien

$$\text{Ángulos de asíntotas} = \frac{\pm 180^{\circ}(2k+1)}{3} \qquad (k = 0, 1, 2, ...)$$

Dado que el ángulo se repite a sí mismo conforme K varía, los ángulos distintos para las asíntotas se determinan como 60°, $-60°$ y 180°. Por tanto, hay tres asíntotas. La única que tiene el ángulo de 180° es el eje real negativo.

Antes de dibujar estas asíntotas en el plano complejo, se debe encontrar el punto en el cual cortan el eje real. Como

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

si un punto de prueba se sitúa muy lejos del origen, $G(s)$ se puede escribir como

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + \cdots}$$

Para valores grandes de s, esta última ecuación se aproxima mediante

$$G(s) \doteq \frac{K}{(s+1)^3} \tag{6-5}$$

Un dibujo del lugar de las raíces de $G(s)$ de la Ecuación (6-5) está compuesto de tres líneas rectas. Esto se puede ver de la siguiente manera. La ecuación del lugar de las raíces es

$$\underline{\Big/\frac{K}{(s+1)^3}} = \pm 180^{\circ}(2k+1)$$

o bien

$$-3\underline{/s+1} = \pm 180^{\circ}(2k+1)$$

la cual se puede escribir como

$$\underline{/s+1} = \pm 60^{\circ}(2k+1)$$

Sustituyendo $s = \sigma + j\omega$ en esta última ecuación, se obtiene

$$\underline{/\sigma + j\omega + 1} = \pm 60^{\circ}(2k+1)$$

o bien

$$\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma+1} = 60^{\circ}, \qquad -60^{\circ}, \qquad 0^{\circ}$$

Aplicando la tangente a ambos lados de esta última ecuación,

$$\frac{\omega}{\sigma+1} = \sqrt{3}, \qquad -\sqrt{3}, \qquad 0$$

la cual se puede escribir como

$$\sigma + 1 - \frac{\omega}{\sqrt{3}} = 0, \qquad \sigma + 1 + \frac{\omega}{\sqrt{3}} = 0, \qquad \omega = 0$$

Estas tres ecuaciones representan tres líneas rectas tal y como se muestra en la Figura 6-4. Las tres líneas rectas que se muestran son las asíntotas. Estas se unen en el punto $s = -1$. Por tanto, la abscisa de la intersección de las asíntotas y el eje real se obtiene igualando el denominador del lado derecho de la Ecuación (6-5) a cero y despejando s. Las asíntotas son casi parte de los lugares de las raíces en regiones muy lejanas al origen.

3. *Determinar el punto de ruptura.* Para dibujar con precisión los lugares de las raíces, se debe encontrar el punto de ruptura, a partir del cual las ramas del lugar de las raíces que se originan en los polos en 0 y -1 (cuando K aumenta) se alejan del eje real y se mueven sobre plano complejo. El punto de ruptura corresponde a un punto en el plano s en el cual hay raíces múltiples de la ecuación característica.

Existe un método sencillo para encontrar el punto de ruptura. A continuación se muestra dicho método. Se escribe la ecuación característica como

$$f(s) = B(s) + KA(s) = 0 \tag{6-6}$$

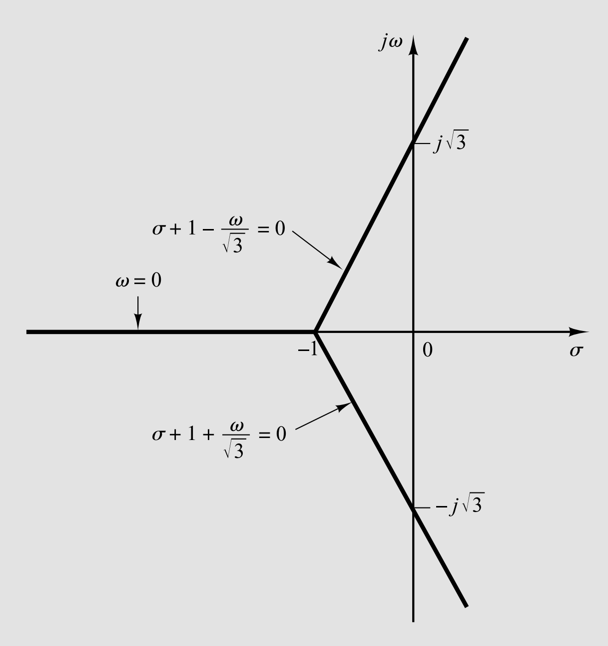


Figura 6-4. Tres asíntotas.

donde $A(s)$ y $B(s)$ no contienen K. Observe que $f(s) = 0$ tiene raíces múltiples en los puntos donde

$$\frac{df(s)}{ds} = 0$$

Esto se observa del modo siguiente: suponga que $f(s)$ tiene raíces múltiples de un orden r, donde $r \geqslant 2$. En este caso, $f(s)$ se escribe como

$$f(s) = (s - s_1)^r(s - s_2) \cdots (s - s_n)$$

Si se diferencia esta ecuación con respecto a s y establecemos $df(s)/ds$ en $s = s_1$, se obtiene

$$\left.\frac{df(s)}{ds}\right|_{s=s_1} = 0 \tag{6-7}$$

Esto significa que múltiples raíces de $f(s)$ satisfarán la Ecuación (6-7). A partir de la Ecuación (6-6) se obtiene

$$\frac{df(s)}{ds} = B'(s) + KA'(s) = 0 \tag{6-8}$$

donde

$$A'(s) = \frac{dA(s)}{ds}, \qquad B'(s) = \frac{dB(s)}{ds}$$

El valor específico de K que producirá raíces múltiples de la ecuación característica se obtiene de la Ecuación (6-8) como

$$K = -\frac{B'(s)}{A'(s)}$$

Si se sustituye este valor de K en la Ecuación (6-6), se obtiene

$$f(s) = B(s) - \frac{B'(s)}{A'(s)} A(s) = 0$$

o bien

$$B(s)A'(s) - B'(s)A(s) = 0 \tag{6-9}$$

Si se despeja la Ecuación (6-9) para s, se obtienen los puntos en los que hay raíces múltiples. Por otra parte, a partir de la Ecuación (6-6) se obtiene

$$K = -\frac{B(s)}{A(s)}$$

y

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)}$$

Si dK/ds se hace igual a cero, se obtiene lo mismo que en la Ecuación (6-9). Por tanto, los puntos de ruptura se determinan sencillamente a partir de las raíces de

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

Debe señalarse que no todas las soluciones de la Ecuación (6-9) o de $dK/ds = 0$ corresponden a los puntos de ruptura reales. Si un punto en el cual $dK/ds = 0$ está sobre el lugar de las raíces, se trata de un punto de ruptura real o un punto de ingreso. De otro modo, si en un punto en el cual $dK/ds = 0$, el valor de K tiene un valor positivo real, este punto es un punto de ruptura o un punto de ingreso real.

Para el ejemplo actual, la ecuación característica $G(s) + 1 = 0$ se obtiene mediante

$$\frac{K}{s(s+1)(s+2)} + 1 = 0$$

o bien

$$K = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

Haciendo $dK/ds = 0$ se obtiene

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0$$

o bien

$$s = -0.4226, \qquad s = -1.5774$$

Dado que el punto de ruptura debe encontrarse sobre el lugar de las raíces entre 0 y -1, es evidente que $s = -0.4226$ corresponde al punto de ruptura real. El punto $s = -1.5774$ no está sobre el lugar de las raíces. Por tanto, no es un punto de ruptura o de ingreso real. De hecho, el cálculo de los valores de K que corresponden a $s = -0.4226$ y $s = -1.5774$ da por resultado

$$K = 0.3849, \qquad \text{para } s = -0.4226$$

$$K = -0.3849, \qquad \text{para } s = -1.5774$$

4. *Determinar los puntos en donde el lugar de las raíces cruza el eje imaginario*. Estos puntos se encuentran mediante el criterio de estabilidad de Routh del modo siguiente. Dado que la ecuación característica para el sistema actual es

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

La tabla de Routh se convierte en

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s_1 & \dfrac{6-K}{3} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

El valor de K que iguala con cero el término s^1 de la primera columna es $K = 6$. Los puntos de cruce con el eje imaginario se encuentran después despejando la ecuación auxiliar obtenida de la fila s^2; es decir,

$$3s^2 + K = 3s^2 + 6 = 0$$

que produce

$$s = \pm j\sqrt{2}$$

Las frecuencias en los puntos de cruce con el eje imaginario son, por tanto, $\omega = \pm\sqrt{2}$. El valor de ganancia que corresponde a los puntos de cruce es $K = 6$.

Una aproximación alternativa es suponer que $s = j\omega$ en la ecuación característica, igualar con cero tanto la parte imaginaria como la real y después despejar ω y K. Para el sistema actual, la ecuación característica, con $s = j\omega$, es

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0$$

o bien

$$(K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

Si se igualan a cero tanto la parte real como la imaginaria de esta última ecuación, se obtiene

$$K - 3\omega^2 = 0, \qquad 2\omega - \omega^3 = 0$$

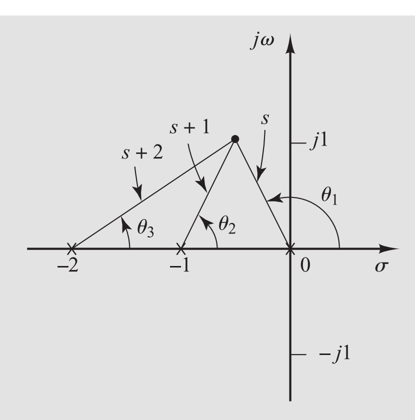


Figura 6-5. Construcción de un lugar de las raíces.

de donde

$$\omega = \pm\sqrt{2}, \qquad K = 6 \quad \text{o} \quad \omega = 0, \qquad K = 0$$

Por tanto, los lugares de las raíces cruzan el eje imaginario en $\omega = \pm\sqrt{2}$, y el valor de K en los puntos de cruce es 6. Asimismo, una rama del lugar de las raíces sobre el eje real tocará el eje imaginario en $\omega = 0$.

5. *Seleccionar un punto de prueba en una vecindad amplia del eje jω y el origen*, como se muestra en la Figura 6-5, y aplicar la condición de ángulo. Si un punto de prueba está sobre los lugares de las raíces, la suma de los tres ángulos, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$, debe ser 180º. Si el punto de prueba no satisface la condición de ángulo, seleccione otro hasta que se cumpla tal condición. (La suma de los ángulos en el punto de prueba indicará en qué dirección debe moverse el punto de prueba.) Continúe este proceso y sitúe una cantidad suficiente de puntos que satisfagan la condición de ángulo.

6. *Dibujar los lugares de las raíces*, tomando como base la información obtenida en los pasos anteriores, tal y como se muestra en la Figura 6-6.

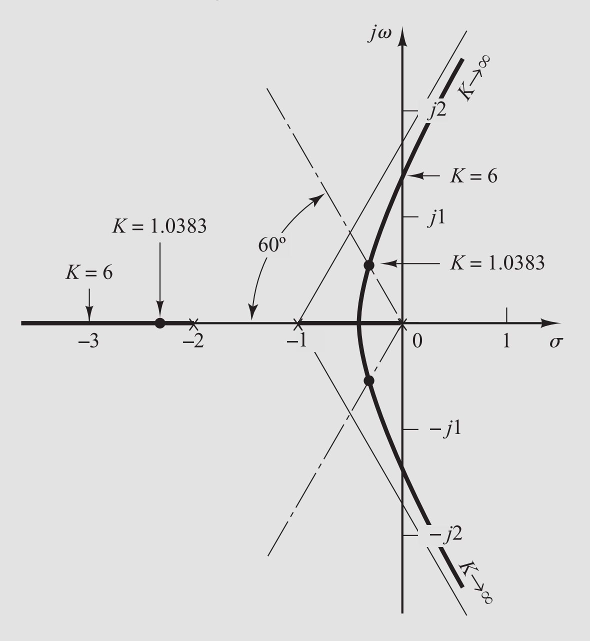


Figura 6-6. Gráfica del lugar de las raíces.

7. *Determinar un par de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado tales que el factor de amortiguamiento relativo* ζ *sea* 0.5. Los polos en lazo cerrado con $\zeta = 0.5$ se encuentran sobre las líneas que pasan por el origen y forman los ángulos $\pm\cos^{-1}\zeta = \pm\cos^{-1}0.5 = \pm 60^{\circ}$ con el eje real negativo. A partir de la Figura 6-6, tales polos en lazo cerrado con $\zeta = 0.5$ se obtienen del modo siguiente:

$$s_1 = -0.3337 + j0.5780, \qquad s_2 = -0.3337 - j0.5780$$

El valor de K que produce tales polos se encuentra a partir de la condición de magnitud, del modo siguiente:

$$K = |s(s+1)(s+2)|_{s=-0.3337+j0.5780}$$
$$= 1.0383$$

Usando este valor de K, el tercer polo se encuentra en $s = -2.3326$.

Observe que, a partir del paso 4, se aprecia que para $K=6$, los polos dominantes en lazo cerrado se encuentran sobre el eje imaginario en $s = \pm j\sqrt{2}$. Con este valor de K, el sistema mostrará oscilaciones sostenidas. Para $K > 6$, los polos dominantes en lazo cerrado se encuentran en el semiplano derecho del plano s, produciendo un sistema inestable.

Por último, observe que, si es necesario, se establece con facilidad la parametrización de los lugares de las raíces en términos de K mediante la condición de magnitud. Sencillamente se elige un punto sobre un lugar de las raíces, se miden las magnitudes de las tres cantidades complejas s, $s+1$ y $s+2$ y se multiplican estas magnitudes; el producto es igual al valor de la ganancia K en dicho punto, o bien

$$|s| \cdot |s+1| \cdot |s+2| = K$$

La parametrización del lugar de las raíces se realiza de una manera sencilla utilizando MATLAB (véase la Sección 6-3).

EJEMPLO 6-2 En este ejemplo se dibuja la gráfica del lugar de las raíces de un sistema con polos complejos conjugados en lazo abierto. Considere el sistema de la Figura 6-7. Para este sistema,

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 3}, \qquad H(s) = 1$$

donde $K \geqslant 0$. Se observa que $G(s)$ tiene un par de polos complejos conjugados en

$$s = -1 + j\sqrt{2}, \qquad s = -1 - j\sqrt{2}$$

Un procedimiento común para dibujar la gráfica del lugar de las raíces es el siguiente:

1. *Determinar los lugares de las raíces sobre el eje real*. Para cualquier punto de prueba s sobre el eje real, la suma de las contribuciones angulares de los polos complejos conjugados es de 360°, como se observa en la Figura 6-8. Por tanto, el efecto neto de los polos complejos conjugados es cero sobre el eje real. La localización del lugar de las raíces sobre el eje real se determina a partir del cero en lazo abierto sobre el eje real negativo. Una prueba sencilla revela que una sección del eje real negativo, aquella que se encuentra entre -2 y $-\infty$, es una parte del lugar de las raíces. Se observa que, dado que este lugar geométrico se encuentra entre dos ceros (en $s = -2$ y $s = -\infty$), es en realidad parte de dos lugares de las raíces, cada uno de los cuales empieza en uno

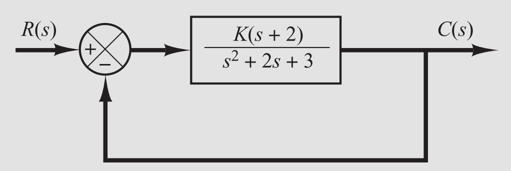


Figura 6-7. Sistema de control.

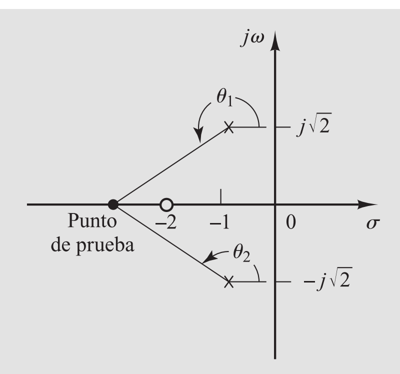


Figura 6-8. Determinación del lugar de las raíces sobre el eje real.

de los dos polos complejos conjugados. En otras palabras, dos lugares de las raíces ingresan en la parte del eje real negativo entre -2 y $-\infty$.

Como existen dos polos en lazo abierto y un cero, hay una asíntota que coincide con el eje real negativo.

2. *Determinar el ángulo de salida de los polos complejos conjugados en lazo abierto*. La presencia de un par de polos complejos conjugados en lazo abierto requiere la determinación del ángulo de salida a partir de los mismos. El conocimiento de este ángulo es importante, debido a que el lugar de las raíces cerca de un polo complejo proporciona información con respecto a si el lugar geométrico que se origina en el polo complejo emigra hacia el eje real o se tiende hacia la asíntota.

En la Figura 6-9, si se elige un punto de prueba y se mueve en la vecindad misma del polo complejo en lazo abierto en $s = -p_1$, ocurre que la suma de las contribuciones angulares del polo en $s = p_2$ y el cero en $s = -z_1$ se considera sin alteración para el punto de prueba. Si el punto de prueba está sobre el lugar de las raíces, la suma de ϕ_1', $-\theta_1$ y $-\theta_2'$ debe ser $\pm 180^{\circ}(2k+1)$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots$. Por tanto, en este ejemplo,

$$\phi_1' - (\theta_1 + \theta_2') = \pm 180^{\circ}(2k+1)$$

o bien

$$\theta_1 = 180^{\circ} - \theta_2' + \phi_1' = 180^{\circ} - \theta_2 + \phi_1$$

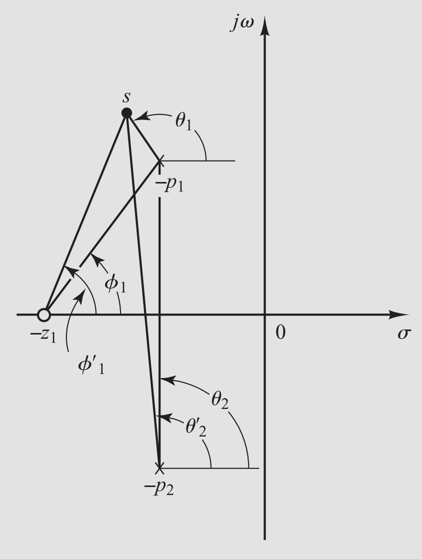


Figura 6-9. Determinación del ángulo de salida.

En este caso, el ángulo de salida es

$$\theta_1 = 180^o - \theta_2 + \phi_1 = 180^o - 90^o + 55^o = 145^o$$

Debido a que el lugar de las raíces es simétrico con respecto al eje real, el ángulo de salida del polo en $s = -p_2$ es -145°.

3. *Determinar el punto de ingreso*. Existe un punto de ingreso en el cual se integran un par de ramas del lugar de las raíces cuando K aumenta. Para este problema, el punto de ingreso se encuentra del modo siguiente: como

$$K = -\frac{s^2 + 2s + 3}{s + 2}$$

se tiene que

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(2s + 2)(s + 2) - (s^2 + 2s + 3)}{(s + 2)^2} = 0$$

de donde se obtiene

$$s^2 + 4s + 1 = 0$$

o bien

$$s = -3.7320 \quad \text{o} \quad s = -0.2680$$

Observe que el punto $s = -3.7320$ está sobre el lugar de las raíces. Por tanto, se trata de un punto de ingreso real. (Observe que, en el punto $s = -3.7320$, el valor de la ganancia correspondiente es $K = 5.4641$.) Como el punto $s = -0.2680$ no está en el lugar de las raíces, no puede ser un punto de ingreso. (Para el punto $s = -0.2680$, el valor de ganancia correspondiente es $K = -1.4641$.)

4. *Dibujar una gráfica del lugar de las raíces, a partir de la información obtenida en los pasos anteriores*. Para determinar los lugares de las raíces de una forma precisa, deben encontrarse varios puntos mediante prueba y error entre el punto de ingreso y los polos complejos en lazo abierto. (Para facilitar el dibujo de la gráfica del lugar de las raíces, se debe encontrar la dirección en la cual se moverá el punto de prueba sumando mentalmente los cambios de los ángulos de los polos y ceros.) La Figura 6-10 muestra una gráfica completa del lugar de las raíces para el sistema considerado.

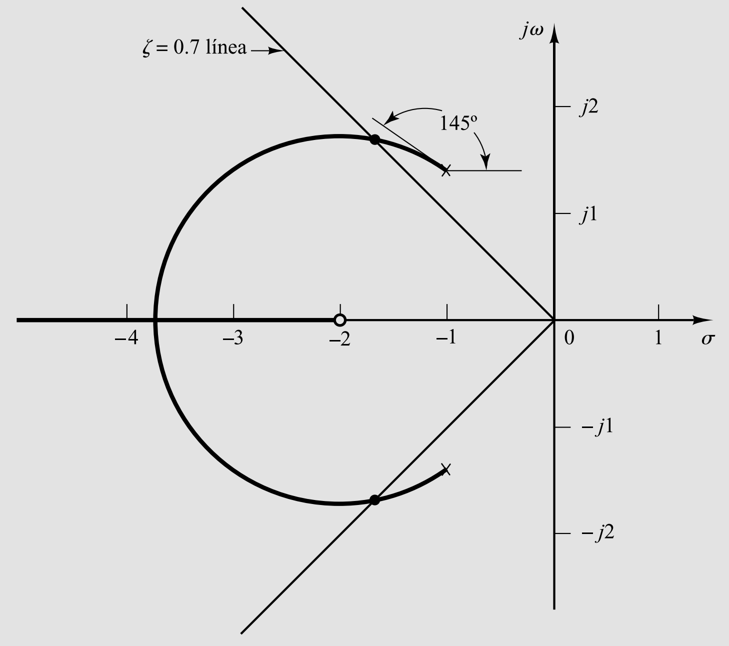


Figura 6-10. Gráfica del lugar de las raíces.

El valor de la ganancia K en cualquier punto sobre el lugar de las raíces se encuentra aplicando la condición de magnitud o utilizando MATLAB (véase la Sección 6-4). Por ejemplo, el valor de K en el cual los polos complejos conjugados en lazo cerrado tienen el factor de amortiguamiento relativo $\zeta = 0.7$ se encuentra situando las raíces, como se muestra en la Figura 6-10, y calculando el valor de K del modo siguiente:

$$K = \left| \frac{(s+1-j\sqrt{2})(s+1+j\sqrt{2})}{s+2} \right|_{s=-1.67+j1.70} = 1.34$$

O bien utilizando MATLAB para encontrar el valor de K (véase la Sección 6-4).

Se observa que, en este sistema, el lugar de las raíces en el plano complejo es parte de un círculo. Dicho lugar de las raíces circular no se obtiene en la mayor parte de los sistemas. Los lugares de las raíces circulares se obtienen en sistemas que contienen dos polos y un cero, dos polos y dos ceros, o un polo y dos ceros. Incluso en tales sistemas, el que se obtengan estos lugares de las raíces circulares depende de la situación de los polos y los ceros involucrados.

Para mostrar cómo se obtiene en el sistema actual un lugar de las raíces circular, se necesita derivar la ecuación para dicho lugar geométrico. Para el sistema actual, la condición de ángulo es

$$\underline{/s+2} - \underline{/s+1-j\sqrt{2}} - \underline{/s+1+j\sqrt{2}} = \pm 180^{\circ}(2k+1)$$

Si se sustituye $s = \sigma + j\omega$ dentro de esta última ecuación, se obtiene

$$\underline{/\sigma+2+j\omega} - \underline{/\sigma+1+j\omega-j\sqrt{2}} - \underline{/\sigma+1+j\omega+j\sqrt{2}} = \pm 180^{\circ}(2k+1)$$

la cual se puede escribir como

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) = \pm 180^{\circ}(2k+1)$$

o bien

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) \pm 180^{\circ}(2k+1)$$

Tomando la tangente a ambos lados de esta última ecuación y usando la relación

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \tag{6-10}$$

se obtiene

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)\right] = \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) \pm 180^{\circ}(2k+1)\right]$$

o bien

$$\frac{\dfrac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1} + \dfrac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}}{1 - \left(\dfrac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)\left(\dfrac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)} = \frac{\dfrac{\omega}{\sigma+2} \pm 0}{1 \mp \dfrac{\omega}{\sigma+2} \times 0}$$

que se puede simplificar a

$$\frac{2\omega(\sigma+1)}{(\sigma+1)^2 - (\omega^2-2)} = \frac{\omega}{\sigma+2}$$

o bien

$$\omega[(\sigma+2)^2 + \omega^2 - 3] = 0$$

Esta última ecuación es equivalente a

$$\omega = 0 \quad \text{o} \quad (\sigma+2)^2 + \omega^2 = (\sqrt{3})^2$$

Estas dos ecuaciones corresponden a los lugares de las raíces del sistema actual. Observe que la primera ecuación, $\omega = 0$, corresponde al eje real. El eje real desde $s = -2$ a $s = -\infty$ corresponde a un lugar de las raíces para $K \geqslant 0$. La parte restante del eje real corresponde a un lugar de las raíces cuando K es negativo. (En el sistema actual, K es no negativo.) La segunda ecuación para el lugar de las raíces es una ecuación de un círculo con centro en $\sigma = -2$, $\omega = 0$ y radio igual a $\sqrt{3}$. Esta parte del círculo a la izquierda de los polos complejos conjugados corresponde al lugar de las raíces para $K \geqslant 0$. La parte restante del círculo corresponde al lugar de las raíces cuando K es negativo.

Es importante observar que las ecuaciones que se interpretan con facilidad para el lugar de las raíces sólo se obtienen para sistemas sencillos. No se recomienda intentar obtener las ecuaciones para los lugares de las raíces en sistemas complicados que tengan muchos polos y ceros. Tales ecuaciones son muy complicadas y su configuración en el plano complejo es difícil de visualizar.

Resumen de las reglas generales para construir los lugares de las raíces. Para un sistema complejo en lazo abierto con muchos polos y ceros, puede parecer complicado construir una gráfica del lugar de las raíces, aunque en realidad no es difícil si se aplican las reglas para construir dicho lugar. Situando los puntos y las asíntotas específicos y calculando los ángulos de salida de los polos complejos y los ángulos de llegada a los ceros complejos, se puede construir la forma general de los lugares de las raíces sin dificultad.

A continuación se resumen las reglas y el procedimiento general para construir los lugares de las raíces del sistema de la Figura 6-11.

Primero, obtenga la ecuación característica

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

A continuación, vuélvase a ordenar esta ecuación para que el parámetro de interés aparezca como el factor multiplicativo, en la forma

$$1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = 0 \tag{6-11}$$

En estos análisis, se supone que el parámetro de interés es la ganancia K, donde $K > 0$. (Si $K < 0$, que corresponde al caso de realimentación positiva, debe modificarse la condición de ángulo. Véase la Sección 6-4.) Sin embargo, obsérvese que el método todavía es aplicable a sistemas con parámetros de interés diferentes a la ganancia (véase la Sección 6-6).

1. *Situar los polos y ceros de $G(s)H(s)$ en el plano s. Las ramas del lugar de las raíces empiezan en los polos en lazo abierto y terminan en los ceros (ceros finitos o ceros en infinito).* A partir de la forma factorizada de la función de transferencia en lazo abierto, sitúense los polos

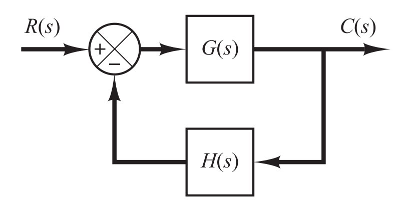


Figura 6-11. Sistema de control.

y los ceros en lazo abierto en el plano s. [Obsérvese que los ceros en lazo abierto son los de $G(s)H(s)$, mientras que los ceros en lazo cerrado son los de $G(s)$ y los polos de $H(s)$.]

Obsérvese que los lugares de las raíces son simétricos con respecto al eje real del plano s, debido a que los polos y ceros complejos sólo aparecen en pares conjugados.

Una gráfica del lugar de las raíces tendrá tantas ramas como raíces tenga la ecuación característica. Debido a que, por lo general, el número de polos en lazo abierto es mayor que el de ceros, el número de ramas es igual al de los polos. Si el número de polos en lazo cerrado es igual al número de polos en lazo abierto, el número de ramas individuales del lugar de las raíces que terminan en los ceros finitos en lazo abierto será igual al número m de ceros en lazo abierto. Las $n - m$ ramas restantes terminan en infinito ($n - m$ ceros implícitos en infinito) a lo largo de las asíntotas.

Si se incluyen los polos y los ceros en infinito, el número de polos en lazo abierto es igual al de ceros en lazo abierto. Por tanto, siempre se puede plantear que los lugares de las raíces empiezan en los polos de $G(s)H(s)$ y terminan en los ceros de $G(s)H(s)$ conforme K aumenta de cero a infinito, donde los polos y los ceros incluyen los finitos y los infinitos en el plano s.

2. *Determinar los lugares de las raíces sobre el eje real*. Los lugares de las raíces sobre el eje real se determinan a partir de los polos y los ceros en lazo abierto que se encuentran sobre él. Los polos y los ceros complejos conjugados de la función de transferencia en lazo abierto no afectan a la localización de los lugares de las raíces sobre el eje real, porque la contribución del ángulo de un par de polos o ceros complejos conjugados es 360º sobre el eje real. Cada parte del lugar de las raíces sobre el eje real se extiende sobre un rango de un polo o cero a otro polo o cero. Al construir los lugares sobre el eje real, selecciónese un punto en éste. Si el número total de polos y ceros reales a la derecha de este punto de prueba es impar, este punto se encuentra en el lugar de las raíces. Si los polos y ceros en lazo abierto son simples, el lugar de las raíces y su forma complementaria alternan segmentos a lo largo del eje real.

3. *Determinar las asíntotas de los lugares de las raíces*. Si el punto de prueba s se sitúa lejos del origen, se considera que no cambia el ángulo de cada cantidad compleja. Entonces, un cero en lazo abierto y un polo en lazo abierto cancelan los efectos del otro. Por tanto, los lugares de las raíces para valores de s muy grandes deben ser asintóticos para líneas rectas cuyos ángulos (pendientes) se obtengan mediante

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{n - m} \qquad (k = 0, 1, 2, ...)$$

donde n = número de polos finitos de $G(s)H(s)$

m = número de ceros finitos de $G(s)H(s)$

Aquí, $k = 0$ corresponde a las asíntotas con el ángulo más pequeño con el eje real. Aunque k supone un número infinito de valores, a medida que aumenta, el ángulo se repite a sí mismo y la cantidad de asíntotas distintas es $n - m$.

Todas las asíntotas cortan el eje real. El punto de intersección se obtiene del modo siguiente: si se desarrollan el numerador y el denominador de la función de transferencia en lazo abierto, el resultado es

$$G(s)H(s) = \frac{K[s^m + (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)s^{m-1} + \cdots + z_1 z_2 \cdots z_m]}{s^n + (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)s^{n-1} + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_n}$$

Si un punto de prueba se localiza muy lejos del origen, entonces, dividiendo el denominador entre el numerador, se puede escribir $G(s)H(s)$ como

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^{n-m} + [(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)]s^{n-m-1} + \cdots}$$

o bien

$$G(s)H(s) = \frac{K}{\left[s + \dfrac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)}{n-m}\right]^{n-m}} \tag{6-12}$$

La abscisa de la intersección de las asíntotas y el eje real se obtiene igualando a cero el denominador del lado derecho de la Ecuación (6-12) y despejando s, o

$$s = -\frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)}{n-m} \tag{6-13}$$

[El Ejemplo 6-1 muestra por qué la Ecuación (6-13) da la intersección.] Una vez que se encuentra la intersección, es fácil dibujar las asíntotas en el plano complejo.

Es importante señalar que las asíntotas muestran el comportamiento de los lugares de las raíces para $|s| \gg 1$. Una ramificación del lugar de las raíces puede encontrarse en un lado de la asíntota correspondiente o puede atravesar esta de un lado al otro.

4. *Encontrar los puntos de ruptura y de ingreso*. Debido a la simetría conjugada de los lugares de las raíces, los puntos de ruptura y de ingreso se encuentran sobre el eje real o bien aparecen en pares complejos conjugados.

Si un lugar de las raíces se encuentra entre dos polos en lazo abierto adyacentes sobre el eje real, existe al menos un punto de ruptura entre dichos dos polos. Asimismo, si el lugar de las raíces está entre dos ceros adyacentes (un cero puede localizarse en $-\infty$) sobre el eje real, siempre existe al menos un punto de ingreso entre los dos ceros. Si el lugar de las raíces se encuentra entre un polo en lazo abierto y un cero (finito o infinito) sobre el eje real, pueden no existir puntos de ruptura o de ingreso, o bien pueden existir ambos.

Supóngase que la ecuación característica se obtiene mediante

$$B(s) + KA(s) = 0$$

Los puntos de ruptura y los puntos de ingreso corresponden a las raíces múltiples de la ecuación característica. Por tanto, como se analizó en el Ejemplo 6-1, los puntos de ruptura y de ingreso se determinan a partir de las raíces de

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)} = 0 \tag{6-14}$$

donde la prima indica una diferenciación con respecto a s. Es importante señalar que los puntos de ruptura y los puntos de ingreso deben ser las raíces de la Ecuación (6-14), aunque no todas las raíces de la Ecuación (6-14) son puntos de ruptura o de ingreso. Si una raíz real de la Ecuación (6-14) se encuentra en la parte del eje real del lugar de las raíces, es un punto de ruptura o de ingreso real. Si una raíz real de la Ecuación (6-14) no está en la parte del eje real del lugar de las raíces, esta raíz no corresponde a un punto de ruptura ni a un punto de ingreso. Si dos raíces $s = s_1$ y $s = -s_1$, de la Ecuación (6-14) son un par complejo conjugado, y si no es seguro que están en los lugares de las raíces, es necesario verificar el valor de K correspondiente. Si el valor

de K que corresponde a la raíz $s = s_1$ de $dK/ds = 0$ es positivo, el punto $s = s_1$ es un punto de ruptura o de ingreso real. (Como se supone que K es no negativo, si el valor obtenido de K es negativo, el punto $s = s_1$ no es de ruptura ni de ingreso.)

5. *Determinar el ángulo de salida (ángulo de llegada) de un lugar de las raíces a partir de un polo complejo (un cero complejo)*. Para dibujar los lugares de las raíces con una precisión razonable, se deben encontrar las direcciones de los lugares de las raíces cercanas a los polos y ceros complejos. Si se selecciona un punto de prueba y se mueve en la cercanía precisa del polo complejo (o del cero complejo), se considera que no cambia la suma de las contribuciones angulares de todos los otros polos y ceros. Por tanto, el ángulo de llegada (o ángulo de salida) del lugar de las raíces de un polo complejo (o de un cero complejo) se encuentra restando a 180º la suma de todos los ángulos de vectores, desde todos los otros polos y ceros hasta el polo complejo (o cero complejo) en cuestión, incluyendo los signos apropiados.

Ángulo de salida desde un polo complejo = 180º
− (suma de los ángulos de vectores hacia el polo complejo en cuestión desde otros polos)
+ (suma de los ángulos de vectores hacia el polo complejo en cuestión desde los ceros)
Ángulo de llegada a un cero complejo = 180º
− (suma de los ángulos de vectores hacia el cero complejo en cuestión desde otros ceros)
+ (suma de los ángulos de vectores hacia el cero complejo en cuestión desde los polos)

El ángulo de salida se muestra en la Figura 6-12.

6. *Encontrar los puntos donde los lugares de las raíces cruzan el eje imaginario*. Los puntos donde los lugares de las raíces cruzan el eje $j\omega$ se encuentran con facilidad por medio de: (a) el criterio de estabilidad de Routh, o (b) suponiendo que $s = j\omega$ en la ecuación característica, igualando a cero la parte real y la parte imaginaria y despejando ω y K. En este caso, los valores encontrados de ω representan las frecuencias en las cuales los lugares de las raíces cruzan el eje imaginario. El valor de K que corresponde a cada frecuencia de cruce proporciona la ganancia en el punto de cruce.

7. *Tomando una serie de puntos de prueba en la cercanía del origen del plano s, dibujar los lugares de las raíces*. Determínense los lugares de las raíces en la cercanía del eje $j\omega$ y el origen. La parte más importante de los lugares de las raíces no está sobre el eje real ni en las asíntotas, sino en la parte cercana al eje $j\omega$ y al origen. La forma de los lugares de las raíces en esta región importante del plano s debe obtenerse con suficiente precisión. (Si se necesita la forma precisa del lugar de las raíces, se puede utilizar MATLAB mejor que el cálculo realizado a mano para obtener el lugar de las raíces.)

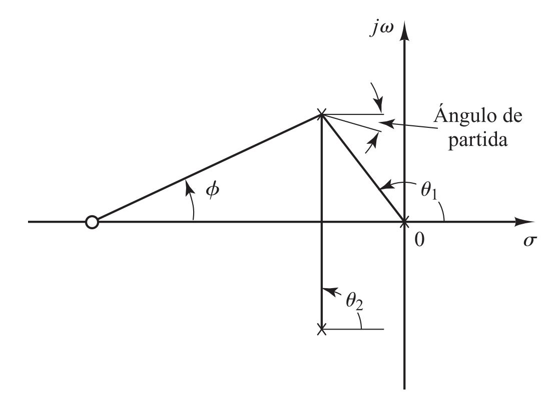


Figura 6-12. Construcción del lugar de las raíces. [Ángulo de salida = 180º − [$\theta_1 + \theta_2$] + ϕ.]

8. *Determinar los polos en lazo cerrado*. Un punto específico de cada ramificación del lugar de las raíces será un polo en lazo cerrado si el valor de K en dicho punto satisface la condición de magnitud. Por otra parte, la condición de magnitud permite determinar el valor de la ganancia K en cualquier localización de las raíces sobre el lugar. (Si es necesario, se establece una parametrización de los lugares de las raíces en términos de K. Los lugares de las raíces son continuos con K.)

El valor de K que corresponde a cualquier punto s sobre el lugar de las raíces se obtiene a partir de la condición de magnitud, o bien

$$K = \frac{\text{producto de las longitudes entre el punto } s \text{ y los polos}}{\text{producto de las longitudes entre el punto } s \text{ y los ceros}}$$

Este valor puede calcularse de forma gráfica o analíticamente. (Se puede utilizar MATLAB para parametrizar el lugar de las raíces con K. Véase la Sección 6-3.)

Si en este problema se da la ganancia K de la función de transferencia en lazo abierto, entonces, aplicando la condición de magnitud se encuentra la localización correcta de los polos en lazo cerrado para un K determinado sobre cada ramificación de los lugares de las raíces, mediante una aproximación de prueba y error o mediante MATLAB, que se presentará en la Sección 6-3.

Comentarios acerca de las gráficas del lugar de las raíces. Se observa que la ecuación característica del sistema cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \qquad (n \geqslant m)$$

es una ecuación algebraica en s de n-ésimo grado. Si el orden del numerador de $G(s)H(s)$ es menor que el del denominador en dos o más (lo que significa que hay dos o más ceros en infinito), el coeficiente a_1 es la suma negativa de las raíces de la ecuación y es independiente de K. En este caso, si alguna de las raíces se mueve en el lugar de las raíces hacia la izquierda, cuando K aumenta, las otras raíces deben moverse hacia la derecha cuando aumenta K. Esta información es útil para encontrar la forma general de los lugares de las raíces.

También se observa que un cambio ligero en la configuración de los polos y ceros provoca cambios significativos en las gráficas del lugar de las raíces. La Figura 6-13 muestra el hecho de que un cambio ligero en la situación de un cero o polo hará muy diferente la gráfica del lugar de las raíces.

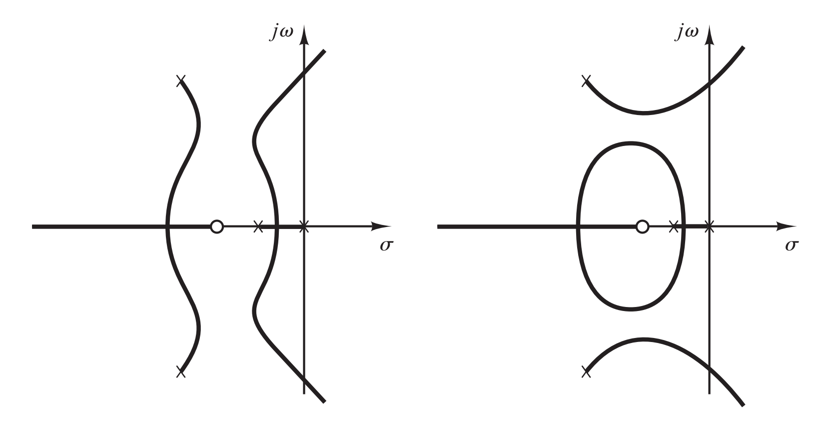


Figura 6-13. Gráfica del lugar de las raíces.

Cancelación de los polos $G(s)$ con los ceros de $H(s)$. Es importante señalar que si el denominador de $G(s)$ y el numerador de $H(s)$ contienen factores típicos, los polos y ceros en lazo abierto correspondientes se cancelarán unos con otros, reduciendo el grado de la ecuación característica en uno o más órdenes. Por ejemplo, considérese el sistema de la Figura 6-14(a). (Este sistema tiene una realimentación de velocidad.) Si se modifica el diagrama de bloques de la Figura 6-14(a) para obtener el de la Figura 6-14(b), se aprecia con claridad que $G(s)$ y $H(s)$ tienen un factor común $s + 1$. La función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+2) + K(s+1)}$$

La ecuación característica es

$$[s(s+2) + K](s+1) = 0$$

Sin embargo, debido a la cancelación de los términos $(s + 1)$ que aparecen en $G(s)$ y $H(s)$, se tiene que

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+1)(s+2)}$$

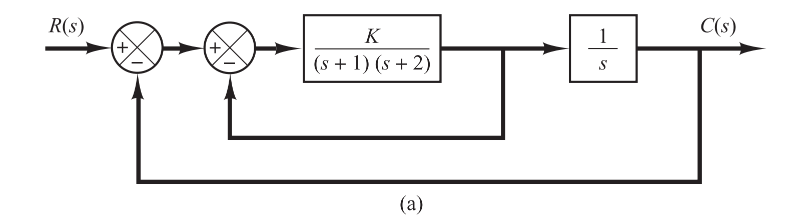
$$= \frac{s(s+2) + K}{s(s+2)}$$

La ecuación característica reducida es

$$s(s+2) + K = 0$$

La gráfica del lugar de las raíces de $G(s)H(s)$ no muestra todas las raíces de la ecuación característica; sólo las raíces de la ecuación reducida.

Para obtener el conjunto completo de polos en lazo cerrado, se debe agregar el polo cancelado de $G(s)H(s)$ a aquellos polos en lazo cerrado obtenidos en la gráfica del lugar de las raíces de $G(s)H(s)$. No debe olvidarse que el polo cancelado de $G(s)H(s)$ es un polo en lazo cerrado del sistema, como se observa en la Figura 6-14(c).



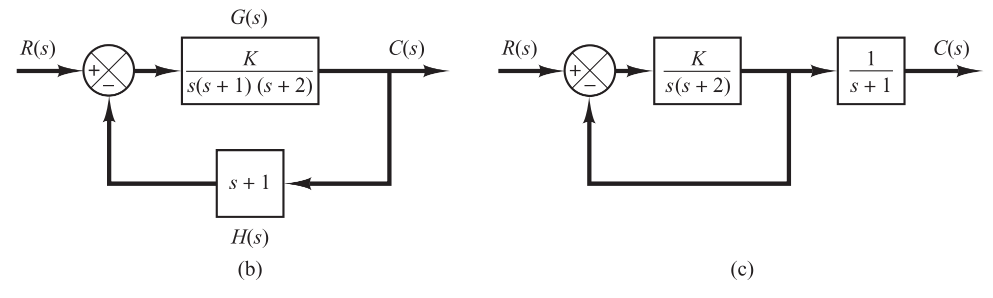
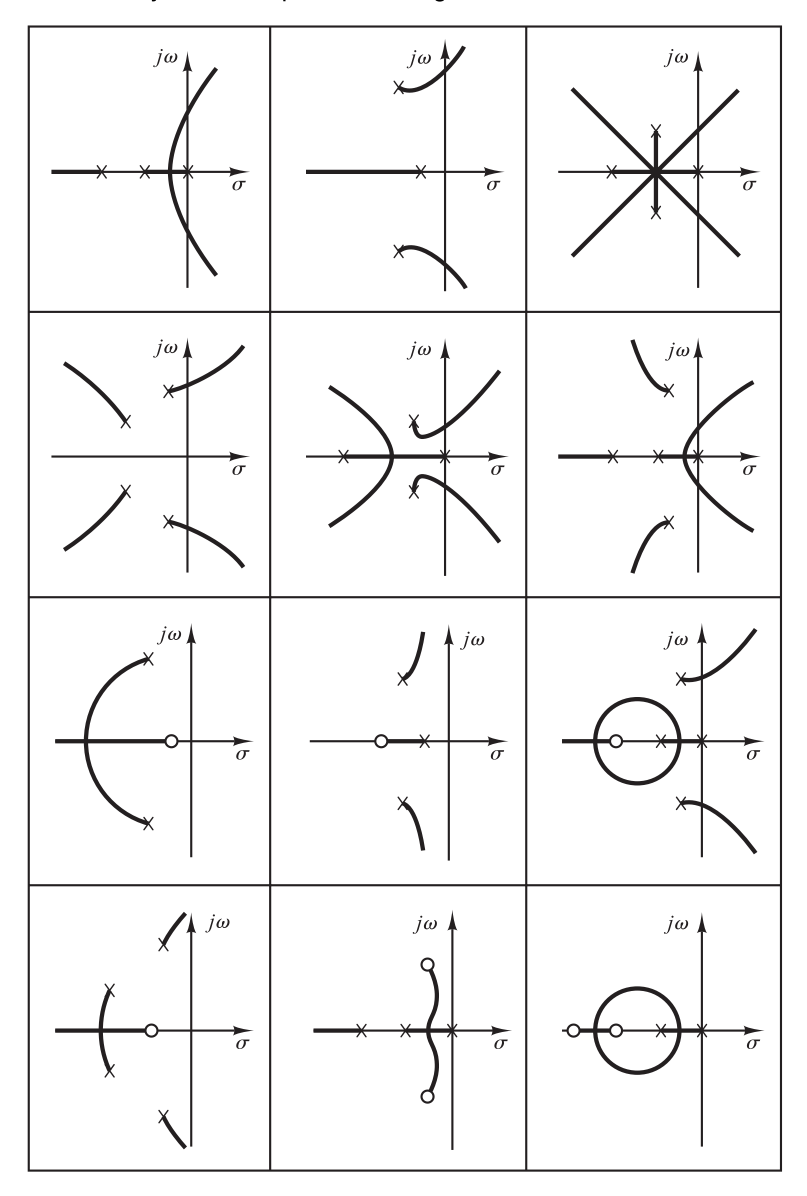


Figura 6-14. (a) Sistema de control con realimentación de velocidad; (b) y (c) diagramas de bloques modificados.

Configuraciones típicas de polos y ceros y sus correspondientes lugares de las raíces. Para concluir esta sección, se muestra la Tabla 6-1, que contiene varias configuraciones de polos y ceros en lazo abierto y sus correspondientes lugares de las raíces. La forma de los lugares de las raíces sólo depende de la separación relativa de los polos y ceros en lazo abierto. Si el número de polos en lazo abierto es mayor que el número de ceros finitos en tres o más, existe un valor de la ganancia K más allá del cual los lugares de las raíces entran en el semiplano derecho del plano s y, por tanto, el sistema puede volverse inestable. Un sistema estable debe tener todos sus polos en lazo cerrado en el semiplano izquierdo del plano s.

Tabla 6-1. Configuraciones de polos-ceros en lazo abierto y los correspondientes lugares de las raíces.



Obsérvese que, una vez que se ha adquirido cierta experiencia con el método, resulta fácil evaluar los cambios en los lugares de las raíces debidos a las modificaciones en el número y situación de los polos y ceros en lazo abierto, visualizando las gráficas de los lugares de las raíces que se producen de las diversas configuraciones de polos y ceros.

Resumen. A partir de los análisis anteriores, es evidente que se puede dibujar un diagrama razonablemente preciso del lugar de las raíces para un sistema determinado, siguiendo reglas sencillas. (Se sugiere al lector que estudie los diversos diagramas de los lugares de las raíces que aparecen en los problemas resueltos al final del capítulo.) En las etapas de diseño preliminares, no se necesitan las localizaciones precisas de los polos en lazo cerrado. Con frecuencia sólo se necesitan sus localizaciones aproximadas para hacer una estimación de la representación del sistema. Por tanto, es importante que el diseñador tenga la capacidad de dibujar con rapidez los lugares de las raíces para un sistema determinado.

6-3 Gráficas del lugar de las raíces con MATLAB

En esta sección se presenta la aproximación de MATLAB para generar las gráficas del lugar de las raíces.

Gráfica de los lugares de las raíces con MATLAB. Al dibujar los lugares de las raíces con MATLAB, se utiliza la ecuación del sistema obtenida por la Ecuación (6-11), que se escribe como

$$1 + K\frac{\text{num}}{\text{den}} = 0$$

donde num es el polinomio del numerador y den es el polinomio del denominador. Es decir,

$$\begin{aligned}\text{num} &= (s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_m)\\ &= s^m + (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)s^{m-1} + \cdots + z_1 z_2 \cdots z_m\\ \text{den} &= (s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_n)\\ &= s^n + (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)s^{n-1} + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_n\end{aligned}$$

Observe que ambos vectores, num y den, deben escribirse en potencias decrecientes de s. Una orden de MATLAB que se usa con frecuencia para dibujar los lugares de las raíces es

```
rlocus(num,den)
```

Con esta orden, se dibuja en la pantalla la gráfica del lugar de las raíces. El vector de ganancias K se determina de forma automática. (El vector K contiene todos los valores de ganancias para los cuales se van a calcular los polos en lazo cerrado.)

Para los sistemas definidos en el espacio de estados, `rlocus(A,B,C,D)` dibuja el lugar de las raíces del sistema con el vector de ganancias automáticamente determinado.

Obsérvese que las órdenes

```
rlocus(num,den,K)  y  rlocus(A,B,C,D,K)
```

utilizan el vector de ganancias K proporcionado por el usuario.

Si se quiere dibujar los lugares de las raíces con las marcas `'o'` o bien `'x'`, es necesario usar la orden siguiente:

```
r = rlocus(num,den)
plot(r,'o')  o  plot(r,'x')
```

Es instructivo dibujar los lugares de las raíces mediante las marcas `'o'` o bien `'x'`, debido a que cada polo en lazo cerrado calculado se muestra de forma gráfica; en alguna parte de los lugares de las raíces estas marcas se muestran de una forma densa y en otra parte aparecen separadas. MATLAB produce su propio conjunto de valores de ganancias que se utilizan para obtener una gráfica del lugar de las raíces. Lo consigue mediante una rutina interna de adaptación del tamaño de paso. Asimismo, MATLAB usa la característica automática de fijar la escala del eje de la orden `plot`.

EJEMPLO 6-3 Considere el sistema de control de la Figura 6-15. Dibuje el diagrama del lugar de las raíces con una razón de aspecto cuadrada para que una línea con una pendiente de 1 sea una línea realmente de 45°. Para dibujar el lugar de las raíces escoja la siguiente región:

$$-6 \leqslant x \leqslant 6, \qquad -6 \leqslant y \leqslant 6$$

donde x e y son las coordenadas del eje real y del eje imaginario, respectivamente.

Con el fin de establecer la región de la gráfica en pantalla para que sea cuadrada, introduzca la orden

```
v = [-6 6 -6 6]; axis (v); axis('square')
```

Con esta orden, una línea con una pendiente de 1 estará realmente a 45°, y no inclinada por la forma irregular de la pantalla.

Para este problema, el denominador se obtiene como un producto de términos de primer y segundo orden. Por tanto, se deben multiplicar estos términos para obtener un polinomio en s. La multiplicación de estos términos se realiza de una manera sencilla mediante la orden de convolución, tal y como se muestra a continuación.

Defina

```
a = s (s + 1):        a = [1  1  0]
b = s^2 + 4s + 16:    b = [1  4  16]
```

Después utilice la siguiente orden:

```
c = conv(a, b)
```

Observe que `conv(a, b)` proporciona el producto de dos polinomios, `a` y `b`. Observe la siguiente salida del ordenador

```
a = [1  1  0];
b = [1  4  16];
c = conv (a,b)
c =
     1  5  20  16  0
```

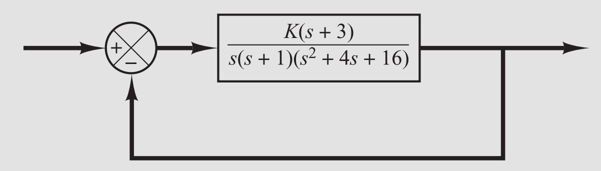


Figura 6-15. Sistema de control.

Por tanto, el polinomio del denominador es

```
den = [1  5  20  16  0]
```

Para encontrar los polos complejos conjugados en lazo abierto (las raíces de $s^2 + 4s + 16 = 0$), se utiliza la orden `roots` de la siguiente manera:

```
r = roots(b)
r =
  -2.0000 + 3.4641i
  -2.0000 - 3.4641i
```

Por tanto, el sistema tiene los siguiente ceros y polos en lazo abierto:

Ceros en lazo abierto: $s = -3$
Polos en lazo abierto: $s = 0, \quad s = -1, \quad s = -2 \pm j3.4641$

El Programa MATLAB 6-1 dibujará el lugar de las raíces para este sistema. La gráfica aparece en la Figura 6-16.

MATLAB Programa 6-1

```
% --------- Lugar de las raíces ---------
num = [1  3];
den = [1  5  20  16  0];
rlocus(num,den)
v = [-6  6  -6  6];
axis(v); axis('square')
grid;
title ('Lugar de las raíces de G(s) = K(s + 3)/[s(s + 1)(s^2 + 4s + 16)]')
```

Observe que en el Programa MATLAB 6-1 en lugar de

```
den = [1  5  20  16  0]
```

se introduce

```
den = conv ([1  1  0], [1  4  16])
```

Los resultados son los mismos.

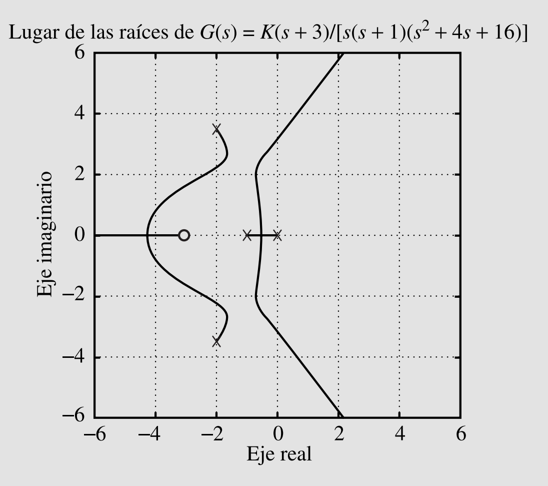


Figura 6-16. Gráfica del lugar de las raíces.

EJEMPLO 6-4 Considere el sistema cuya función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ es

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)}$$

$$= \frac{K}{s^4 + 1.1s^3 + 10.3s^2 + 5s}$$

No hay ceros en lazo abierto. Los polos en lazo abierto se localizan en $s = -0.3 + j3.1480$, $s = -0.3 - j3.1480$, $s = -0.5$ y $s = 0$.

Si se introduce en la computadora el Programa MATLAB 6-2, se obtiene la gráfica del lugar de las raíces de la Figura 6-17.

MATLAB Programa 6-2

```
% --------- Lugar de las raíces ---------
num = [1];
den = [1  1.1  10.3  5  0];
r = rlocus(num,den);
plot(r,'o')
v = [-6  6  -6  6]; axis(v)
grid
title('Lugar de las raíces de G(s) = K/[s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s+10)]')
xlabel('Eje Real')
ylabel('Eje Imag')
```

Observe que, en las regiones cerca de $x = -0.3$, $y = 2.3$ y $x = -0.3$, $y = -2.3$, dos lugares tienden uno al otro. Cabe preguntarse si estas dos ramas deben tocarse o no. Para explorar esta situación, se pueden dibujar los lugares de las raíces utilizando pequeños incrementos de K en la región crítica.

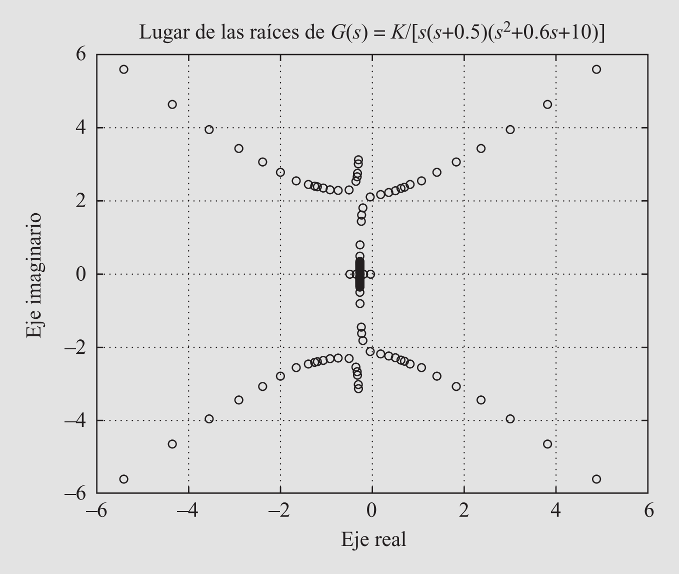


Figura 6-17. Gráfica del lugar de las raíces.

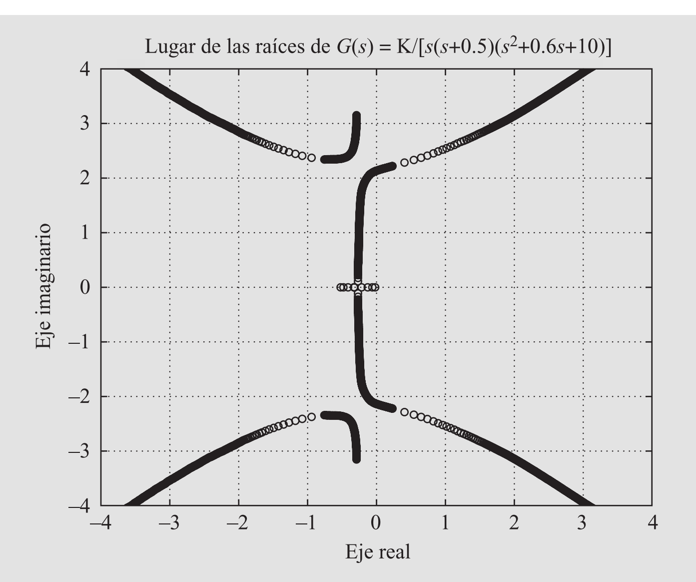


Figura 6-18. Gráfica del lugar de las raíces.

Con una aproximación convencional de prueba y error o utilizando la orden `rlocfind`, la cual se presenta más adelante en esta sección, se obtiene que la región específica de interés es $20 \leqslant K \leqslant 30$. Introduciendo el Programa MATLAB 6-3, se obtiene el lugar de las raíces que se muestra en la Figura 6-18. A partir de este gráfico, es evidente que las dos ramas que se aproximan en la mitad superior del plano (o en la mitad inferior del plano) no se tocan.

MATLAB Programa 6-3

```
% --------- Lugar de las raíces ---------
num = [1];
den = [1  1.1  10.3  5  0];
K1 = 0:0.2:20;
K2 = 20:0.1:30;
K3 = 30:5:1000;
K = [K1 K2 K3];
r = rlocus(num,den,K);
plot(r,'o')
v = [–4  4  –4  4]; axis(v)
grid
title('Lugar de las raíces de G(s) = K/[s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)]')
xlabel('Eje Real')
ylabel('Eje Imag')
```

EJEMPLO 6-5 Considere el sistema de la Figura 6-19. Las ecuaciones del sistema son

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

$$u = r - y$$

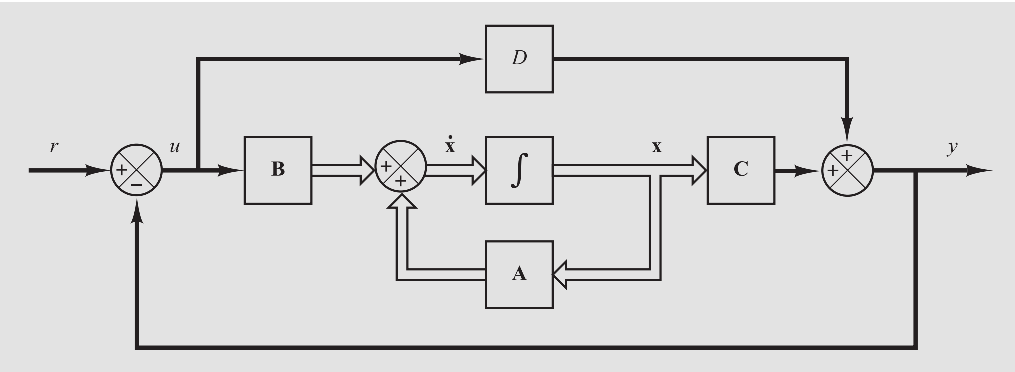


Figura 6-19. Sistema de control en lazo cerrado.

En este problema de ejemplo se obtiene el lugar de las raíces del sistema definido en el espacio de estados. Por ejemplo, se considera el caso donde las matrices **A**, **B**, **C** y D, son

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} \tag{6-15}$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \qquad D = [0]$$

El lugar de las raíces para este sistema se obtiene con MATLAB mediante la siguiente orden:

```
rlocus(A,B,C,D)
```

Esta orden producirá la misma gráfica del lugar de las raíces que se obtiene mediante la orden `rlocus(num,den)`, donde `num` y `den` se obtienen de

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D)
```

del modo siguiente:

```
num = [0  0  1  0]
den = [1  14  56  160]
```

El Programa MATLAB 6-4 generará la gráfica del lugar de las raíces de la Figura 6-20.

MATLAB Programa 6-4

```
% --------- Lugar de las raíces ---------
A = [0  1  0;0  0  1;–160  –56  –14];
B = [0;1;–14];
C = [1 0 0];
D = [0];
K = 0:0.1:400;
rlocus(A,B,C,D,K);
v = [–20  20  –20  20]; axis(v)
grid
title('Lugar de las raíces de sistema definido en el espacio de estados')
```

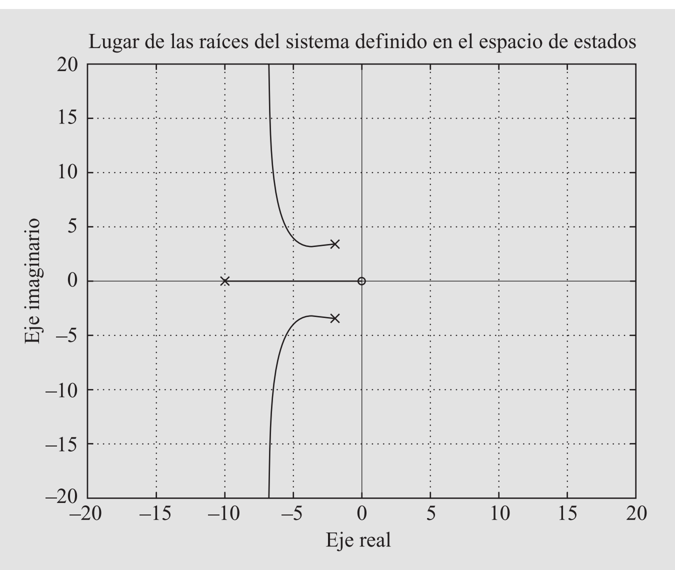


Figura 6-20. Gráfica del lugar de las raíces del sistema definido en el espacio de estados, donde **A**, **B**, **C** y *D* se obtienen de la Ecuación (6-15).

Lugares de las raíces con ζ constante y ω_n constante. Recuérdese que en el plano complejo la razón de amortiguamiento ζ de un par de polos complejos conjugados se puede expresar en función del ángulo ϕ, el cual se mide desde el eje real negativo, como se muestra en la Figura 6-21(a), con

$$\zeta = \cos \phi$$

Con otras palabras, las líneas con razón de amortiguamiento ζ constante son radiales que pasan por el origen como muestra la Figura 6-21(b). Por ejemplo, una razón de amortiguamiento de 0.5 requiere que los polos complejos se encuentren sobre una línea que pase por el origen con ángulos de $\pm 60^\circ$ con el eje real negativo. (Si la parte real de un par de polos complejos es positiva, lo que significa que el sistema es inestable, el correspondiente ζ es negativo.) La razón de amorti-

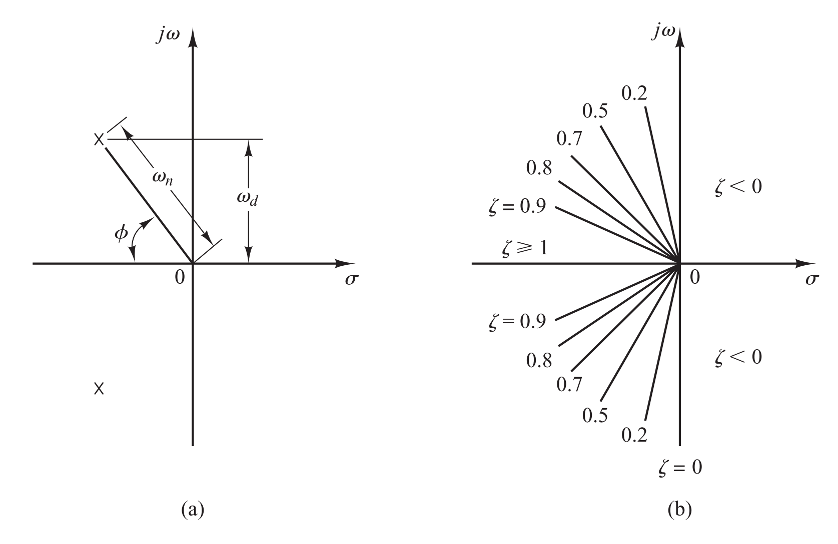


Figura 6-21. (a) Polos complejos; (b) líneas de amortiguamiento ζ constante.

guamiento determina la localización angular de los polos, mientras que la distancia del polo al origen se determina mediante la frecuencia natural no amortiguada ω_n. El lugar de las raíces para ω_n constante son círculos.

Para dibujar las líneas con constante ζ y los círculos con constante ω_n en el lugar de las raíces con MATLAB se utiliza la orden `sgrid`.

Dibujo de las rejillas polares en el lugar de las raíces. La orden

```
sgrid
```

superpone líneas de razón de amortiguamiento constante ($\zeta = 0 \sim 1$ con incremento 0.1) y círculos de ω_n constante en el dibujo del lugar de las raíces. Véase el Programa MATLAB 6-5 y el gráfico resultante en la Figura 6-22.

MATLAB Programa 6-5

```
sgrid
v = [–3  3  –3  3]; axis(v); axis('square')
title('Constant \zeta Lines and Constant \omega_n Circles')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
```

Si sólo se desean líneas para algún ζ constante en particular (por ejemplo, las líneas para $\zeta = 0.5$ y $\zeta = 0.707$) y círculos para alguna ω_n constante en particular (por ejemplo, los círculos para $\omega_n = 0.5$, $\omega_n = 1$ y $\omega_n = 2$), se utiliza la siguiente orden:

```
sgrid([0.5,  0.707],[0.5,  1,  2])
```

Si se desea superponer líneas de ζ constante y círculos de ω_n constante como los mencionados anteriormente en un lugar de las raíces de un sistema con

```
num = [0  0  0  1]
den = [1  4  5  0]
```



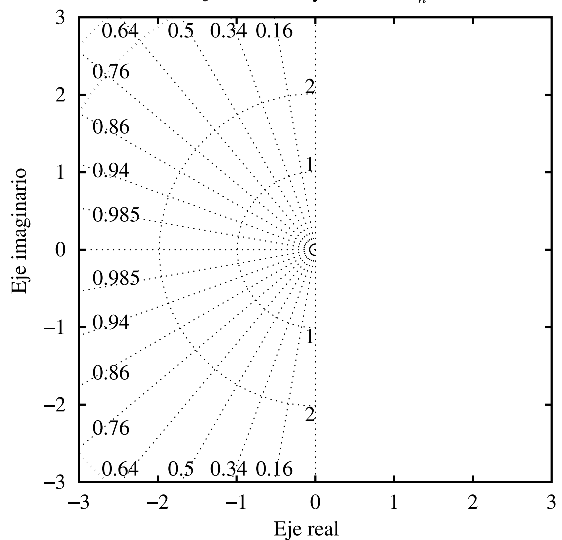


Figura 6-22. Líneas de ζ constante y círculos de ω_n constante.

introduzca el Programa MATLAB 6-6 en la computadora. El lugar de las raíces resultante se muestra en la Figura 6-23.

MATLAB Programa 6-6

```
num = [1];
den = [1  4  5  0];
K = 0:0.01:1000;
r = rlocus(num,den,K);
plot(r,'-'); v = [-3  1  -2  2]; axis(v); axis('square')
sgrid([0.5,0.707], [0.5,1,2])
grid
title('Lugar de las raíces con \Líneas = 0.5 y 0.707 zeta y \omega_n = 0.5, 1,
y 2 Círculos')
xlabel('Real Axis'); y label('Imag Axis')
gtext('\omega_n = 2')
gtext('\omega_n = 1')
gtext('\omega_n = 0.5')
%Colocar una marca 'x' en cada uno de los 3 polos en lazo abierto
gtext('x')
gtext('x')
gtext('x')
```

Si se desea eliminar todas las líneas de ζ constante o todos los círculos de ω_n constante se utilizan los corchetes vacíos [ ] en los argumentos de la orden `sgrid`. Por ejemplo, si se quiere únicamente superponer la línea de razón de amortiguamiento $\zeta = 0.5$ y ningún círculo de ω_n constante en el lugar de las raíces que se muestra en la Figura 6-23, se utiliza la orden

```
sgrid(0.5,  [])
```

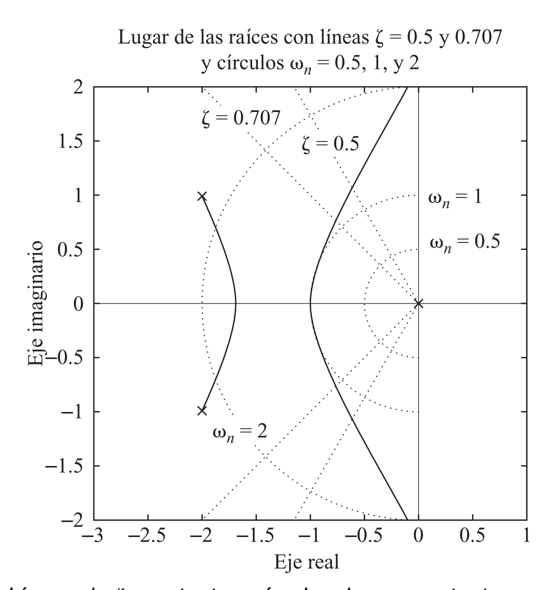


Figura 6-23. Líneas de ζ constante y círculos de ω_n constante superpuestos sobre la gráfica del lugar de las raíces.

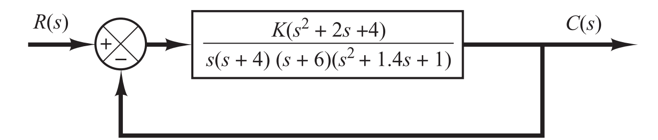


Figura 6-24. Sistemas de control.

Sistemas condicionalmente estables. Sea el sistema de realimentación negativa que se muestra en la Figura 6-24. Se puede representar el lugar de las raíces para este sistema aplicando las reglas generales y el procedimiento dado para su construcción o usar MATLAB para obtener la gráfica del lugar de las raíces. El programa MATLAB 6-7 dibujará el diagrama del lugar de las raíces para el sistema. En la Figura 6-25 se muestra la gráfica.

MATLAB Programa 6-7

```
num = [1  2  4];
den = conv(conv([1  4  0],[1  6]),[1  1.4  1]);
rlocus(num, den);
v = [-7  3  -5  5]; axis(v); axis('square')
grid
title('Lugar de las raíces
de G(s) = K(s^2 + 2s + 4)/[s(s + 4)(s + 6)(s^2 + 1.4s + 1)]')
text(1.0,0.55,'K = 12')
text(1.0,3.0,'K = 73')
text(1.0,4.15,'K = 154')
```

Se puede ver del diagrama del lugar de las raíces de la Figura 6-25 que este sistema es solo estable para rangos limitados del valor de K —que es $0 < K < 12$ y $73 < K < 154$. El sistema se hace inestable para $12 < K < 73$ y $154 < K$. (Si K toma un valor que corresponde a operación inestable, el sistema se puede deteriorar o hacerse no lineal debido a una no linealidad de saturación que pueda existir.) Tal sistema se llama condicionalmente estable.

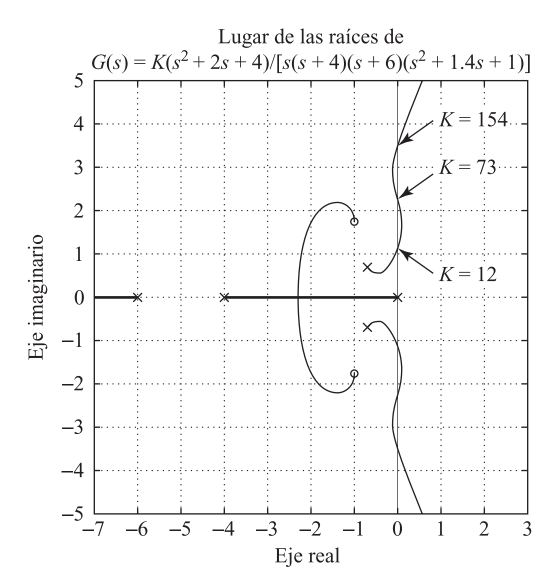


Figura 6-25. Lugar de las raíces de un sistema condicionalmente estable.

En la práctica, los sistemas condicionalmente estables no son deseables. La estabilidad condicional es peligrosa pero ocurre en ciertos sistemas —en particular, un sistema que tiene un camino directo inestable. Este camino directo inestable puede ocurrir si el sistema tiene un lazo menor. Es aconsejable evitar tal estabilidad condicional ya que si por cualquier razón la ganancia cae por debajo del valor crítico, el sistema se hace inestable. Obsérvese que la adición de una red de compensación adecuada eliminará la estabilidad condicional. [Si se añade un cero el lugar de las raíces se doblará hacia la izquierda. (Véase la Sección 6-5.) Por lo tanto la estabilidad condicional se puede eliminar introduciendo una compensación adecuada.]

Sistemas de fase no mínima. Si todos los polos y ceros de un sistema se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s, el sistema se denomina de fase mínima. Si un sistema tiene al menos un polo o un cero en el semiplano derecho del plano s, el sistema se considera de fase no mínima. El término de fase no mínima proviene de las características de cambio de fase de tal sistema cuando está sujeto a entradas sinusoidales.

Considérese el sistema de la Figura 6-26(a). Para este sistema,

$$G(s) = \frac{K(1 - T_a s)}{s(Ts + 1)} \qquad (T_a > 0), \qquad H(s) = 1$$

Este es un sistema de fase no mínima, debido a que hay un cero en el semiplano derecho del plano s. Para este sistema, la condición de ángulo se convierte en

$$\begin{aligned} \angle G(s) &= \angle -\frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} \\ &= \angle \frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} + 180^\circ \\ &= \pm 180^\circ(2k + 1) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

o bien

$$\angle \frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} = 0^\circ \tag{6-16}$$

Los lugares de las raíces se obtienen a partir de la Ecuación (6-16). La Figura 6-26(b) muestra una gráfica del lugar de las raíces para este sistema. A partir del diagrama, se observa que el sistema es estable si la ganancia K es menor que $1/T_a$.

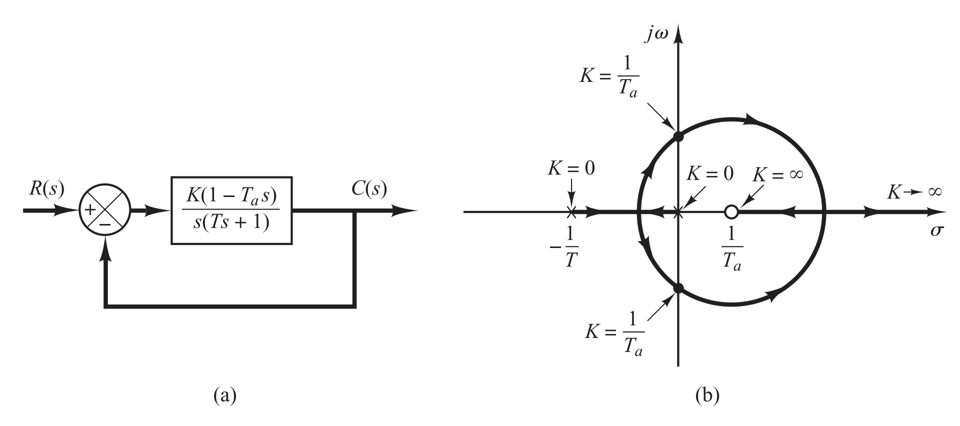


Figura 6-26 (a) Sistema de fase no mínima; (b) gráfica del lugar de las raíces.

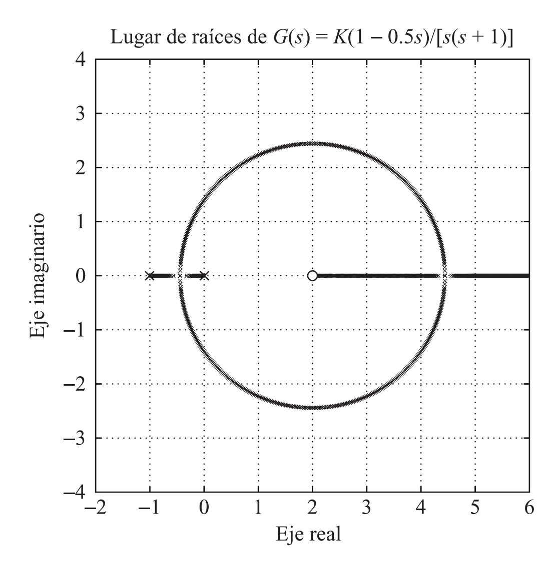


Figura 6-27. Gráfica del lugar de las raíces de $G(s) = \dfrac{K(1 - 0.5s)}{s(s+1)}$.

Para obtener el lugar de las raíces con MATLAB, introduzca el numerador y denominador como siempre. Por ejemplo, si $T = 1$ seg y $T_a = 0.5$ seg introduzca el siguiente numerador y denominador en el programa:

```
num = [-0.5  1]

den = [1  1  0]
```

El programa MATLAB 6-8 proporciona el lugar de las raíces que se muestra en la Figura 6-27.

MATLAB Programa 6-8

```
num = [-0.5  1];
den = [1  1  0];
k1 = 0:0.01:30;
k2 = 30:1:100;
K3 = 100:5:500;
K = [k1 k2 k3];
rlocus(num,den,K)
v = [-2  6  -4  4]; axis(v); axis('square')
grid
title('Lugar de las raíces de G(s) = K(1 - 0.5s)/[s(s + 1)]')
%Colocar una marca 'x' en cada uno de los 2 polos en lazo abierto
%Colocar una marca 'o' en el cero en lazo abierto
gtext('x')
gtext('x')
gtext('o')
```

Ortogonalidad de los lugares de las raíces y los lugares de ganancia constante. Considérese el sistema cuya función de transferencia en lazo abierto es $G(s)H(s)$. En el plano $G(s)H(s)$, los lugares de $|G(s)H(s)|$ = una constante son círculos con centro en el origen y los lugares correspondientes $\underline{/G(s)H(s)} = \pm 180^\circ(2k + 1)(k = 0, 1, 2, ...)$ se encuentran sobre el eje

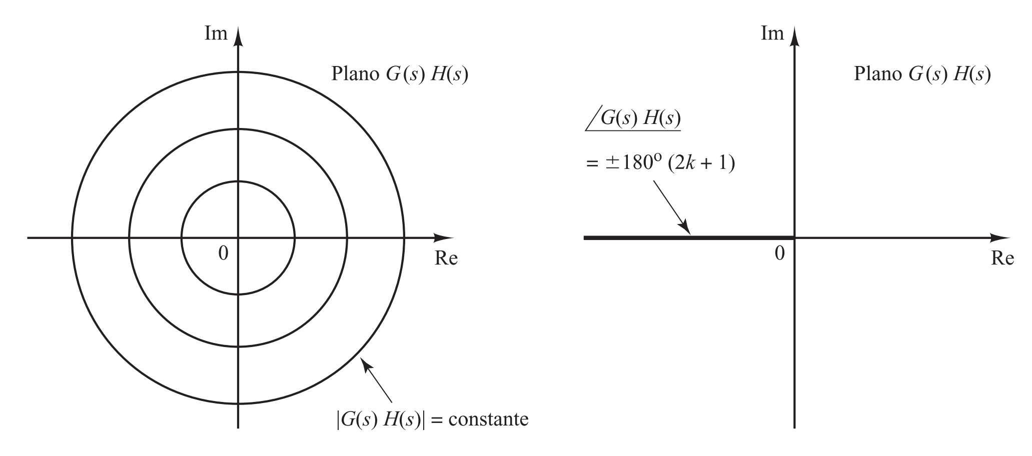


Figura 6-28 Gráficas de los lugares de las raíces de ganancia constante y de fase constante en el plano $G(s)H(s)$.

real negativo del plano $G(s)H(s)$, como se aprecia en la Figura 6-28. [Obsérvese que el plano complejo empleado aquí no es el plano s, sino el plano $G(s)H(s)$.]

Los lugares de las raíces y los lugares de ganancia constante en el plano s son mapeos de los lugares de $\angle G(s)H(s) = \pm 180^{\circ}(2k+1)$ y de $|G(s)H(s)| =$ una constante, en el plano $G(s)H(s)$.

Debido a que los lugares de fase constante y de ganancia constante en el plano $G(s)H(s)$ son ortogonales, los lugares de las raíces y los lugares de ganancia constante en el plano s son ortogonales. La Figura 6-29(a) muestra los lugares de las raíces y los lugares de ganancia constante para el sistema siguiente:

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 3}, \qquad H(s) = 1$$

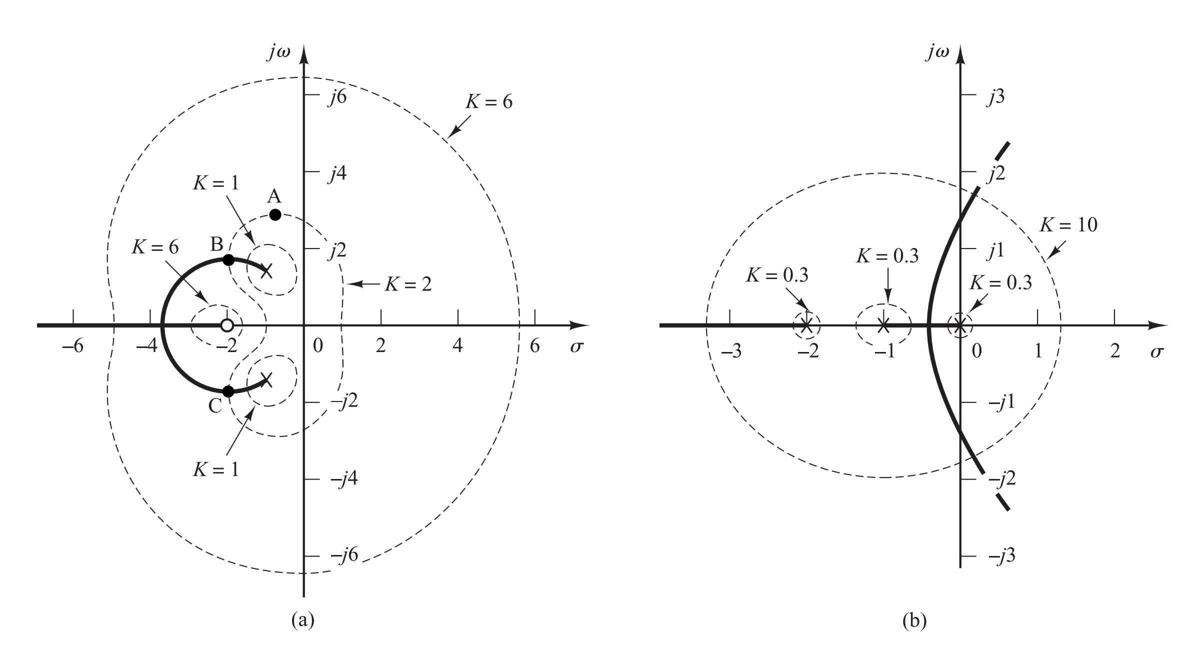


Figura 6-29. Gráficas de los lugares de las raíces y los lugares de ganancia constante. (a) Sistema con $G(s) = K(s+2)/(s^2 + 2s + 3)$, $H(s) = 1$; (b) sistema con $G(s) = K/[s(s+1)(s+2)]$, $H(s) = 1$.

Obsérvese que, como la configuración de polos y ceros es simétrica con respecto al eje real, los lugares de ganancia constante también son simétricos con respecto al mismo eje.

La Figura 6-29(b) muestra los lugares de las raíces y los lugares de ganancia constante para el sistema:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \qquad H(s) = 1$$

Obsérvese que, como la configuración de los polos en el plano s es simétrica con respecto al eje real y la línea paralela hacia el eje imaginario que pasa a través del punto ($\sigma = -1$, $\omega = 0$), los lugares de ganancia constante son simétricos con respecto a la línea $\omega = 0$ (eje real) y la línea $\sigma = -1$.

De las Figuras 6-29(a) y (b), obsérvese que cada punto en el plano s tiene su correspondiente valor de K. Si se utiliza la orden `rlocfind` (presentada a continuación), MATLAB dará el valor de K de un punto determinado y los polos en lazo cerrado más próximos correspondientes a ese valor de K.

Localización del valor de la ganancia *K* en un punto arbitrario en el lugar de las raíces. En el análisis de sistemas en lazo cerrado con MATLAB, a menudo se quiere encontrar el valor de la ganancia K en un punto arbitrario sobre el lugar de las raíces. Esto se puede realizar con la orden rlocfind:

```
[K,r] = rlocfind(num, den)
```

La orden rlocfind, que debe seguir a la orden rlocus, superpone unas coordenadas *x-y* móviles sobre la pantalla. Mediante el ratón, se localiza el origen de las coordenadas *x-y* sobre el punto deseado del lugar de las raíces, y se pulsa el botón del ratón. A continuación MATLAB visualiza por pantalla las coordenadas de ese punto, el valor de la ganancia en ese punto y los polos en lazo cerrado correspondientes a ese valor de la ganancia.

Si el punto seleccionado no se encuentra sobre el lugar de las raíces, tal como el punto A en la Figura 6-29(a), la orden rlocfind devuelve las coordenadas del punto seleccionado, el valor de la ganancia de ese punto, tal como $K = 2$, y las localizaciones de los polos en lazo cerrado, tales como los puntos B y C correspondientes a ese valor de K. [Observe que cada punto en el plano s tiene un valor de ganancia. Véase, por ejemplo, las Figuras 6-29(a) y (b).]

6-4 Lugar de las raíces de sistemas con realimentación positiva

Lugares de las raíces para sistemas con realimentación positiva*. En un sistema de control complejo puede haber un lazo interno con realimentación positiva como el de la Figura 6-30. Por lo general, un lazo semejante se estabiliza mediante el lazo externo. A continuación se centrará la atención únicamente en el lazo interno de realimentación positiva. La función de transferencia en lazo cerrado del lazo interno es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$

La ecuación característica es

$$1 - G(s)H(s) = 0 \tag{6-17}$$

* Referencia W-4

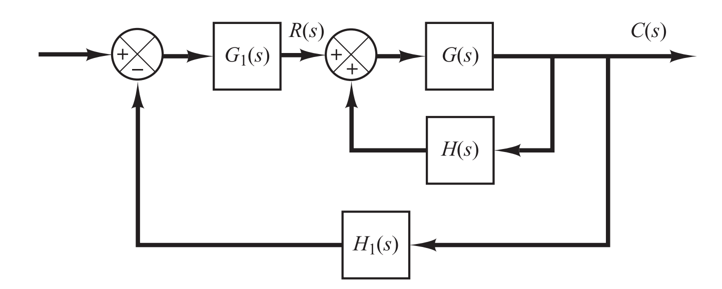


Figura 6-30. Sistema de control.

Esta ecuación se despeja de forma parecida a como se hizo el desarrollo del método del lugar de las raíces de la Sección 6-2. Sin embargo, debe cambiarse la condición de ángulo.

La Ecuación (6-17) se escribe como

$$G(s)H(s) = 1$$

que es equivalente a las dos ecuaciones siguientes:

$$\underline{/G(s)H(s)} = 0^{\circ} \pm k360^{\circ} \qquad (k = 0, 1, 2, ...)$$

$$|G(s)H(s)| = 1$$

La suma total de todos los ángulos a partir de los polos y ceros en lazo abierto debe ser igual a $0^{\circ} \pm k360^{\circ}$. Por tanto, el lugar de las raíces ocupa un lugar de 0°, en contraste con el lugar de 180° que se consideró antes. La condición de magnitud no cambia.

Para ilustrar la gráfica del lugar de las raíces para el sistema con realimentación positiva, se utilizarán como ejemplo las siguientes funciones de transferencia $G(s)$ y $H(s)$.

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}, \qquad H(s) = 1$$

Se supone que la ganancia K es positiva.

Las reglas generales para construir los lugares de las raíces que se vieron en la Sección 6-2 deben modificarse de la forma siguiente:

La regla 2 se modifica del modo siguiente: si el número total de polos reales y ceros reales a la derecha de un punto de prueba sobre el eje real es un número par, este punto de prueba se encuentra en el lugar de las raíces.

La regla 3 se modifica del modo siguiente:

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm k360^{\circ}}{n - m} \qquad (k = 0, 1, 2, ...)$$

donde n = número de polos finitos de $G(s)H(s)$

m = número de ceros finitos de $G(s)H(s)$

La regla 5 se modifica del modo siguiente: cuando se calcula el ángulo de salida (o el ángulo de llegada) a partir de un polo complejo en lazo abierto (o de un cero complejo), se deben restar de 0° la suma de todos los ángulos de los vectores que parten de todos los otros polos y ceros hacia el polo complejo (o el cero complejo) en cuestión, incluyendo los signos adecuados.

Las otras reglas para construir la gráfica del lugar de las raíces no cambian. Ahora se aplicarán las reglas modificadas para construir la gráfica del lugar de las raíces.

1. Dibuje en el plano complejo los polos ($s = -1 + j$, $s = -1 - j$, $s = -3$) y cero ($s = -2$) en lazo abierto. A medida que K aumenta de 0 a ∞, los polos en lazo cerrado empiezan en los polos en lazo abierto y terminan en los ceros en lazo abierto (finitos o infinitos), igual que en el caso de los sistemas con realimentación negativa.

2. Determine los lugares de las raíces sobre el eje real. Existen lugares de las raíces sobre el eje real entre -2 y $+\infty$ y entre -3 y $-\infty$.

3. Determine las asíntotas de los lugares de las raíces. Para el sistema actual,

$$\text{Ángulo de la asíntota} = \frac{\pm k360^\circ}{3-1} = \pm 180^\circ$$

Esto significa simplemente que las asíntotas están sobre el eje real.

4. Determine los puntos de ruptura y de ingreso. Como la ecuación característica es

$$(s+3)(s^2+2s+2) - K(s+2) = 0$$

se obtiene

$$K = \frac{(s+3)(s^2+2s+2)}{s+2}$$

Diferenciando K con respecto a s, se obtiene

$$\frac{dK}{ds} = \frac{2s^3 + 11s^2 + 20s + 10}{(s+2)^2}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} 2s^3 + 11s^2 + 20s + 10 &= 2(s+0.8)(s^2+4.7s+6.24) \\ &= 2(s+0.8)(s+2.35+j0.77)(s+2.35-j0.77) \end{aligned}$$

El punto $s = -0.8$ está en el lugar de las raíces. Como este punto se encuentra entre dos ceros (un cero finito y un cero infinito), es un punto de ingreso real. Los puntos $s = -2.35 \pm j0.77$ no satisfacen la condición de ángulo y, por tanto, no son puntos de ruptura ni de ingreso.

5. Encuentre el ángulo de salida del lugar de las raíces a partir de un polo complejo. Para el polo complejo en $s = -1 + j$, el ángulo de salida θ es

$$\theta = 0^\circ - 27^\circ - 90^\circ + 45^\circ$$

o bien

$$\theta = -72^\circ$$

(El ángulo de salida del polo complejo $s = -1 - j$ es 72°.)

6. Seleccione un punto de prueba en la proximidad del eje $j\omega$ y el origen, y aplique la condición de ángulo. Localice un número suficiente de puntos que satisfagan la condición de ángulo.

La Figura 6-31 muestra los lugares de las raíces para el sistema con realimentación positiva actual. Los lugares de las raíces aparecen con líneas y una curva punteadas.

Obsérvese que, si

$$K > \left. \frac{(s+3)(s^2+2s+2)}{s+2} \right|_{s=0} = 3$$

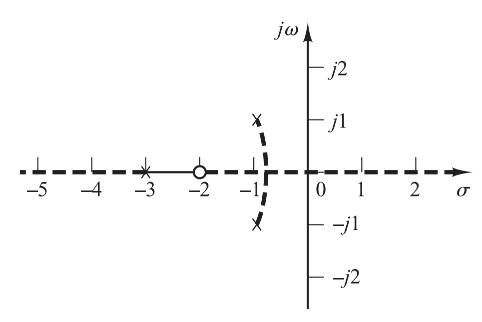


Figura 6-31. Gráfica del lugar de las raíces para un sistema de realimentación negativa con $G(s) = K(s + 2)/[(s + 3)(s^2 + 2s + 2)]$, $H(s) = 1$.

una raíz real se introduce en el semiplano derecho del plano s. Por tanto, para valores de K mayores que 3, el sistema se vuelve inestable. (Para $K > 3$, el sistema debe estabilizarse con un lazo externo.)

Obsérvese que la función de transferencia en lazo cerrado para el sistema con realimentación positiva se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} = \frac{K(s + 2)}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2) - K(s + 2)}$$

Para comparar esta gráfica del lugar de las raíces con la del sistema con realimentación negativa correspondiente, se muestran en la Figura 6-32 los lugares de las raíces para el sistema con realimentación negativa cuya función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + 2)}{(s + 3)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 2)}$$

La Tabla 6-2 muestra varias gráficas del lugar de las raíces de sistemas con realimentación negativa y positiva. Las funciones de transferencia en lazo cerrado se obtienen mediante

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 + GH}, \qquad \text{para sistemas con realimentación negativa}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 - GH}, \qquad \text{para sistemas con realimentación positiva}$$

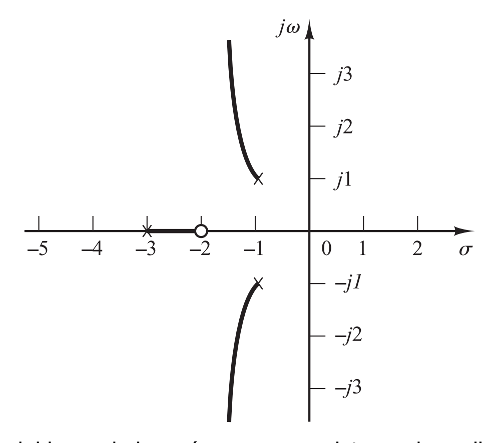
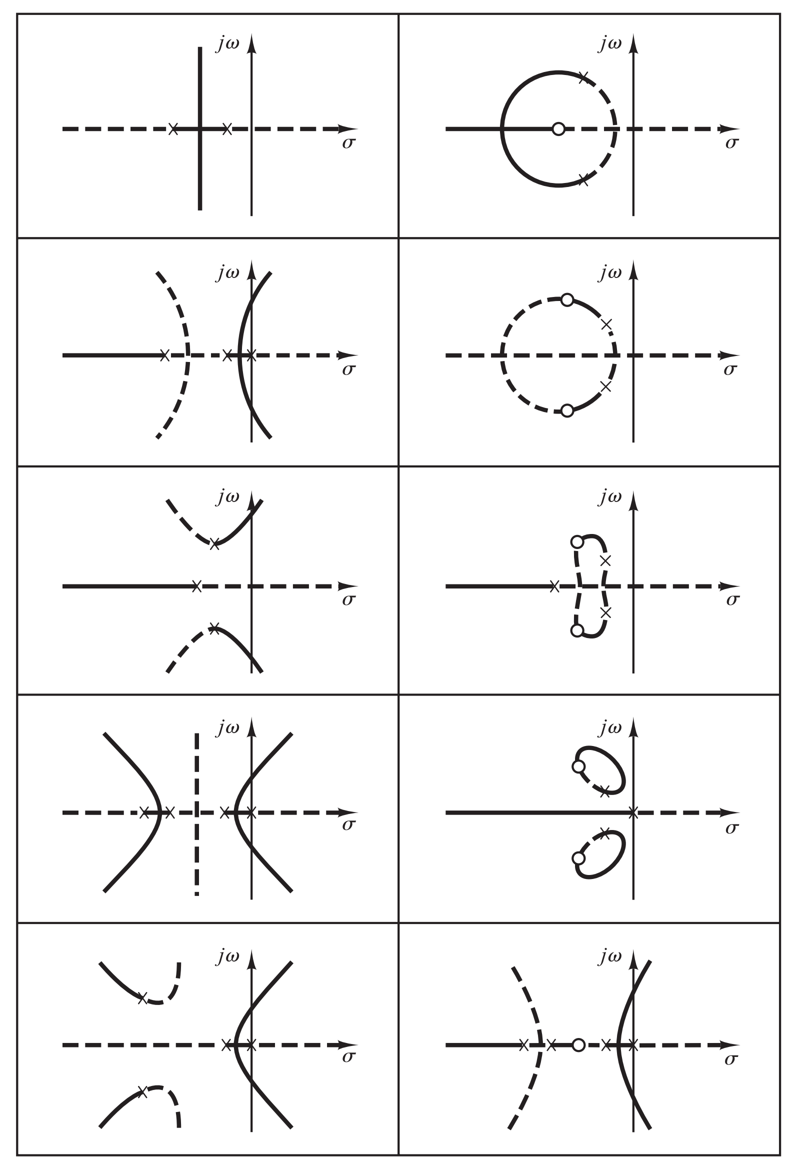


Figura 6-32. Gráfica del lugar de las raíces para un sistema de realimentación negativa con $G(s) = K(s + 2)/[(s + 3)(s^2 + 2s + 2)]$, $H(s) = 1$.

donde *GH* es la función de transferencia en lazo abierto. En la Tabla 6-2, los lugares de las raíces para los sistemas con realimentación negativa se dibujan con líneas y curvas gruesas y los de los sistemas con realimentación positiva se dibujan con líneas y curvas discontinuas.

Tabla 6-2. Gráficas de lugares de las raíces de sistemas con realimentación negativa y positiva.



Las líneas y curvas gruesas corresponden a los sistemas con realimentación negativa; las líneas y curvas discontinuas corresponden a los sistemas con realimentación positiva.

6-5 Diseño de sistemas de control mediante el método del lugar de las raíces

Consideración preliminar de diseño. En la construcción de un sistema de control, sabemos que una modificación adecuada de la dinámica de la planta puede ser una forma sencilla de cumplir las especificaciones de comportamiento. Esto sin embargo puede que no sea posible en muchas situaciones prácticas ya que la planta está fijada y no es modificable. En estos casos se deben ajustar otros parámetros distintos a los de la planta. En este texto, se supone que la planta está dada y es inalterable.

En la práctica, el lugar de las raíces de un sistema puede indicar que no se puede lograr el comportamiento deseado simplemente modificando la ganancia (o algún otro parámetro ajustable). De hecho, en algunos casos, el sistema puede no ser estable para todos los valores de la ganancia (o de otro parámetro ajustable). Entonces es necesario modificar el lugar de las raíces para cumplir las especificaciones de comportamiento.

El problema de diseño, se convierte en mejorar el comportamiento del sistema mediante la inserción de un compensador. La compensación de un sistema de control se reduce al diseño de un filtro cuyas características tienden a compensar las características no deseables e inalterables de la planta.

Diseño mediante el lugar de las raíces. El diseño por el método del lugar de las raíces se basa en redibujar el lugar de las raíces del sistema añadiendo polos y ceros a la función de transferencia en lazo abierto del sistema y hacer que el lugar de las raíces pase por los polos en lazo cerrado deseados en el plano s. La característica del diseño del lugar de las raíces es que se basa en la hipótesis de que el sistema en lazo cerrado tiene un par de polos dominantes. Esto significa que los efectos de los ceros y polos adicionales no afectan mucho a las características de la respuesta.

Cuando se diseña un sistema de control, si se requiere un ajuste de la ganancia (o de cualquier otro parámetro), se deben modificar los lugares de las raíces originales introduciendo un compensador adecuado. Una vez comprendidos los efectos de la adición de los polos y/o ceros sobre el lugar de las raíces, se pueden determinar con facilidad las localizaciones de los polos y los ceros del compensador para volver a construir el lugar de las raíces como se desee. En esencia, en el diseño realizado mediante el método del lugar de las raíces, los lugares de las raíces del sistema se vuelven a construir mediante la utilización de un compensador, con el fin de poder colocar un par de polos dominantes en lazo cerrado en la posición deseada.

Compensación en serie y compensación en paralelo (o mediante realimentación). Las Figuras 6-33(a) y (b) muestran los diagramas de compensación que suelen utilizarse para los sistemas de control realimentados. La Figura 6-33(a) muestra la configuración en la que el compensador $G_c(s)$ se coloca en serie con la planta. Este esquema se denomina *compensación en serie*.

Una alternativa a la compensación en serie es la realimentación de las señales de algunos elementos y la colocación de un compensador en el camino de realimentación interno resultante, tal y como se muestra en la Figura 6-33(b). Esta compensación se denomina compensación en paralelo o compensación mediante realimentación.

Al compensar los sistemas de control, se observa que, por lo general, el problema se reduce a un diseño apropiado de un compensador en serie o en paralelo. La elección entre la compensación en serie y la compensación en paralelo depende de la naturaleza de las señales del sistema, los niveles de potencia en los diferentes puntos, los componentes disponibles, la experiencia del diseñador, las consideraciones económicas, etc.

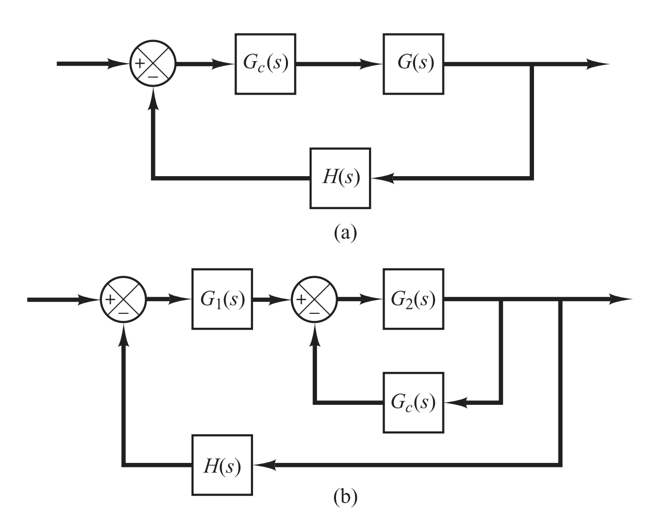


Figura 6-33. (a) Compensación en serie; (b) compensación en paralelo o mediante realimentación.

En general, la compensación en serie es más sencilla que la compensación en paralelo; sin embargo, la compensación en serie frecuentemente requiere amplificadores adicionales para incrementar la ganancia y/u ofrecer un aislamiento. (Para evitar la disipación de potencia, el compensador en serie se introduce en el punto de energía más bajo en el camino directo.) Obsérvese que, en general, el número de componentes requeridos en la compensación en paralelo será menor que el número de componentes de la compensación en serie, siempre y cuando se tenga una señal adecuada, debido a que la transferencia de energía va de un nivel de potencia más alto a un nivel más bajo. (Esto significa que tal vez no se necesiten amplificadores adicionales.)

En las Secciones 6-6 a 6-9 se analiza en primer lugar las técnicas de la compensación en serie y luego la compensación en paralelo utilizando el diseño de un sistema de control con realimentación de velocidad.

Compensadores utilizados normalmente. Si se necesita un compensador para cumplir las especificaciones de comportamiento, el diseñador debe realizar un dispositivo físico que tenga incorporada la función de transferencia del compensador.

A estos efectos, se han utilizado numerosos dispositivos físicos. De hecho, en la literatura encuentran muchas ideas útiles para construir físicamente los compensadores.

Si una entrada sinusoidal se aplica a la entrada de una red, y la salida en estado estacionario (que también es sinusoidal) tiene un adelanto de fase, la red se denomina red de adelanto. (La magnitud del ángulo de adelanto de fase es una función de la frecuencia de entrada.) Si la salida en estado estacionario tiene un retardo de fase, la red se denomina red de retardo. En una red de retardo-adelanto, ocurren tanto un retardo de fase como un adelanto de fase en la salida pero en diferentes regiones de frecuencia; el retardo de fase se produce en la región de baja frecuencia y el adelanto de fase en la región de alta frecuencia. Un compensador que tenga la característica de una red de adelanto, una red de retardo o una red de retardo-adelanto se denomina compensador de adelanto, compensador de retardo o compensador de retardo-adelanto, respectivamente.

Entre los muchos tipos de compensadores, los que más se utilizan son los compensadores de adelanto, los de retardo, los de retardo-adelanto y los de realimentación de velocidad (tacómetros). En este capítulo se limitará el análisis a estos tipos. Los compensadores de adelanto, de retardo y de retardo-adelanto pueden ser dispositivos electrónicos (como, por ejemplo, circuitos que usen amplificadores operacionales) o redes *RC* (eléctricas, mecánicas, neumáticas, hidráulicas o una combinación de ellas) y amplificadores.

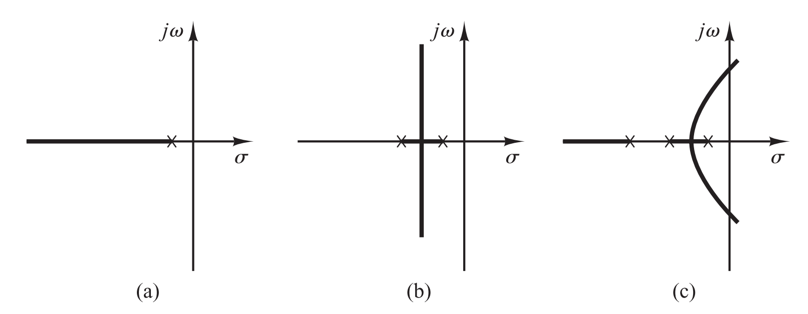


Figura 6-34. (a) Gráfica del lugar de las raíces del sistema de un solo polo; (b) gráfica del lugar de las raíces de un sistema de dos polos; (c) gráfica del lugar de las raíces de un sistema con tres polos.

Frecuentemente los compensadores serie que se utilizan en los sistemas de control son los compensadores de adelanto, retardo y retardo-adelanto. Los controladores PID que se emplean normalmente en los sistemas de control industriales se analizan en el Capítulo 8.

Se observa que al diseñar un sistema de control por los métodos del lugar de las raíces o de la respuesta en frecuencia el resultado final no es único, ya que la mejor solución o solución óptima puede no estar definida de forma precisa si se dan las especificaciones en el dominio del tiempo o de la frecuencia

Efectos de la adición de polos. La adición de un polo a la función de transferencia en lazo abierto tiene el efecto de desplazar el lugar de las raíces a la derecha, lo cual tiende a disminuir la estabilidad relativa del sistema y el tiempo de asentamiento de la respuesta. (Recuérdese que la adición del control integral añade un polo en el origen, lo cual hace que el sistema se vuelva menos estable.) La Figura 6-34 muestra ejemplos de los lugares de las raíces que presentan el efecto de la adición de uno o dos polos a un sistema de un único polo.

Efectos de la adición de ceros. La adición de un cero a la función de transferencia en lazo abierto tiene el efecto de desplazar el lugar de las raíces hacia la izquierda, lo cual tiende a

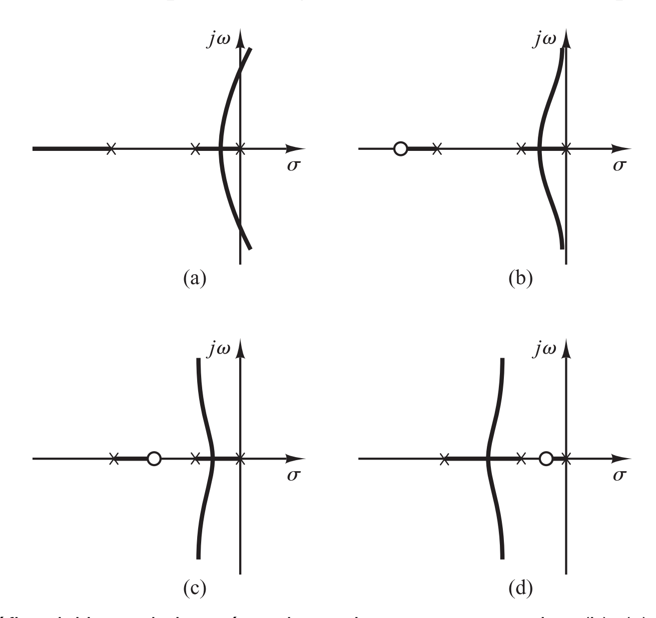


Figura 6-35. (a) Gráfica del lugar de las raíces de un sistema con tres polos; (b), (c) y (d) gráficas del lugar de las raíces que muestran los efectos de la adición de un cero al sistema de tres polos.

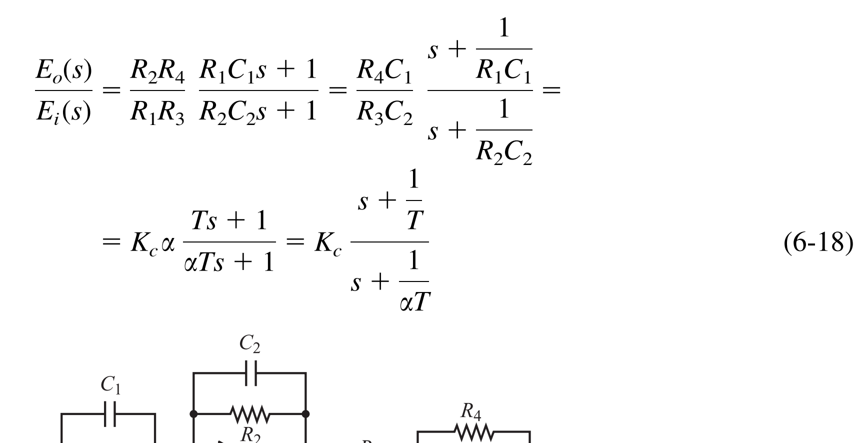
hacer el sistema más estable, y se acelera el tiempo de asentamiento de la respuesta. (Físicamente, la adición de un cero en la función de transferencia del camino directo significa agregar al sistema un control derivativo. El efecto de este control es introducir un grado de anticipación al sistema y acelerar la respuesta transitoria.) La Figura 6-35(a) muestra los lugares de las raíces para un sistema estable con una ganancia pequeña, pero inestable con una ganancia grande. Las Figuras 6-35(b), (c) y (d) muestran las gráficas del lugar de las raíces para el sistema cuando se añade un cero a la función de transferencia en lazo abierto. Obsérvese que, cuando se agrega un cero al sistema de la Figura 6- 35(a), este se vuelve estable para todos los valores de la ganancia.

6-6 Compensación de adelanto

En la Sección 6-5 presentamos una introducción a la compensación de sistemas de control y analizamos cierto material preliminar del método del lugar de las raíces para el diseño y compensación de sistemas de control. En esta sección estudiaremos el diseño de sistemas de control utilizando la técnica de la compensación por adelanto. Al efectuar el diseño de un sistema de control, colocamos un compensador en serie con la función de transferencia inalterable $G(s)$ para obtener la conducta deseada. El problema principal entonces se convierte en hacer una elección juiciosa de los polos y ceros del compensador $G_c(s)$ para tener los polos en lazo cerrado dominantes en las posiciones deseadas en el plano-s de forma que se cumplan las especificaciones de comportamiento.

Compensadores de adelanto y compensadores de retardo. Existen muchas formas de obtener compensadores de adelanto en tiempo continuo (o analógicos), como, por ejemplo, las redes electrónicas que usan amplificadores operacionales, redes RC eléctricas y sistemas de amortiguadores mecánicos.

La Figura 6-36 muestra un circuito electrónico que utiliza amplificadores operacionales. La función de transferencia para este circuito se obtuvo en el Capítulo 3 del modo siguiente [véase Ecuación (3-36)]:



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2R_4}{R_1R_3}\,\frac{R_1C_1s+1}{R_2C_2s+1} = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}\,\frac{s+\dfrac{1}{R_1C_1}}{s+\dfrac{1}{R_2C_2}} =$$

$$= K_c\alpha\,\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c\,\frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\alpha T}} \tag{6-18}$$

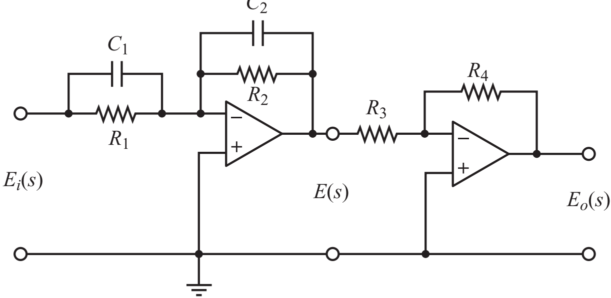


Figura 6-36. Circuito electrónico que consiste en una red de adelanto si $R_1C_1 > R_2C_2$ una red de atraso si $R_1C_1 < R_2C_2$.

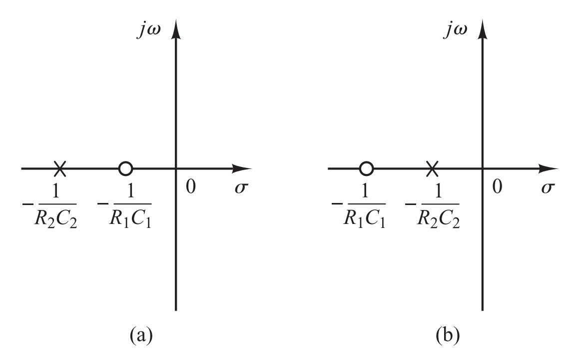


Figura 6-37. Configuraciones de polos y ceros: (a) red de adelanto; (b) red de retardo.

donde

$$T = R_1C_1, \qquad \alpha T = R_2C_2, \qquad K_c = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}$$

Obsérvese que

$$K_c\alpha = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}\,\frac{R_2C_2}{R_1C_1} = \frac{R_2R_4}{R_1R_3}, \qquad \alpha = \frac{R_2C_2}{R_1C_1}$$

Esta red tiene una ganancia en continuo de $K_c\alpha = R_2R_4/(R_1R_3)$.

A partir de la Ecuación (6-18) se observa que esta es una red de adelanto si $R_1C_1 > R_2C_2$ o $\alpha < 1$ y una red de retardo si $R_1C_1 < R_2C_2$. Las configuraciones de polos y ceros de esta red cuando $R_1C_1 > R_2C_2$ y $R_1C_1 < R_2C_2$, se muestran en las Figuras 6-37(a) y (b), respectivamente.

Técnicas de compensación de adelanto basadas en el método del lugar de las raíces. El método del lugar de las raíces es muy poderoso en el diseño cuando se incorporan las especificaciones en términos de las cantidades en el dominio del tiempo, tales como el factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural no amortiguada de los polos dominantes en lazo cerrado, la sobreelongación máxima, el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento.

Considérese un problema de diseño tal que el sistema original sea inestable para todos los valores de la ganancia o estable pero con características no deseables de la respuesta transitoria. En este caso, es necesario volver a construir el lugar de las raíces en la proximidad del eje $j\omega$ y del origen para que los polos dominantes en lazo cerrado estén en posiciones deseadas en el plano complejo. Este problema se soluciona introduciendo un compensador de adelanto adecuado en cascada con la función de transferencia del camino directo.

Los procedimientos para diseñar un compensador de adelanto para el sistema de la Figura 6-38 mediante el método del lugar de las raíces se plantean del modo siguiente:

1. A partir de las especificaciones de comportamiento, determine la localización deseada para los polos dominantes en lazo cerrado.

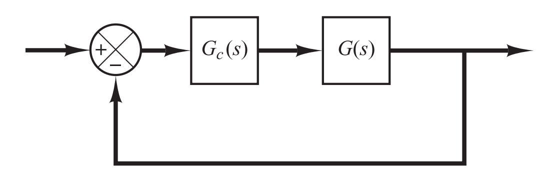


Figura 6-38. Sistema de control.

2. Por medio de una gráfica del lugar de las raíces del sistema sin compensar (sistema original), compruebe si el ajuste de la ganancia puede o no por sí solo proporcionar los polos en lazo cerrado adecuados. Si no, calcule la deficiencia de ángulo ϕ. Este ángulo debe ser una contribución del compensador de adelanto si el nuevo lugar de las raíces va a pasar por las localizaciones deseadas para los polos dominantes en lazo cerrado.

3. Suponga que el compensador de adelanto $G_c(s)$ es

$$G_c(s) = K_c\alpha\,\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c\,\frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\alpha T}}, \qquad (0 < \alpha < 1)$$

donde α y T se determinan a partir de la deficiencia de ángulo. K_c se determina a partir del requisito de la ganancia en lazo abierto.

4. Si no se especifican las constantes de error estático, determine la localización del polo y del cero del compensador de adelanto, para que el compensador de adelanto contribuya al ángulo ϕ necesario. Si no se imponen otros requisitos sobre el sistema, intente aumentar el valor de α lo más que pueda. Un valor más grande de α, generalmente, proporciona un valor más grande de K_v, lo que es deseable. Obsérvese que

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = K_c\alpha \lim_{s\to 0} sG_c(s)$$

5. Determine el valor de la K_c del compensador de adelanto a partir de la condición de magnitud.

Una vez diseñado un compensador, debe verificarse que se han cumplido todas las especificaciones de comportamiento. Si el sistema no cumple las especificaciones de comportamiento, debe repetirse el procedimiento de diseño ajustando el polo y el cero del compensador hasta cumplir con todas las especificaciones. Si se requiere de una constante de error estático grande, se debe introducir en cascada una red de retardo o convertir el compensador de adelanto en un compensador de retardo-adelanto.

Obsérvese que, si los polos dominantes en lazo cerrado que se han seleccionado no son realmente dominantes, será necesario modificar la situación del par de polos dominantes en lazo cerrado seleccionados. (Los polos en lazo cerrado diferentes de los dominantes modifican la respuesta obtenida de los polos dominantes en lazo cerrado. El grado de modificación depende de la localización de los polos en lazo cerrado restantes.) Asimismo, los ceros en lazo cerrado afectan a la respuesta si se sitúan cerca del origen.

EJEMPLO 6-6 Considere el sistema de control de posición de la Figura 6-39(a). La función de transferencia del camino directo es

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

La gráfica del lugar de las raíces para este sistema se muestra en la Figura 6-39(b). La función de transferencia en lazo cerrado para el sistema es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2+s+10} = \frac{10}{(s+0.5+j3.1225)(s+0.5-j3.1225)}$$

Los polos en lazo cerrado se localizan en

$$s = -0.5 \pm j3.1225$$

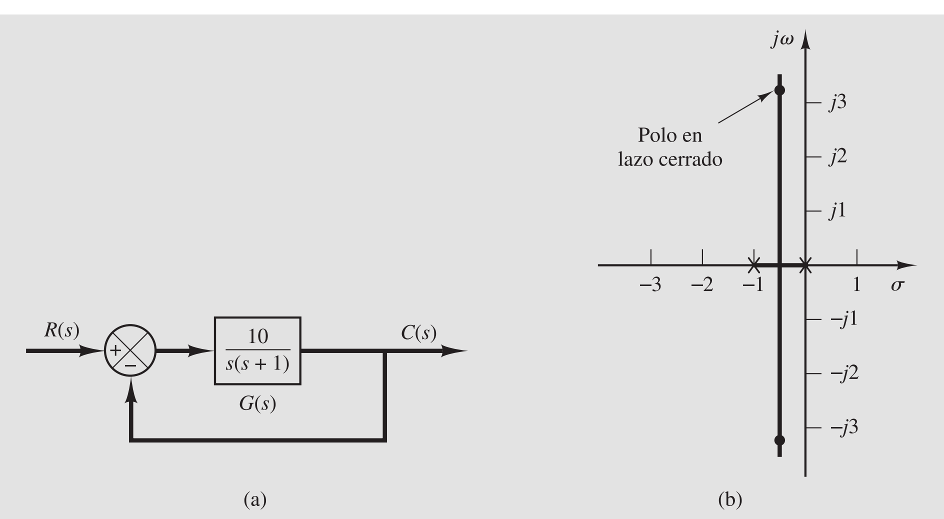


Figura 6-39. (a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar de las raíces.

El factor de amortiguamiento relativo de los polos en lazo cerrado es $\zeta = (1/2)/\sqrt{10} = 0.1581$. La frecuencia natural no amortiguada de los polos en lazo cerrado es $\omega_n = \sqrt{10} = 3.1623$ rad/seg Como el factor de amortiguamiento es pequeño, el sistema tendrá una gran sobreelongación en la respuesta a un escalón lo que no es deseable.

Se desea diseñar un compensador de adelanto $G_c(s)$ tal como se muestra en la Figura 6-40(a) de forma que los polos en lazo cerrado dominantes tengan el factor de amortiguamiento $\zeta = 0.5$ y la frecuencia natural no amortiguada $\omega_n = 3$ rad/seg. La localización de los polos en lazo cerrado dominantes se pueden determinar a partir de

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 3s + 9 = (s + 1.5 + j2.5981)(s + 1.5 - j2.5981)$$

como sigue:

$$s = -1.5 \pm j2.5981$$

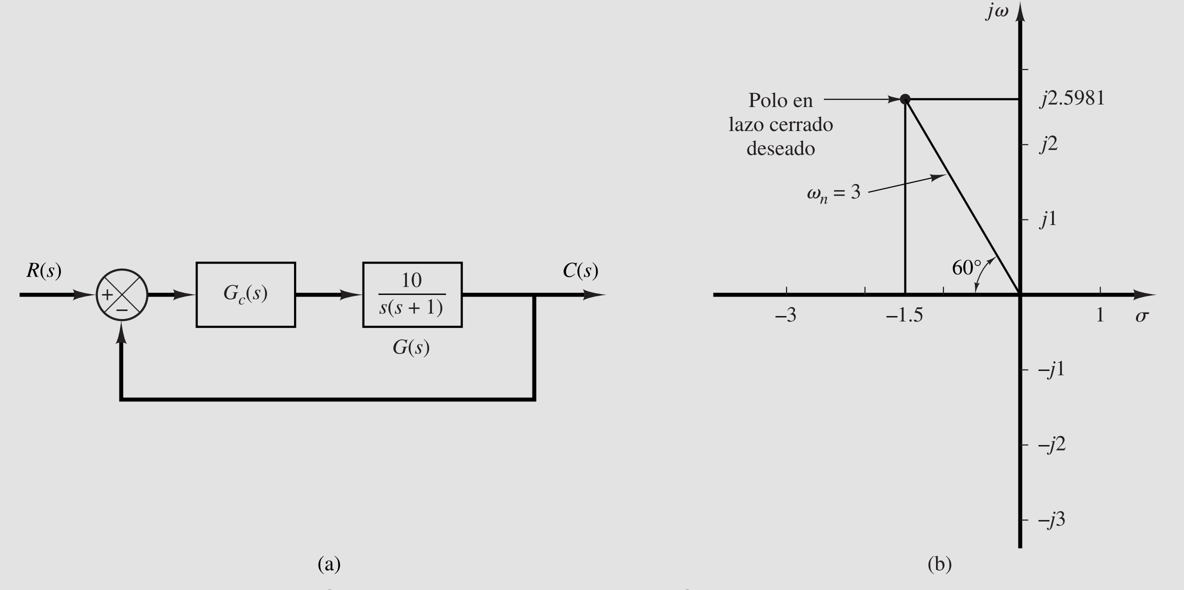


Figura 6-40. (a) Sistema compensado; (b) localización del polo en lazo cerrado deseado.

[Véase Figura 6-40(b).] En algunos casos, después de que se haya obtenido el lugar de las raíces del sistema original, los polos dominantes en lazo cerrado se mueven a la localización deseada con un simple ajuste de la ganancia. Sin embargo, esto no ocurre en el sistema actual. Por tanto, se introducirá un compensador de adelanto en la trayectoria directa.

A continuación se muestra un procedimiento general para determinar el compensador de adelanto. Primero, encuentre la suma de los ángulos en la localización deseada de uno de los polos dominantes en lazo cerrado con los polos y ceros en lazo abierto del sistema original, y determine el ángulo necesario ϕ que se va a agregar para que la suma total de los ángulos sea igual a $\pm 180^{\circ}(2k+1)$. El compensador de adelanto debe contribuir a este ángulo ϕ. (Si el ángulo ϕ es suficientemente grande, tal vez se requieran dos o más redes de adelanto en lugar de una.)

Suponga que el compensador de adelanto $G_c(s)$ tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c\frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\alpha T}}, \qquad (0<\alpha<1)$$

El ángulo desde el polo en el origen al polo en lazo cerrado dominante deseado en $s=-1{,}5+j2.5981$ es 120°. El ángulo desde el polo en $s=-1$ al polo en lazo cerrado deseado es 100.894°. Por lo tanto la deficiencia del ángulo es

$$\text{Deficiencia del ángulo} = 180^{\circ} - 120^{\circ} - 100.894^{\circ} = -40.894^{\circ}$$

El déficit en el ángulo de 40.894° debe estar contribuido por un compensador de adelanto.

Observe que la solución de este problema no es única. Hay infinitas soluciones. En lo que sigue presentaremos dos soluciones al problema.

Método 1. Hay muchas formas de determinar la localización del cero y del polo del compensador de adelanto. A continuación se presenta un procedimiento con el propósito de obtener el mayor valor posible para α. (Observe que un valor más grande de α proporciona un valor mayor de K_v. En la mayoría de los casos, cuanto mayor sea la K_v, mejor será el comportamiento del sistema.) Primero dibuje una línea horizontal que pase por el punto P, localización deseada para uno de los polos dominantes en lazo cerrado. Esto corresponde a la línea PA de la Figura 6-41. Dibuje una línea que conecte el punto P con el origen. Biseccione el ángulo que forman las líneas PA y PO, como se muestra en la citada figura. Dibuje dos líneas PC y PD que formen ángulos de $+\phi/2$ con la bisectriz PB. Las intersecciones de PC y PD con el eje real negativo proporcionan la localización necesaria para el polo y el cero de la red de adelanto. Por tanto, el compensador diseñado hará de P un punto sobre el lugar de las raíces del sistema compensado. La ganancia en lazo abierto se determina mediante la condición de magnitud.

En el sistema actual, el ángulo de $G(s)$ del polo en lazo cerrado deseado es

$$\angle\frac{10}{s(s+1)}\bigg|_{s=-1.5+j2.5981} = -220.894^{\circ}$$

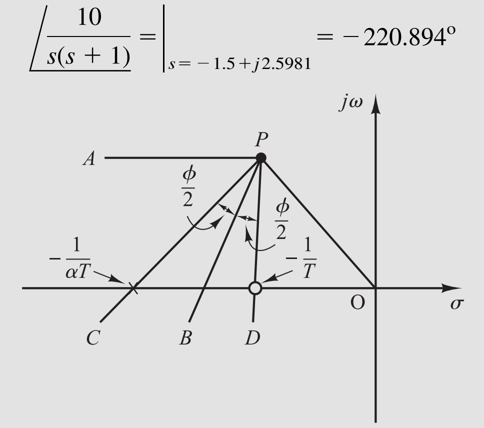


Figura 6-41. Determinación del polo y el cero de una red de adelanto.

Por tanto, si se necesita hacer que el lugar de las raíces pase por el polo en lazo cerrado deseado, el compensador de adelanto debe contribuir con $\phi = 40.894^\circ$ en este punto. Siguiendo el procedimiento de diseño anterior, se determina el cero y el polo del compensador de adelanto.

Refiriéndose a la Figura 6-42, si biseccionamos el ángulo APO y tomamos $40.894^\circ/2$ a cada lado, entonces la localización del polo y del cero se encuentran como sigue:

$$\text{cero en } s = -1{,}9432$$

$$\text{polo en } s = -4{,}6458$$

Así $G_c(s)$ se puede dar como

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \dfrac{1}{T}}{s + \dfrac{1}{\alpha T}} = K_c \frac{s + 1.9432}{s + 4.6458}$$

(Para este compensador el valor de α es $\alpha = 1.9432/4.6458 = 0.418$.)

El valor de K_c se puede determinar a partir de la condición de magnitud

$$\left| K_c \frac{s + 1.9432}{s + 4.6458} \frac{10}{s(s + 1)} \right|_{s = -1.5 + j2.5981} = 1$$

o

$$K_c = \left| \frac{s + 4.6458 s(s + 1)}{10(s + 1.9432)} \right|_{s = -1.5 + j2.5981} = 1.2287$$

Por tanto, el compensador de adelanto que acabamos de diseñar viene dado por

$$G_c(s) = 1.2287 \frac{s + 1.9432}{s + 4.6458}$$

Entonces la función de transferencia en lazo abierto del sistema diseñado es

$$G_c(s)G(s) = 1.2287 \left(\frac{s + 1.9432}{s + 4.6458} \right) \frac{10}{s(s + 1)}$$

y la función de transferencia en lazo cerrado resulta ser

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{12.287(s + 1.9432)}{s(s + 1)(s + 4.6458) + 12.287(s + 1.9432)} = \frac{12.287s + 23.876}{s^3 + 5.646s^2 + 16.933s + 23.876}$$

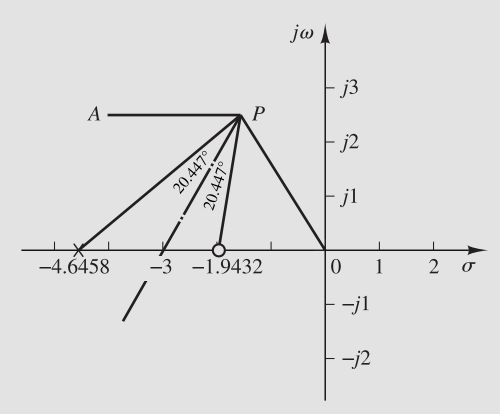


Figura 6-42. Determinación del polo y el cero de una red de adelanto.

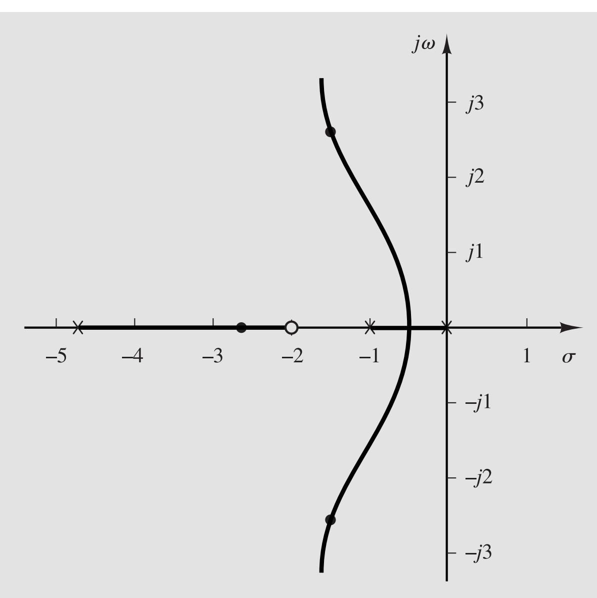


Figura 6-43. Gráfica del lugar de las raíces del sistema compensado.

Es conveniente comprobar el valor de la constante de error de velocidad estática K_v para el sistema que acabamos de diseñar

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s\left[1.2287\,\frac{s+1.9432}{s+4.6458}\,\frac{10}{s(s+1)}\right]$$

$$= 5.139$$

Observe que el tercer polo en lazo cerrado del sistema diseñado se obtiene si se divide la ecuación característica entre los factores conocidos del modo siguiente:

$$s^3 + 5.646s^2 + 16.933s + 23.875 = (s + 1.5 + j2.5981)(s + 1.5 - j2.5981)(s + 2.65)$$

El método de compensación anterior permite colocar los polos dominantes en lazo cerrado en los puntos deseados del plano complejo. El tercer polo en $s = -2.65$ está relativamente próximo al cero añadido en $s = -1.9432$. Por tanto, el efecto de este polo sobre la respuesta transitoria es relativamente pequeño. Como no se ha impuesto ninguna restricción sobre el polo no dominante y no se ha definido una especificación relacionada con el valor del coeficiente estático de velocidad, se concluye que el diseño actual es satisfactorio.

Método 2. Si escogemos el cero del compensador de adelanto en $s = -1$ de forma que se cancele el polo de la planta en $s = -1$, entonces el polo del compensador se debe colocar en $s = -3$. (Véase Figura 6-44.) De donde se sigue que el compensador de adelanto es

$$G_c(s) = K_c\,\frac{s+1}{s+3}$$

El valor de K_v se puede determinar a partir de la condición de magnitud.

$$\left| K_c\,\frac{s+1}{s+3}\,\frac{10}{s(s+1)} \right|_{s=-1.5+j2.5981} = 1$$

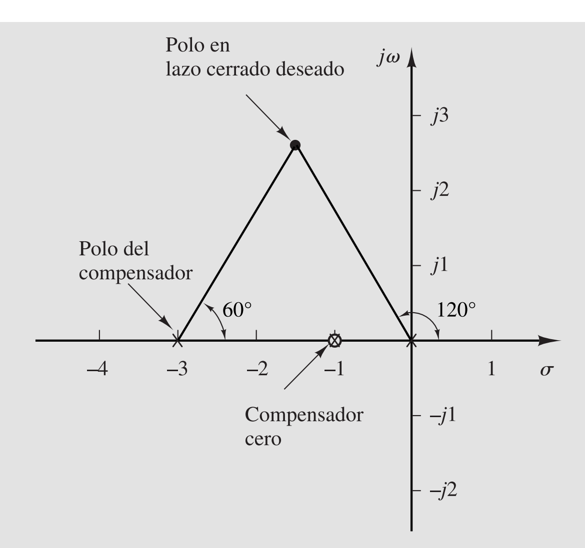


Figura 6-44. Polo y cero del compensador.

o

$$K_c = \left| \frac{s(s+3)}{10} \right|_{s=-1.5+j2.5981} = 0.9$$

Por tanto

$$G_c(s) = 0.9\,\frac{s+1}{s+3}$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema diseñado es

$$G_c(s)G(s) = 0.9\,\frac{s+1}{s+3}\,\frac{10}{s(s+1)} = \frac{9}{s(s+3)}$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9}{s^2 + 3s + 9}$$

Obsérvese que en el caso presente el cero del compensador de adelanto cancelará a un polo de la planta, dando lugar a un sistema de segundo orden en lugar de un sistema de tercer orden como sucedía con el Método 1.

La constante de error de velocidad estática en este caso se obtiene como sigue:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s \to 0} s\left[\frac{9}{s(s+3)}\right] = 3$$

Se ve que el sistema diseñado por el Método 1 da un valor más grande para la constante de error de velocidad estática. Esto significa que el sistema diseñado por el Método 1 tendrá un error en estado estacionario más pequeño en el seguimiento de entradas en rampa que el que se obtiene con el sistema diseñado por el Método 2.

Para diferentes combinaciones de un cero y un polo del compensador que den una contribución de 40.894°, el valor de K_v será distinto. Aunque se puede conseguir un cierto cambio en el valor de K_v alterando la localización polo-cero del compensador de adelanto, si se desea un mayor aumento en el valor de K_v, entonces se debe cambiar de un compensador de adelanto a un compensador de retardo-adelanto.

Comparación de las respuestas escalón y rampa de los sistemas compensado y sin compensar. A continuación se comparan las respuestas a un escalón y a una rampa unitaria

de los tres sistemas: el sistema original no compensado, el sistema diseñado por el Método 1 y el sistema diseñado por el Método 2. En el Programa 6-9 de MATLAB se da el programa empleado para obtener las curvas de respuesta a un escalón unitario, donde num1 y den1 representan el numerador y el denominador del sistema diseñado por el Método 1 y num2 y den2 lo mismo por el Método 2. También, num y den se emplean para representar al sistema original no compensado. En la Figura 6-45 se muestran las curvas de respuesta a un escalón unitario resultantes. En el Progra-

MATLAB Programa 6-9

```
% ***** Respuesta a escalón unitario de sistemas compensado y no compensado*****

num1 = [12.287  23.876];
den1 = [1  5.646  16.933  23.876];
num2 = [9];
den2 = [1  3  9];
num = [10];
den = [  1  1  10];
t = 0:0.05:5;
c1 = step(num1,den1,t);
c2 = step(num2,den2,t);
c = step(num,den,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'.',t,c,'x')
grid
title('Respuesta a escalón unitario de sistemas compensado y no compensado')
xlabel ('t Seg')
ylabel ('Salidas c1, c2 y c')
text (1.51,1.48,'Sistema compensado (Método 1)')
text (0.9,0.48,'Sistema compensado (Método 2)')
text (2.51,0.67,''Sistema no compensado')
```

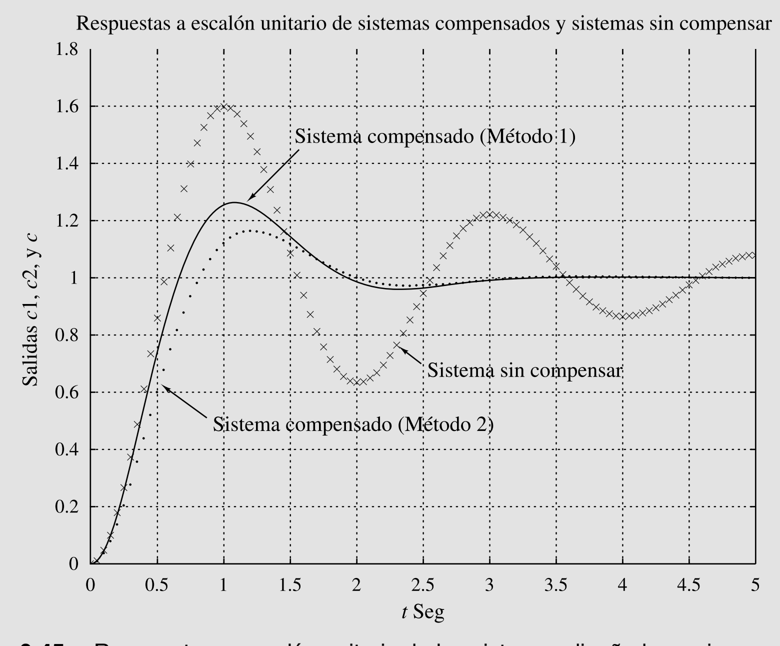


Figura 6-45. Respuestas a escalón unitario de los sistemas diseñados y sin compensar.

ma 6-10 de MATLAB se da el programa empleado para obtener las curvas de respuesta a una rampa unitaria, de los sistemas diseñados, donde se utiliza la orden step para obtener las respuestas a una rampa unitaria utilizando los numeradores y denominadores para los sistemas diseñados por el Método 1 y el Método 2 como sigue:

```
num1 = [12.287  23.876];
den1 = [1  5.646  16.933  23.876  0];
num2 = [9];
den2 = [1  3  9  0];
```

En la Figura 6-46 se muestran las curvas de respuesta a una rampa unitaria resultantes

MATLAB Programa 6-10

```
% ***** Respuesta a una rampa unitaria de los sistemas compensado*****
num1 = [12.287  23.876];
den1 = [1  5.646  16.933  23.876  0];
num2 = [9];
den2 = [1  3  9  0];
t = 0:0.05:5;
c1 = step(num1,den1,t);
c2 = step(num2,den2,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'.',t,t,'-')
grid
title('Respuesta a una rampa unitaria de los sistemas compensado')
xlabel ('t Seg')
ylabel ('Entrada en Rampa Unitaria y Salidas c1 y c2')
text (2.55,3.8,'Entrada')
text (0.55,2.8,'Sistema compensado (Método 1)')
text (2.35,1.75,'Sistema compensado (Método 2)')
```

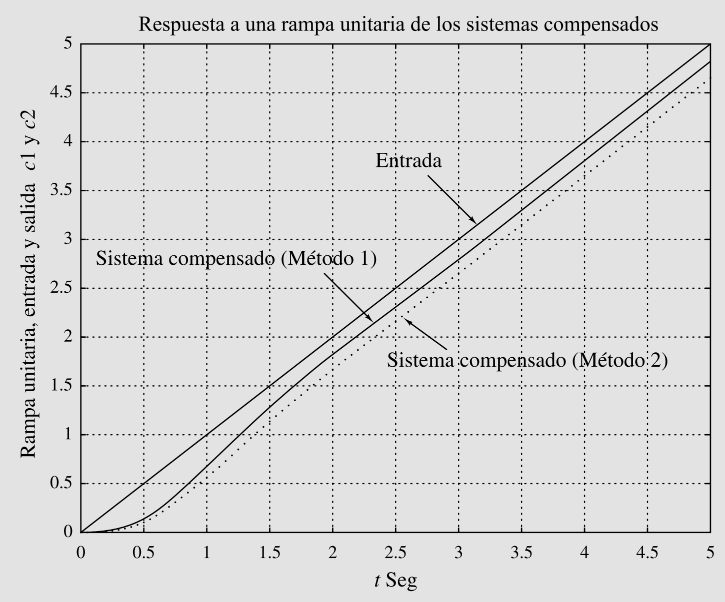


Figura 6-46. Respuestas a rampa unitaria de los sistemas diseñados.

Al examinar estas curvas de respuesta se observa que el sistema compensado diseñado por el Método 1 exhibe en la respuesta a un escalón una sobreelongación un poco más grande que la del sistema compensado diseñado por el Método 2. Sin embargo el primero tiene una mejor característica de respuesta que el último para la entrada en rampa unitaria. Así pues es difícil decir qué diseño es mejor. La decisión sobre cuál escoger debería hacerse por los requerimientos de la respuesta (tales como sobreelongación más pequeña para entradas tipo escalón o errores en estado estacionaros más pequeños en el seguimiento de rampas o entradas cambiantes) que se espera que tenga el sistema diseñado. Si se requiriesen ambas especificaciones entonces se podría usar un compensador de retardo-adelanto. (Véase la Sección 6-8 para la técnica de compensación de retardo-adelanto.)

6-7 Compensación de retardo

Compensador de retardo electrónico usando amplificadores operacionales. La configuración del compensador de retardo electrónico usando amplificadores operacionales es igual a la del compensador de adelanto de la Figura 6-36. Si se elige $R_2C_2 > R_1C_1$ en el circuito de la Figura 6-36, este se convierte en un compensador de retardo. A partir de la misma figura, la función de transferencia del compensador de retardo se obtiene mediante

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \hat{K}_c\beta\,\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = \hat{K}_c\,\frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\beta T}}$$

donde

$$T = R_1C_1, \qquad \beta T = R_2C_2, \qquad \beta = \frac{R_2C_2}{R_1C_1} > 1, \qquad \hat{K}_c = \frac{R_4C_1}{R_3C_2}$$

Obsérvese que se utiliza β en lugar de α en las expresiones anteriores. [En el compensador de adelanto se utiliza α para indicar la razón $R_2C_2/(R_1C_1)$, que era menor que 1, o $0 < \alpha < 1$.] En este capítulo siempre se supondrá que $0 < \alpha < 1$ y que $\beta > 1$.

Técnicas de compensación de retardo basadas en el método del lugar de las raíces. Considérese el problema de encontrar una red de compensación adecuada para un sistema que presenta características satisfactorias de la respuesta transitoria, pero características no satisfactorias en estado estacionario. En este caso la compensación consiste, esencialmente, en incrementar la ganancia en lazo cerrado sin modificar de forma notable las características de la respuesta transitoria. Esto quiere decir que no debe cambiarse de manera significativa el lugar de las raíces en la proximidad de los polos dominantes en lazo cerrado, sino que debe incrementarse la ganancia en lazo abierto tanto como se necesite. Esto se consigue si se coloca un compensador de retardo en cascada con la función de transferencia del camino directo determinada.

Para evitar un cambio apreciable en los lugares de las raíces, la contribución de ángulo de la red de retardo debe limitarse a un valor pequeño, por ejemplo 5°. Para asegurar esto, se sitúan el polo y el cero de la red de retardo relativamente cerca uno del otro y cerca del origen del plano *s*. De este modo, los polos en lazo cerrado del sistema compensado sólo se alejarán ligeramente de sus situaciones originales. Por tanto, la característica de la respuesta transitoria cambiará muy poco.

Considérese un compensador de retardo $G_c(s)$, en el que

$$G_c(s) = \hat{K}_c\beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \hat{K}_c \frac{s + \dfrac{1}{T}}{s + \dfrac{1}{\beta T}} \qquad (6\text{-}19)$$

Si se sitúan el cero y el polo del compensador de retardo muy cerca uno del otro, en $s = s_1$, donde s_1 es uno de los polos dominantes en lazo cerrado, las magnitudes $s_1 + (1/T)$ y $s_1 + [1/(\beta T)]$ serán casi iguales, o bien

$$|G_c(s_1)| = \left| \hat{K}_c \frac{s_1 + \dfrac{1}{T}}{s_1 + \dfrac{1}{\beta T}} \right| \doteq \hat{K}_c$$

Para hacer que la contribución de ángulo de la parte de retardo del compensador sea pequeña, se requiere

$$-5^{\circ} < \angle \frac{s_1 + \dfrac{1}{T}}{s_1 + \dfrac{1}{\beta T}} < 0^{\circ}$$

Esto implica que, si la ganancia $\hat{K}_c$ del compensador de retardo se hace igual a 1, la característica de la respuesta transitoria no se alterará. (Esto significa que la ganancia global de la función de transferencia en lazo abierto se incrementará en un factor de β, donde $\beta > 1$.) Si el polo y el cero se colocan muy cerca del origen, puede aumentarse el valor de β. (Se usa un valor grande de β, siempre que sea posible la realización física del compensador de retardo.) Se debe señalar que el valor de T debe ser grande, pero no es indispensable conocer su valor exacto. Sin embargo, no debe ser demasiado grande, a fin de evitar dificultades en el momento de realizar el compensador de retardo de fase mediante componentes físicos.

Un incremento en la ganancia significa un incremento en las constantes de error estático. Si la función de transferencia en lazo abierto del sistema no compensado es $G(s)$, la constante de error estático de velocidad K_v del sistema no compensado es

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)$$

Si el compensador se selecciona como el que se obtiene de la Ecuación (6.19), entonces, para el sistema compensado con la función de transferencia en lazo abierto $G_c(s)G(s)$, la constante de error estático de velocidad $\hat{K}_v$ se convierte en

$$\hat{K}_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s \to 0} G_c(s)K_v = \hat{K}_c\beta K_v$$

donde K_v es la constante de error de velocidad estática del sistema no compensado.

Por tanto, si el compensador se obtiene mediante la Ecuación (6-19), la constante de error estático de velocidad se incrementa en un factor $\hat{K}_c\beta$, donde $\hat{K}_c$ tiene un valor cercano a la unidad.

El principal efecto negativo de la compensación de retardo es que el cero del compensador que se generará cerca del origen da lugar a un polo en lazo cerrado cerca del origen. Este polo en lazo cerrado y el cero del compensador generarán una larga cola de pequeña amplitud en la respuesta a un escalón, aumentándose de esta manera el tiempo de asentamiento.

Procedimientos de diseño para la compensación de retardo mediante el método del lugar de las raíces. El procedimiento para diseñar compensadores de retardo para el sistema de la Figura 6-47 mediante el método del lugar de las raíces se plantea del modo siguiente (se supone que el sistema no compensado cumple las especificaciones de la respuesta transitoria mediante un simple ajuste de la ganancia; si no sucede así, consulte la Sección 6-8):

1. Dibuje la gráfica del lugar de las raíces para el sistema no compensado, cuya función de transferencia en lazo abierto sea $G(s)$. En función de las especificaciones de la respuesta transitoria, sitúe los polos dominantes en lazo cerrado en el lugar de las raíces.
2. Suponga que la función de transferencia del compensador de retardo es

$$G_c(s) = \hat{K}_c\beta\,\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = \hat{K}_c\,\frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\beta T}}$$

   Así, la función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado se convierte en $G_c(s)G(s)$.
3. Calcule la constante de error estático especificada en el problema.
4. Determine el incremento necesario en la constante de error estático para satisfacer las especificaciones.
5. Determine el polo y el cero del compensador de retardo que producen el incremento necesario en la constante de error estático sin modificar apreciablemente los lugares de las raíces originales. (Observe que la razón entre el valor de la ganancia requerido en las especificaciones y la ganancia que se encuentra en el sistema no compensado es la razón entre la distancia del cero al origen y la del polo al origen.)
6. Dibuje una nueva gráfica del lugar de las raíces para el sistema no compensado. Localice los polos dominantes en lazo cerrado deseados sobre el lugar de las raíces. (Si la contribución de ángulo de la red de retardo es muy pequeña, es decir, de pocos grados, los lugares de las raíces originales y los nuevos serán casi idénticos. Sin embargo, habrá una ligera discrepancia entre ellos. A continuación localice, sobre el nuevo lugar de las raíces, los polos dominantes en lazo cerrado deseados a partir de las especificaciones de la respuesta transitoria.)
7. Ajuste la ganancia $\hat{K}_c$ del compensador a partir de la condición de magnitud, para que los polos dominantes en lazo cerrado se encuentren en la localización deseada ($\hat{K}_c$ será aproximadamente 1).

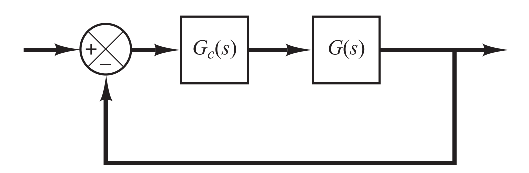


Figura 6.47. Sistema de control.

EJEMPLO 6-7 Considere el sistema de la Figura 6-48(a). La función de transferencia del camino directo es

$$G(s) = \frac{1.06}{s(s + 1)(s + 2)}$$

La gráfica del lugar de las raíces para el sistema se muestra en la Figura 6-48(b). La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1.06}{s(s + 1)(s + 2) + 1.06}$$

$$= \frac{1.06}{(s + 0.3307 - j0.5864)(s + 0.3307 + j0.5864)(s + 2.3386)}$$

Los polos dominantes en lazo cerrado son

$$s = -0.3307 \pm j0.5864$$

El factor de amortiguamiento de los polos dominantes en lazo cerrado es $\zeta = 0.491$. La frecuencia natural no amortiguada de los polos dominantes en lazo cerrado es 0.673 rad/seg. La constante de error estático de velocidad es 0.53 seg^{-1}.

Se pretende ineremementar la constante de error estático de velocidad K_v hasta cerca de 5 seg^{-1} sin modificar notablemente la localización de los polos dominantes en lazo cerrado.

Para cumplir con esta especificación, se inserta un compensador de retardo como el obtenido mediante la Ecuación (6-19) en cascada con la función de transferencia del camino directo determinada. Para incrementar la constante de error estático de velocidad en un factor de aproximadamente 10, se selecciona $\beta = 10$ y se sitúan el cero y el polo del compensador de retardo en $s = -0.05$ y $s = -0.005$, respectivamente. La función de transferencia del compensador de retardo se convierte en

$$G_c(s) = \hat{K}_c \frac{s + 0.05}{s + 0.005}$$

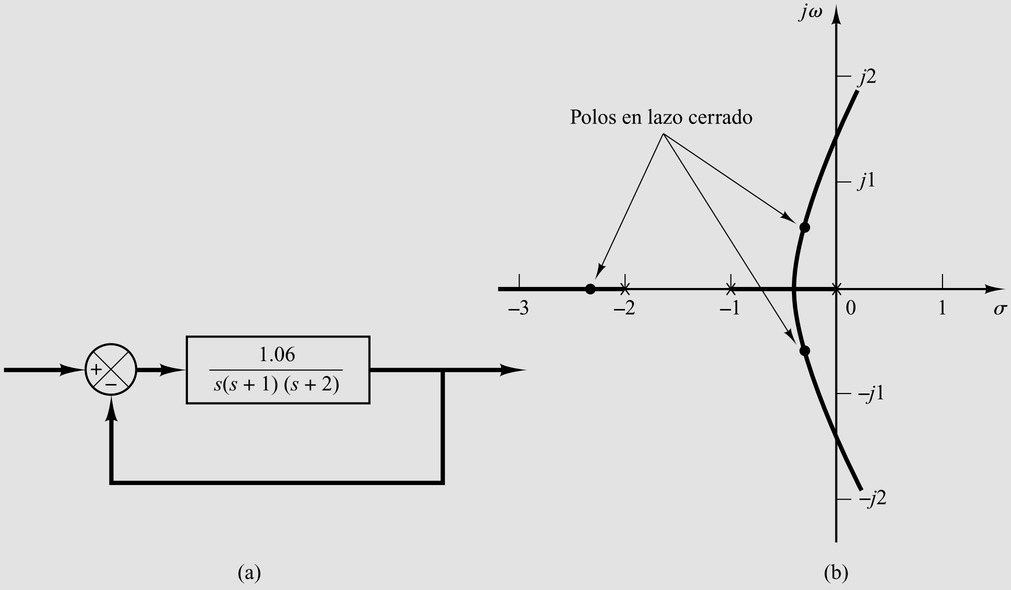


Figura 6-48. (a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar de las raíces.

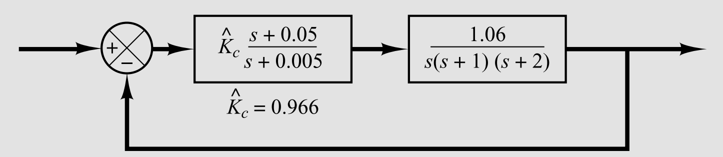


Figura 6-49. Sistema compensado.

La contribución de ángulo de esta red de retardo cerca de un polo dominante en lazo cerrado es aproximadamente de 4°. Debido a que esta contribución de ángulo no es demasiado pequeña, existe un cambio mínimo en el nuevo lugar de las raíces cerca de los polos dominantes en lazo cerrado deseados.

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

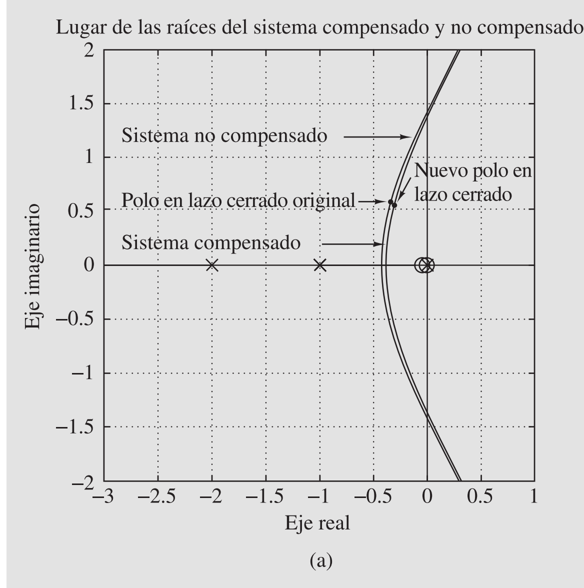
$$G_c(s)G(s) = \hat{K}_c \frac{s + 0.05}{s + 0.005} \frac{1.06}{s(s + 1)(s + 2)}$$

$$= \frac{K(s + 0.05)}{s(s + 0.005)(s + 1)(s + 2)}$$

donde

$$K = 1.06\hat{K}_c$$

El diagrama de bloques del sistema compensado se muestra en la Figura 6-49. La gráfica del lugar de las raíces para el sistema compensado cerca de los polos dominantes en lazo cerrado se muestra en la Figura 6-50(a), junto con el lugar de las raíces original. La Figura 6-50(b) muestra la gráfica del lugar de las raíces del sistema compensado cerca del origen. El Programa MATLAB 6-11 genera las gráficas del lugar de las raíces de las Figuras 6-50(a) y (b).



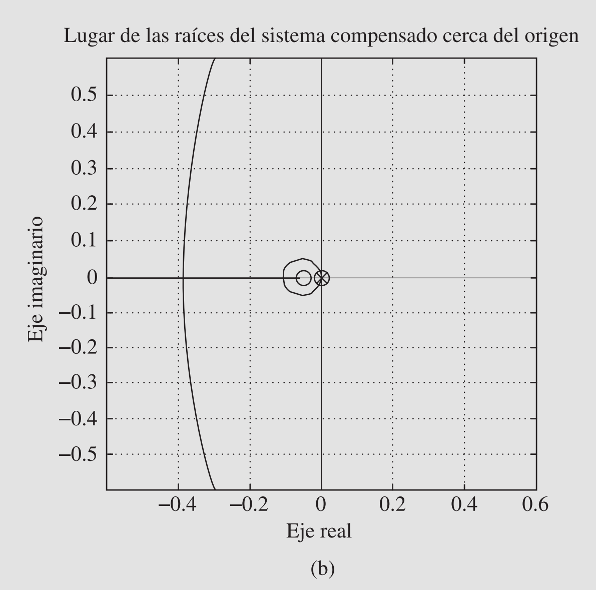


Figura 6-50. (a) Gráfica del lugar de las raíces del sistema compensado y del sistema no compensado; (b) gráfica del lugar de las raíces del sistema compensado cerca del origen.

MATLAB Programa 6-11

```
% ***** Lugar de las raíces del sistema compensado y no compensado *****

% ***** Introduzca los numeradores y denominadores de los
% sistemas compensado y no compensado *****

numc = [1  0.05];
denc = [1  3.005  2.015  0.01  0];
num = [1.06];
den = [1  3  2  0];

% *** Introduzca la orden rlocus. Represente el lugar de las raíces de ambos
% sistemas***

rlocus(numc,denc)
hold
Current plot held
rlocus(num,den)
v = [-3  1  -2  2]; axis(v); axis('square')
grid
text(-2.8,0.2,'Sistema compensado')
text(-2.8,1.2,'Sistema no compensado')
text(-2.8,0.58,'Polos en lazo cerrado originales')
text(-0.1,0.85,'Nuevos polos - ')
text(-0.1,0.62,'en lazo cerrado')
title('Lugares de las raíces de los sistemas compensado y no compensado')

hold
Current plot released
% ***** Represente el lugar de las raíces del sistema compensado cerca
% del origen *****

rlocus(numc,denc)
v = [-0.6  0.6  -0.6  0.6]; axis(v); axis('square')
grid
title('Lugar de las raíces del sistema compensado cerca del origen')
```

Si el factor de amortiguamiento relativo de los nuevos polos dominantes en lazo cerrado no cambia, los polos se obtienen a partir de la nueva gráfica del lugar de las raíces del modo siguiente:

$$s_1 = -0.31 + j0.55, \qquad s_2 = -0.31 - j0.55$$

La ganancia en lazo abierto K se determina de la condición de magnitud como sigue:

$$K = \left| \frac{s(s + 0.005)(s + 1)(s + 2)}{s + 0.05} \right|_{s = -0.31 + j0.55}$$

$$= 1.0235$$

Por tanto, la ganancia del compensador de retardo $\hat{K}_c$ se determina como

$$\hat{K}_c = \frac{K}{1.06} = \frac{1.0235}{1.06} = 0.9656$$

Así, la función de transferencia del compensador de retardo diseñado es

$$G_c(s) = 0.9656 \frac{s + 0.05}{s + 0.005} = 9.656 \frac{20s + 1}{200s + 1} \tag{6-20}$$

Entonces, el sistema compensado tiene la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G_1(s) = \frac{1.0235(s + 0.05)}{s(s + 0.005)(s + 1)(s + 2)} = \frac{5.12(20s + 1)}{s(200s + 1)(s + 1)(0.5s + 1)}$$

La constante de error estático de velocidad K_v es

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_1(s) = 5.12 \text{ seg}^{-1}$$

En el sistema compensado, la constante de error estático de velocidad ha aumentado a 5.12 seg^{-1}, o 5.12/0.53 = 9.66 veces su valor original. (El error en estado estacionario para entradas rampa ha disminuido alrededor del 10% del valor del sistema original.) Por tanto, se ha obtenido el objetivo de diseño de incrementar la constante de error estático de velocidad hasta cerca de 5 seg^{-1}.

Observe que, debido a que el polo y el cero del compensador de retardo están muy cerca uno del otro y muy cerca del origen, sus efectos sobre la forma de los lugares de las raíces originales son pequeños. Con excepción de la presencia de un pequeño lugar de las raíces cerrado cerca del origen, los lugares de las raíces de los sistemas compensado y sin compensar son muy similares entre sí, a pesar de que la constante de error estático de velocidad del sistema compensado es 9.66 veces más grande que la del sistema sin compensar.

Los otros dos polos en lazo cerrado para el sistema compensado se encuentran del modo siguiente:

$$s_3 = -2.326, \qquad s_4 = -0.0549$$

El haber añadido un compensador de retardo incrementa el orden del sistema de 3 a 4, incorporando un polo en lazo cerrado adicional cerca del cero del compensador de retardo. (El polo en lazo cerrado añadido en $s = -0.0549$ está cerca del cero en $s = -0.05$.) Este par de un cero y un polo crea una larga cola de amplitud pequeña en la respuesta transitoria, como se verá después en la respuesta a un escalón unitario. Debido a que el polo en $s = -2.326$ está muy lejos del eje $j\omega$ en comparación con los polos dominantes en lazo cerrado, su efecto sobre la respuesta transitoria también es pequeño. Por tanto, se consideran los polos en lazo cerrado en $s = -0.31 \pm j0.55$ como los polos dominantes en lazo cerrado.

La frecuencia natural no amortiguada de los polos dominantes en lazo cerrado del sistema compensado es 0.631 rad/seg. Este valor es aproximadamente un 6% menor que el valor original, 0.673 rad/seg. Esto implica que la respuesta transitoria del sistema compensado es más lenta que la del sistema original. La respuesta tendrá un mayor tiempo de asentamiento. La máxima sobreelongación de la respuesta a un escalón aumentará con respecto a la del sistema compensado. Si se toleran estos efectos adversos, la compensación de retardo, tal y como se analiza aquí, presenta una solución satisfactoria al problema de diseño planteado.

A continuación se comparan las respuestas frente a rampa unitaria del sistema compensado con las del sistema sin compensar y se comprueba que el comportamiento en estado estacionario es mucho mayor en el sistema compensado que en el sistema sin compensar.

Para obtener la respuesta a una rampa unitaria con MATLAB, se utiliza la orden step para el sistema $C(s)/[sR(s)]$. Debido a que $C(s)/[sR(s)]$ para el sistema compensado es

$$\frac{C(s)}{sR(s)} = \frac{1.0235(s + 0.05)}{s[s(s + 0.005)(s + 1)(s + 2) + 1.0235(s + 0.05)]}$$

$$= \frac{1.0235s + 0.0512}{s^5 + 3.005s^4 + 2.015s^3 + 1.0335s^2 + 0.0512s}$$

se tiene que

```
numc = [1.0235  0.0512]
denc = [1  3.005  2.015  1.0335  0.0512  0]
```

Asimismo, $C(s)/[sR(s)]$ para el sistema sin compensar es

$$\frac{C(s)}{sR(s)} = \frac{1.06}{s[s(s+1)(s+2)+1.06]}$$

$$= \frac{1.06}{s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 1.06s}$$

Por tanto,

```
num = [1.06]
den = [1  3  2  1.06  0]
```

El Programa MATLAB 6-12 genera la gráfica de las respuestas a una rampa unitaria. La Figura 6-51 muestra el resultado. Es evidente que el sistema compensado presenta un error en estado estacionario mucho más pequeño (un 10 % del error en estado estacionario original) al seguir la entrada de la rampa unitaria.

MATLAB Programa 6-12

```
% ***** Respuesta a una rampa unitaria de sistemas compensado
% y no compensado *****

% ***** La respuesta a una rampa unitaria se obtiene como la respuesta
% escalón unitario de C(s)/[sR(s)] *****

% ***** Introduzca los numeradores y denominadores de C1(s)/[sR(s)]
% y C2(s)/[sR(s)], donde C1(s) y C2(s) son las transformadas de Laplace
% de los sistemas compensado y no compensado, respectivamente. *****

numc = [1.0235  0.0512];
denc = [1  3.005  2.015  1.0335  0.0512  0];
num = [1.06];
den = [1  3  2  1.06  0];

% ***** Especifique el rango de tiempo (tal como t= 0:0.1:50) e introduzca
% la orden step y la orden plot. *****

t = 0:0.1:50;
c1 = step(numc,denc,t);
c2 = step(num,den,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'.',t,t,'--')
grid
text(2.2,27,'Sistema compensado');
text(26,21.3,'Sistema no compensado');
title('Respuesta a una rampa unitaria de los sistemas compensado
      y no compensado')
xlabel('t Seg');
ylabel('Salidas c1 y c2')
```

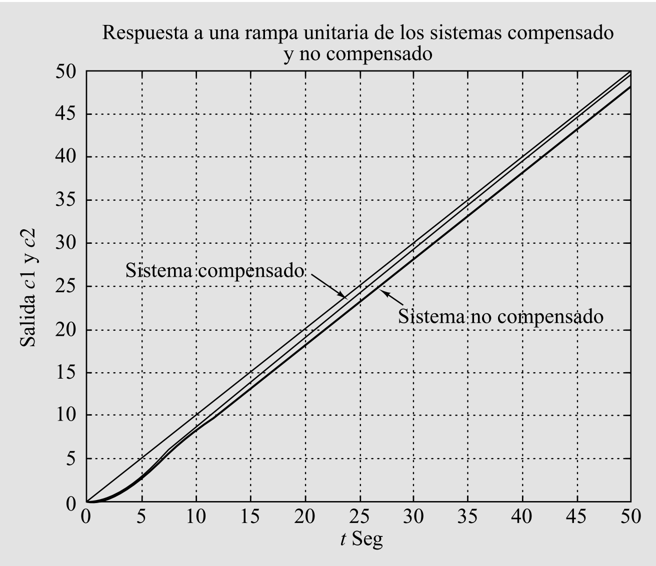


Figura 6-51. Respuestas frente a una rampa unitaria de los sistemas compensado y sin compensar. [El compensador se obtiene de la Ecuación (6-20).]

El Programa MATLAB 6-13 genera las curvas de respuesta a un escalón unitario de los sistemas compensado y sin compensar. Dichas curvas se muestran en la Figura 6-52. Observe que el sistema compensado de retardo presenta una mayor sobreelongación máxima y una respuesta más lenta que el sistema sin compensar original. Observe que el par formado por el polo en

MATLAB Programa 6-13

```
% ***** Respuestas escalón unitario de sistemas compensado
% y no compensado *****
% ***** Introduzca los numeradores y denominadores de los
% sistemas compensado y no compensado *****

numc = [1.0235  0.0512];
denc = [1  3.005  2.015  1.0335  0.0512];
num = [1.06];
den = [1  3  2  1.06];

% ***** Especifique el rango de tiempo (tal como t = 0:0.1:40) e introduzca
% las órdenes step y plot. *****

t = 0:0.1:40;
c1 = step(numc,denc,t);
c2 = step(num,den,t);
plot(t,c1,'_',t,c2,'.')
grid
text(13,1.12,'Sistema compensado')
text(13.6,0.88,'Sistema no compensado')
title('Respuesta a un escalón unitario de sistemas compensado y no compensado')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas c1 y c2')
```

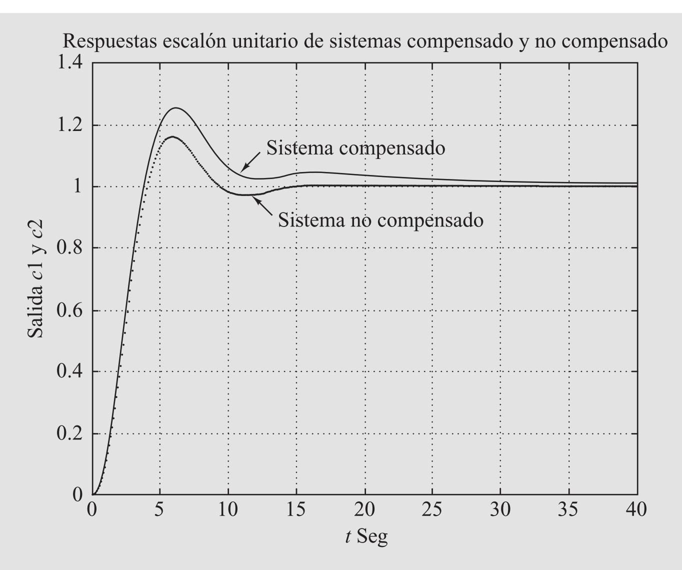


Figura 6-52. Respuestas a un escalón unitario de los sistemas compensado y sin compensar. [El compensador se obtiene de la Ecuación 6-20.]

$s = -0.0549$ y el cero en $s = -0.05$ genera una cola larga de amplitud pequeña en la respuesta transitoria. Si no se pretende obtener una sobreelongación máxima mayor y una respuesta más lenta, es necesario utilizar un compensador de retardo-adelanto tal y como se presenta en la Sección 6-8.

Comentarios. Se observa que en ciertas circunstancias tanto el compensador de adelanto como el de retardo pueden satisfacer las especificaciones dadas (tanto las especificaciones de la respuesta transitoria como las del estado estacionario). Por tanto, cualquiera de ellos se puede utilizar.

6-8 Compensación de retardo-adelanto

La compensación de adelanto básicamente acelera la respuesta e incrementa la estabilidad del sistema. La compensación de retardo mejora la precisión en estado estacionario del sistema, pero reduce la velocidad de la respuesta.

Si se desea mejorar tanto la respuesta transitoria como la respuesta en estado estacionario, deben utilizarse de forma simultánea un compensador de adelanto y un compensador de retardo. Sin embargo, en lugar de introducir un compensador de adelanto y un compensador de retardo, ambos como elementos independientes, es más económico utilizar únicamente un compensador de retardo-adelanto.

La compensación de retardo-adelanto combina las ventajas de las compensaciones de retardo y de adelanto. Debido a que el compensador de retardo-adelanto posee dos polos y dos ceros, tal compensación aumenta en 2 el orden del sistema, a menos que ocurra una cancelación de polos y ceros en el sistema compensado.

Compensador electrónico de retardo-adelanto utilizando amplificadores operacionales. La Figura 6-53 muestra un compensador electrónico de retardo-adelanto que utiliza

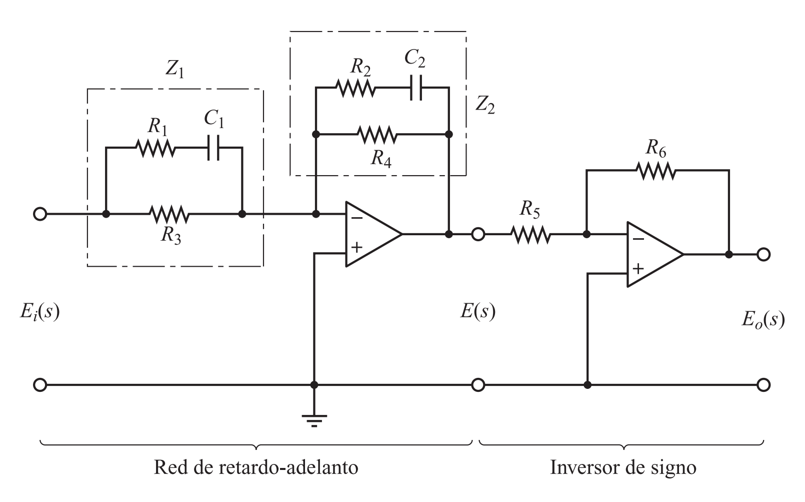


Figura 6-53. Compensador de retardo-adelanto.

amplificadores operacionales. La función de transferencia para este compensador se obtiene del modo siguiente. La impedancia compleja Z_1 se obtiene a partir de

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1 + \dfrac{1}{C_1 s}} + \frac{1}{R_3}$$

o bien

$$Z_1 = \frac{(R_1 C_1 s + 1)R_3}{(R_1 + R_3)C_1 s + 1}$$

Del mismo modo, la impedancia compleja Z_2 se obtiene mediante

$$Z_2 = \frac{(R_2 C_2 s + 1)R_4}{(R_2 + R_4)C_2 s + 1}$$

Por tanto, se tiene que

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_4}{R_3}\,\frac{(R_1 + R_3)C_1 s + 1}{R_1 C_1 s + 1}\cdot\frac{R_2 C_2 s + 1}{(R_2 + R_4)C_2 s + 1}$$

El inversor de signo tiene la función de transferencia

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_6}{R_5}$$

Asi, la función de transferencia del compensador de la Figura 6-53 es

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{E_o(s)}{E(s)}\,\frac{E(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4 R_6}{R_3 R_5}\left[\frac{(R_1 + R_3)C_1 s + 1}{R_1 C_1 s + 1}\right]\left[\frac{R_2 C_2 s + 1}{(R_2 + R_4)C_2 s + 1}\right] \qquad (6\text{-}21)$$

Se define

$$T_1 = (R_1 + R_3)C_1, \qquad \frac{T_1}{\gamma} = R_1 C_1, \qquad T_2 = R_2 C_2, \qquad \beta T_2 = (R_2 + R_4)C_2$$

Por tanto, la Ecuación (6-21) se convierte en

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_c \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{T_1 s + 1}{\frac{T_1}{\gamma} s + 1} \right) \left(\frac{T_2 s + 1}{\beta T_2 s + 1} \right) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{T_2} \right)}{\left(s + \frac{\gamma}{T_1} \right) \left(s + \frac{1}{\beta T_2} \right)} \tag{6-22}$$

donde

$$\gamma = \frac{R_1 + R_3}{R_1} > 1, \qquad \beta = \frac{R_2 + R_4}{R_2} > 1, \qquad K_c = \frac{R_2 R_4 R_6}{R_1 R_3 R_5} \frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_4}$$

Obsérvese que, con frecuencia, γ se selecciona igual a β.

Técnicas de compensación de retardo-adelanto basadas en el método del lugar de las raíces. Considérese el sistema de la Figura 6-54. Supóngase que se utiliza el compensador de retardo-adelanto:

$$G_c(s) = K_c \frac{\beta}{\gamma} \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\gamma} s + 1 \right)(\beta T_2 s + 1)} = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \tag{6-23}$$

en el que $\beta > 1$ y $\gamma > 1$. (Supóngase que K_c pertenece a la parte de adelanto del compensador de retardo-adelanto.)

Al diseñar los compensadores de retardo-adelanto, se consideran dos casos: $\gamma \neq \beta$ y $\gamma = \beta$.

Caso 1. $\gamma \neq \beta$. En este caso, el proceso de diseño es una combinación del diseño del compensador de adelanto con el del compensador de retardo. El procedimiento de diseño para el compensador de retardo-adelanto es el siguiente:

1. A partir de las especificaciones de comportamiento dadas, determine la localización deseada para los polos dominantes en lazo cerrado.
2. Utilice la función de transferencia en lazo abierto sin compensar $G(s)$, para determinar la deficiencia de ángulo ϕ si los polos dominantes en lazo cerrado estuviesen en la posición deseada. La parte de adelanto de fase del compensador de retardo-adelanto debe contribuir a este ángulo ϕ.
3. Suponiendo que después selecciona un T_2 suficientemente grande para que la magnitud de la parte de retardo

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right|$$

Figura 6-54. Sistema de control.

se acerque a la unidad, de modo que $s = s_1$ es uno de los polos dominantes en lazo cerrado, elija los valores de T_1 y γ a partir de la siguiente igualdad:

$$\angle \frac{s_1 + \dfrac{1}{T_1}}{s_1 + \dfrac{\gamma}{T_1}} = \phi$$

La elección de T_1 y γ no es única. (Pueden escogerse muchos conjuntos de valores T y γ). A continuatión determine el valor de K_c a partir de la condición de magnitud:

$$\left| K_c \frac{s_1 + \dfrac{1}{T_1}}{s_1 + \dfrac{\gamma}{T_1}} G(s_1) \right| = 1$$

4. Si se especifica la constante de error estático de velocidad K_v, determine el valor de β que satisfaga el requisito para K_v. La constante de error estático de velocidad K_v se obtiene mediante

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s) \\ &= \lim_{s \to 0} sK_c \left(\frac{s + \dfrac{1}{T_1}}{s + \dfrac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \dfrac{1}{T_2}}{s + \dfrac{1}{\beta T_2}} \right) G(s) \\ &= \lim_{s \to 0} sK_c \frac{\beta}{\gamma} G(s) \end{aligned}$$

donde K_c y γ se determinaron en el paso 3. Por tanto, dado el valor de K_v, el valor de β se determina a partir de esta última ecuación. Después, usando el valor de β determinado de este modo, seleccione un valor de T_2 tal que

$$\left| \frac{s_1 + \dfrac{1}{T_2}}{s_1 + \dfrac{1}{\beta T_2}} \right| \doteq 1$$

$$-5^{\circ} < \angle \frac{s_1 + \dfrac{1}{T_2}}{s_1 + \dfrac{1}{\beta T_2}} < 0^{\circ}$$

(El procedimiento de diseño anterior se ilustra en el Ejemplo 6-8.)

Caso 2. $\gamma = \beta$. Si se requiere que en la Ecuación (6-23) $\gamma = \beta$, el procedimiento de diseño anterior para el compensador de retardo-adelanto se modifica del modo siguiente:

1. A partir de las especificaciones de comportamiento dadas, determine la localización deseada para los polos dominantes en lazo cerrado.

2. El compensador de retardo-adelanto obtenido mediante la Ecuación (6-23) se modifica a

$$G_c(s) = K_c \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \tag{6-24}$$

donde $\beta > 1$. La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es $G_c(s)G(s)$. Si se especifica la constante de error estático de velocidad K_v, determine el valor de la constante K_c a partir de la ecuación siguiente:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s \to 0} sK_c G(s)$$

3. Para tener los polos dominantes en lazo cerrado en la localización deseada, calcule la contribución requerida del ángulo ϕ de la parte de adelanto de fase del compensador de retardo-adelanto.
4. Para el compensador de retardo-adelanto, seleccione una T_2 suficientemente grande, con el fin de que

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right|$$

se aproxime a la unidad, de modo que $s = s_1$ sea uno de los polos dominantes en lazo cerrado. Determine los valores de T_1 y β a partir de las condiciones de magnitud y de ángulo:

$$\left| K_c \left(\frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} \right) G(s_1) \right| = 1$$

$$\angle \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} = \phi$$

5. Utilizando el valor de β que se acaba de calcular, seleccione T_2 de modo que

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| \doteq 1$$

$$-5^{\circ} < \angle \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} < 0^{\circ}$$

El valor de βT_2, la constante de tiempo mayor del compensador de retardo-adelanto, no debe ser demasiado grande con el fin de que pueda materializarse físicamente. (Un ejemplo del diseño de un compensador de retardo-adelanto cuando $\gamma = \beta$ se muestra en el Ejemplo 6-9.)

EJEMPLO 6-8 Considere el sistema de control de la Figura 6-55. La función de transferencia del camino directo es

$$G(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$$

Este sistema tiene polos en lazo cerrado en

$$s = -0.2500 \pm j1.9843$$

El factor de amortiguamiento relativo es 0.125, la frecuencia natural no amortiguada es de 2 rad/seg y la constante de error estático de velocidad es de 8 seg^{-1}.

Se desea que el factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes en lazo cerrado sea igual a 0.5, aumentar la frecuencia natural no amortiguada a 5 rad/seg y la constante de error estático de velocidad a 80 seg^{-1}. Diseñe un compensador apropiado para cumplir todas las especificaciones de comportamiento.

Supóngase que se utiliza un compensador de retardo-adelanto que tiene la función de transferencia

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right) \qquad (\gamma > 1,\ \beta > 1)$$

donde γ no es igual a β. En este caso, el sistema compensado tiene la función de transferencia

$$G_c(s)G(s) = K_c\left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right)G(s)$$

A partir de las especificaciones de comportamiento, los polos dominantes en lazo cerrado deben estar en

$$s = -2.50 \pm j4.33$$

Debido a que

$$\left.\angle\frac{4}{s(s+0.5)}\right|_{s=-2.50+j4.33} = -235^{\circ}$$

la parte de adelanto de fase del compensador de retardo-adelanto debe contribuir con 55° para que el lugar de las raíces pase por la localización deseada de los polos dominantes en lazo cerrado.

Para diseñar la parte de adelanto de fase del compensador, primero se determina la localización del cero y el polo que dan una aportación de 55°. Existen muchas opciones de conseguir esto, pero aquí se elige el cero en $s = -0.5$, para que cancele el polo en $s = -0.5$ de la planta. Una vez elegido el cero, el polo se sitúa de modo que la contribución de ángulo sea 55°. Mediante un cálculo simple o un análisis gráfico, el polo debe situarse en $s = -5.02$. Por tanto, la parte de adelanto de fase del compensador de retardo-adelanto se convierte en

$$K_c\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}} = K_c\frac{s+0.5}{s+5.02}$$

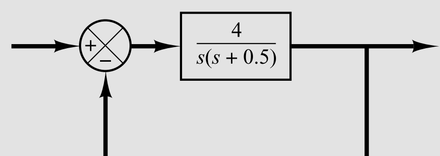


Figura 6-55. Sistema de control.

Así,

$$T_1 = 2, \qquad \gamma = \frac{5.02}{0.5} = 10.04$$

A continuación se determina el valor de K_c a partir de la condición de magnitud:

$$\left| K_c \frac{s+0.5}{s+5.02} \frac{4}{s(s+0.5)} \right|_{s=-2.5+j4.33} = 1$$

De este modo,

$$K_c = \left| \frac{(s+5.02)s}{4} \right|_{s=-2.5+j4.33} = 6.26$$

La parte de retardo de fase del compensador se diseña del modo siguiente. Primero se determina el valor de β que satisfaga el requisito sobre la constante de error estático de velocidad:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sK_c \frac{\beta}{\gamma} G(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s(6.26) \frac{\beta}{10.04} \frac{4}{s(s+0.5)} = 4.988\beta = 80$$

Por tanto, β se determina como

$$\beta = 16.04$$

Por último, se elige un valor de T_2 suficientemente grande para que

$$\left| \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{16.04T_2}} \right|_{s=-2.5+j4.33} \doteqdot 1, \qquad -5^{\circ} < \angle \left. \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{16.04T_2}} \right|_{s=-2.5+j4.33} < 0^{\circ}$$

Se deben elegir varios valores para T_2 y comprobar si la magnitud y condiciones de ángulo son satisfactorias. Después de cálculos sencillos tenemos que $T_2 = 5$

$$1 > \text{magnitud} > 0.98, \qquad -2{,}10^{\circ} < \text{ángulo} < 0^{\circ}$$

Como $T_2 \doteqdot 5$ (o cualquier otro número mayor que 5) satisface los dos requisitos anteriores, se selecciona

$$T_2 = 5$$

Ahora la función de transferencia del compensador de retardo-adelanto diseñado se obtiene mediante

$$G_c(s) = (6.26)\left(\frac{s + \frac{1}{2}}{s + \frac{10.04}{2}} \right)\left(\frac{s + \frac{1}{5}}{s + \frac{1}{16.04 \times 5}} \right)$$

$$= 6.26\left(\frac{s+0.5}{s+5.02}\right)\left(\frac{s+0.2}{s+0.01247}\right)$$

$$= \frac{10(2s+1)(5s+1)}{(0.1992s+1)(80.19s+1)}$$

El sistema compensado tendrá la función de transferencia en lazo abierto

$$G_c(s)G(s) = \frac{25.04(s + 0.2)}{s(s + 5.02)(s + 0.01247)}$$

Debido a la cancelación de los términos $(s + 0.5)$, el sistema compensado es de tercer orden. (Matemáticamente esta cancelación es exacta, pero en la práctica no lo es, debido a que, por lo general, al obtener el modelo matemático del sistema son necesarias algunas aproximaciones y, como resultado, las constantes de tiempo no son exactas.) La gráfica del lugar de las raíces del sistema compensado se muestra en la Figura 6-56(a). Una vista ampliada de la gráfica del lugar de las raíces cerca del origen se muestra en la Figura 6-56(b). Debido a que la contribución de ángulo de la parte de retardo de fase del compensador de retardo-adelanto es muy pequeña, sólo hay un cambio pequeño en la localización de los polos dominantes en lazo cerrado a partir de la localización deseada, $s = -2.5 \pm j4.33$.

$$s(s + 5.02)(s + 0.01247) + 25.04(s + 0.2) = 0$$

o

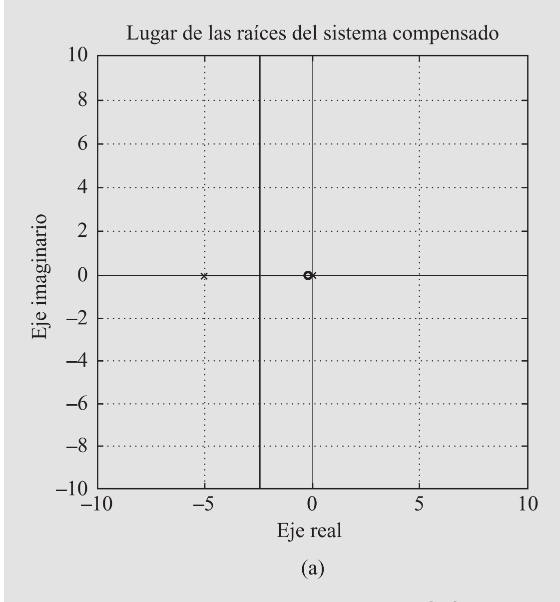
$$s^3 + 5.0325s^2 + 25.1026s + 5.008 = (s + 2.4123 + j4.2756)(s + 2.4123 - j4.2756)(s + 0.2078) = 0$$

De hecho, los nuevos polos en lazo cerrado se localizan en

$$s = -2.4123 \pm j4.2756$$

El nuevo factor de amortiguamiento relativo es $\zeta = 0.491$. De este modo, el sistema compensado cumple todas las especificaciones de comportamiento requeridas. El tercer polo en lazo cerrado del sistema compensado se localiza en $s = -0.2078$. Como este polo está muy cerca del cero en $s = -0.2$, el efecto de este polo sobre la respuesta es pequeño. (Observe que, en general, si un polo y un cero están cercanos entre sí sobre el eje real negativo cerca del origen, su combinación producirá una larga cola de amplitud pequeña en la respuesta transitoria.)

Las curvas de respuesta a un escalón unitario y las curvas de respuesta a una rampa unitaria antes y después de la compensación se muestran en la Figura 6.57. (Obsérvese una larga cola de pequeñas amplitudes en la respuesta a un escalón unitario del sistema compensado.)



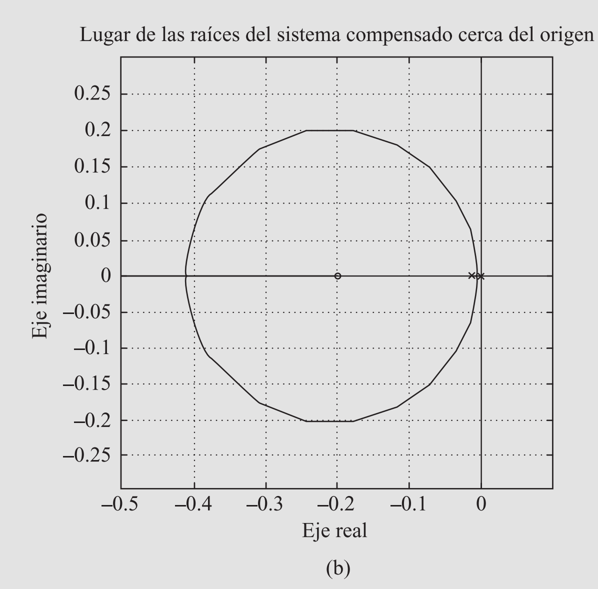


Figura 6-56. (a) Gráfica del lugar de las raíces del sistema compensado; (b) gráfica del lugar de las raíces cerca del origen.

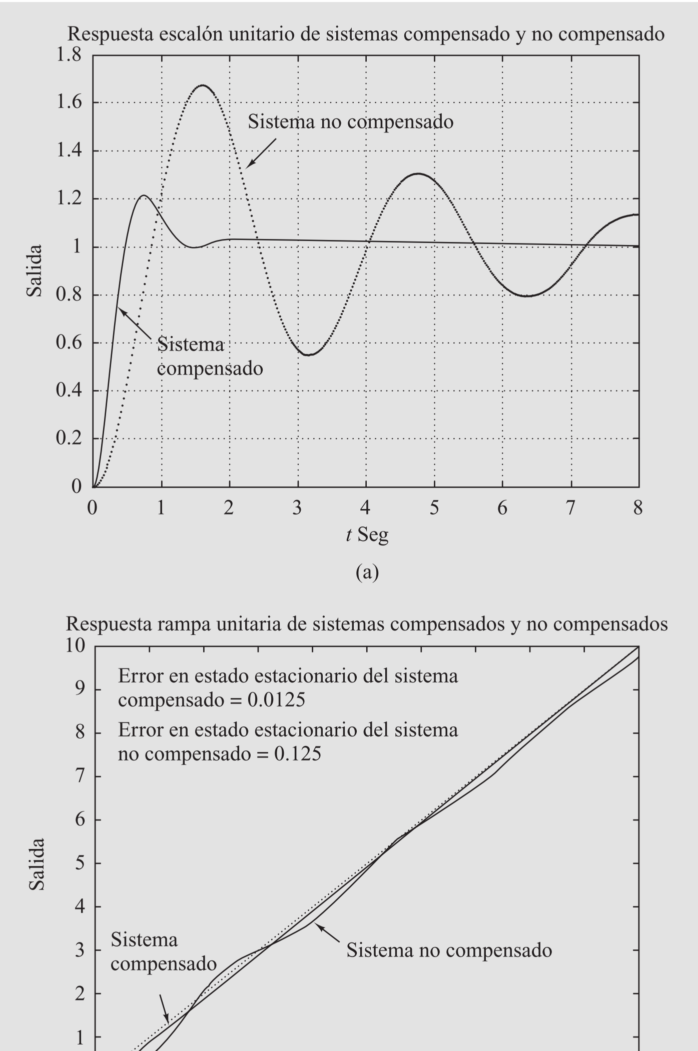


Figura 6.57. Curvas de respuesta transitoria para el sistema compensado y el sistema sin compensar. (a) Curvas de respuesta a un escalón unitario; (b) curvas de respuesta a una rampa unitaria.

EJEMPLO 6-9 Considere el sistema de control del Ejemplo 6-8. Suponga que se utiliza un compensador de retardo-adelanto de la forma obtenida mediante la Ecuación (6-24), o bien

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \qquad (\beta > 1)$$

Suponiendo que las especificaciones son iguales a las obtenidas en el Ejemplo 6-8, diseñe un compensador $G_c(s)$.

Las localizaciones deseadas para los polos dominantes en lazo cerrado están en

$$s = -2.50 \pm j4.33$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \cdot \frac{4}{s(s + 0.5)}$$

Como el requisito sobre la constante de error estático de velocidad K_v es de 80 seg^{-1}, se tiene que

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s \to 0} K_c \frac{4}{0.5} = 8K_c = 80$$

Por tanto,

$$K_c = 10$$

La constante de tiempo T_1 y el valor de β se determinan a partir de

$$\left|\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}}\right| \left|\frac{40}{s(s + 0.5)}\right|_{s=-2.5+j4.33} = \left|\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}}\right| \frac{8}{4.77} = 1 \quad , \quad \left.\angle\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}}\right|_{s=-2.5+j4.33} = 55^\circ$$

(La deficiencia de ángulo de 55º se obtuvo en el Ejemplo 6-8.) Haciendo referencia a la Figura 6-58, es fácil localizar los puntos A y B tales que

$$\angle APB = 55^\circ, \qquad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{4.77}{8}$$

(Utilice un método gráfico o un método trigonométrico.) El resultado es

$$\overline{AO} = 2.38, \qquad \overline{BO} = 8.34$$

o bien

$$T_1 = \frac{1}{2.38} = 0.420, \qquad \beta = 8.34T_1 = 3.503$$

Por tanto, la parte de adelanto de fase de la red de retardo-adelanto se convierte en

$$10\left(\frac{s + 2.38}{s + 8.34}\right)$$

Para la parte de retardo de fase, se selecciona T_2 tal que satisface las condiciones

$$\left|\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{3.503T_2}}\right|_{s=-2.5+j4.33} \doteq 1, \qquad -5^\circ < \left.\angle\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{3.503T_2}}\right|_{s=-2.5+j4.33} < 0^\circ$$

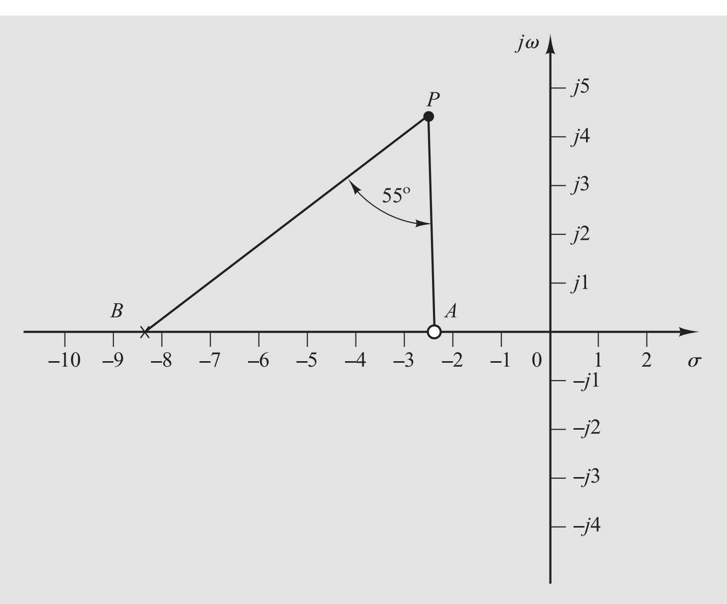


Figura 6-58. Determinación de la localización deseada de polos y ceros.

Mediante sencillos cálculos encontramos que si escogemos $T_2 = 5$, entonces

$$1 > \text{magnitud} > 0.98, \qquad -1.5^\circ < \text{ángulo} < 0^\circ$$

y si escogemos $T_2 = 10$, entonces

$$1 > \text{magnitud} > 0.99, \qquad -1^\circ < \text{ángulo} < 0^\circ$$

Como T_2 es una de las constantes de tiempo del compensador de retardo-adelanto, no debería ser demasiado grande. Si $T_2 = 10$ puede ser aceptable desde un punto de vista práctico, podemos seleccionar $T_2 = 10$. Entonces

$$\frac{1}{\beta T_2} = \frac{1}{3.503 \times 10} = 0.0285$$

Por tanto, el compensador de retardo-adelanto se convierte en

$$G_c(s) = (10)\left(\frac{s + 2.38}{s + 8.34}\right)\left(\frac{s + 0.1}{s + 0.0285}\right)$$

El sistema compensado tendrá la función de transferencia en lazo abierto

$$G_c(s)G(s) = \frac{40(s + 2.38)(s + 0.1)}{(s + 8.34)(s + 0.0285)s(s + 0.5)}$$

En este caso no ocurre una cancelación y el sistema compensado es de cuarto orden. Debido a que la contribución de ángulo de la parte de retardo de fase de la red de retardo-adelanto es muy pequeña, los polos dominantes en lazo cerrado se localizan muy cerca de la posición deseada. De hecho, la localización de los polos dominantes en lazo cerrado se puede encontrar a partar de la ecuación característica como sigue: La ecuación característica del sistema compensado es:

$$(s + 8.34)(s + 0.0285)s(s + 0.5) + 40(s + 2.38)(s + 0.1) = 0$$

La ecuación característica es

$$\begin{aligned} & s^4 + 8.8685s^3 + 44.4219s^2 + 99.3188s + 9.52 \\ & = (s + 2.4539 + j4.3099)(s + 2.4539 - j4.3099)(s + 0.1003)(s + 3.8604) = 0 \end{aligned}$$

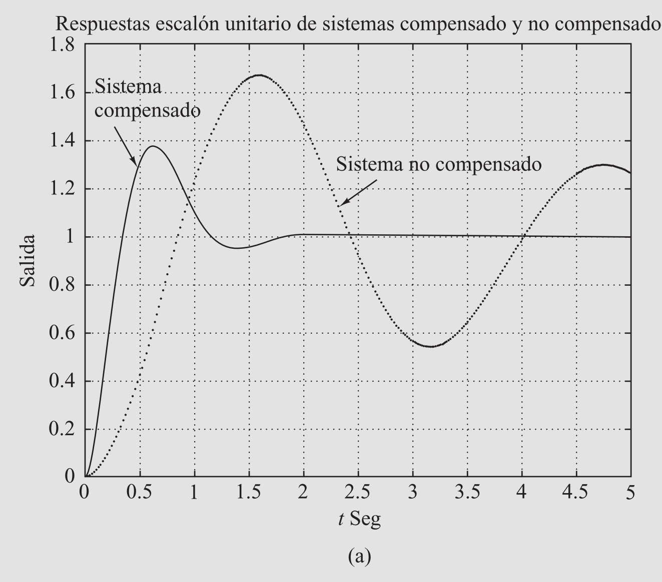
Los polos en lazo cerrado dominantes se localizan en

$$s = -2.4539 \pm j4.3099$$

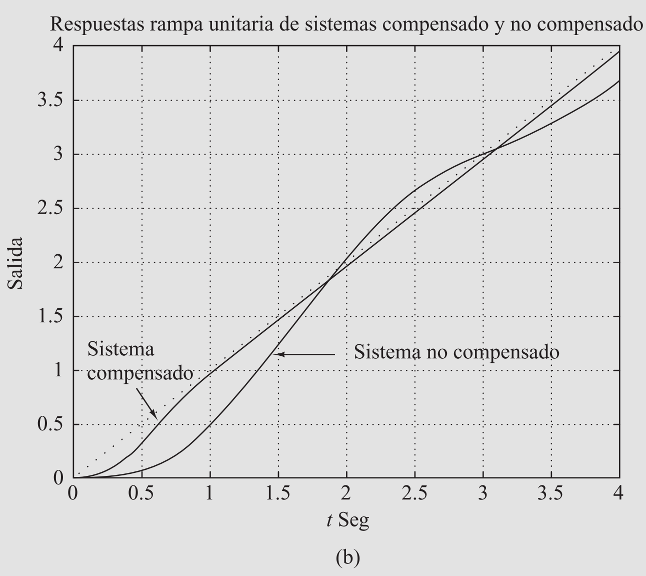
Los otros polos en lazo cerrado se encuentran en

$$s = -0.1003; \qquad s = -3.8604$$

Dado que el polo en lazo cerrado en $s = -0.1003$ está muy cerca de un cero en $s = -0.1$, casi se cancelan uno al otro. Por tanto, el efecto de este polo en lazo cerrado es muy pequeño. El polo en lazo cerrado restante ($s = -3.8604$) no cancela realmente al cero en $s = -2.4$. El efecto de este cero es provocar una mayor sobreelongación en la respuesta escalón que el de un sistema similar sin dicho cero. Las curvas de respuesta a un escalón unitario de los sistemas compensado y sin compensar se muestran en la Figura 6.59(a). Las curvas de respuesta a una rampa unitaria para ambos sistemas se muestran en la Figura 6.59(b).



(a)



(b)

Figura 6-59. (a) Curvas de respuestas a un escalón unitario para los sistemas compensado y sin compensar; (b) curvas de respuesta a una rampa unitaria para ambos sistemas.

La máxima sobreelongación en la respuesta a un escalón del sistema compensado es aproximadamente un 38%. (Esta es mucho mayor que la máxima sobreelongación del 21% en el diseño presentado en el Ejemplo 6-8.) Si $\gamma = \beta$, es posible disminuir un poco la máxima sobreelongación del 38% pero no hasta el 20%, como ocurre en este ejemplo. Observe que al no requerir $\gamma = \beta$, se tiene un parámetro adicional para jugar con él y poder reducir la máxima sobreelongación.

6-9 Compensación paralela

Hasta aquí se han presentado las técnicas de compesación serie utilizando compensadores de adelanto, retardo o retardo-adelanto. En esta sección se discute la técnica de compensación paralela. Debido a que en el diseño de la compensación paralela el controlador (o compensador) se encuentra en un lazo secundario, el diseño puede parecer más complicado que en el caso de la compensación serie. Sin embargo, no será complicado si se reescribe la ecuación característica para que tenga la misma forma que la ecuación característica para los sistemas de compensación serie. En esta sección se presenta un problema de diseño sencillo de compensación paralela.

Principio básico para diseñar sistemas de compensación paralelos. Haciendo referencia a la Figura 6-60(a), la función de transferencia en lazo cerrado para el sistema con compensación serie es

$$\frac{C}{R} = \frac{G_c G}{1 + G_c GH}$$

La ecuación característica es

$$1 + G_c GH = 0$$

Dadas G y H, el problema de diseño consiste en determinar el compesador G_c que satisfaga la especificación.

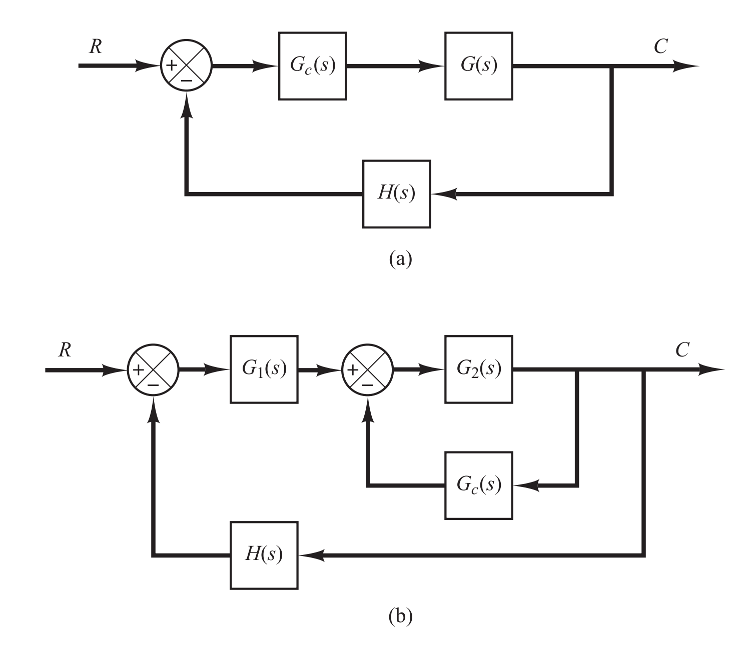


Figura 6-60. (a) Compensación serie; (b) compensación paralela o realimentada.

La función de transferencia en lazo cerrado para el sistema con compensación paralela [Figura 6-60(b)] es

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2}{1 + G_2G_c + G_1G_2H}$$

La ecuación característica es

$$1 + G_1G_2H + G_2G_c = 0$$

Dividiendo esta ecuación característica en la suma de los términos que no contiene G_c, se obtiene

$$1 + \frac{G_cG_2}{1 + G_1G_2H} = 0 \qquad (6\text{-}25)$$

Si se define

$$G_f = \frac{G_2}{1 + G_1G_2H}$$

la Ecuación (6-25) se convierte en

$$1 + G_cG_f = 0$$

Como G_f es una función de transferencia fija, el diseño de G_c llega a ser igual que en el caso de la compensación serie. Por tanto, el mismo método de diseño se aplica al sistema compensado paralelo.

Sistemas con realimentación de velocidad. Un sistema con realimentación de velocidad (sistema de realimentación con tacómetro) es un ejemplo de sistemas compensados paralelos. El controlador (o compensador) en estos sistemas es un elemento de ganancia. La ganancia del elemento realimentado en un lazo secundario se debe determinar cuidadosamente para que el sistema completo satisfaga las especificaciones de diseño dadas. La característica del sistema de realimentación de velocidad es que el parámetro variable no aparece como un factor multiplicativo en la función de transferencia de lazo abierto; por tanto, no es posible la aplicación directa de la técnica de diseño del lugar de las raíces. Sin embargo, si se reescribe la ecuación característica de tal forma que el parámetro variable aparezca como un factor multiplicativo, es posible utilizar el método del lugar de las raíces para el diseño.

Un ejemplo de diseño de un sistema de control utilizando la técnica de compensación paralela se presenta en el Ejemplo 6-10.

EJEMPLO 6-10 Considere el sistema de la Figura 6-61. Dibuje la gráfica del lugar de las raíces. A continuación determine el valor de k para que el factor de amortiguamiento de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.4.

En este caso el sistema contiene realimentación de velocidad. La función de transferencia en lazo abierto es

$$\text{Función de transferencia en lazo abierto} = \frac{20}{s(s+1)(s+4) + 20ks}$$

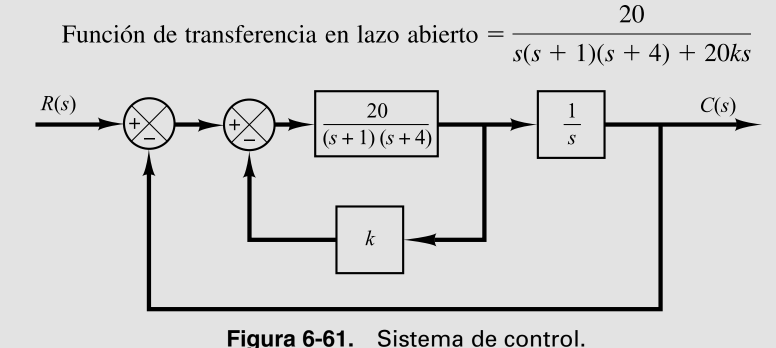


Figura 6-61. Sistema de control.

Observe que la variable k no aparece como un factor multiplicativo. La ecuación característica para el sistema es

$$s^3 + 5s^2 + 4s + 20ks + 20 = 0 \tag{6-26}$$

Se define

$$20k = K$$

La Ecuación (6-26) se convierte en

$$s^3 + 5s^2 + 4s + Ks + 20 = 0 \tag{6-27}$$

Dividiendo ambos lados de la Ecuación (6-27) por la suma de los términos que no contienen K, se obtiene

$$1 + \frac{Ks}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} = 0$$

o bien

$$1 + \frac{Ks}{(s + j2)(s - j2)(s + 5)} = 0 \tag{6-28}$$

La Ecuación (6-28) tiene la forma de la Ecuación (6-11).

A continuación se dibuja el lugar de las raíces del sistema dado por la Ecuación (6-28). Oberve que los polos en lazo abierto se localizan en $s = j2$, $s = -j2$, $s = -5$, y el cero en lazo abierto se localiza en $s = 0$. El lugar de las raíces existe sobre el eje real entre 0 y -5. Por tanto,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{Ks}{(s + j2)(s - j2)(s + 5)} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^2}$$

Se tiene

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{2} = \pm 90^\circ$$

La intersección de las asíntotas con el eje real se calcula a partir de

$$\lim_{s\to\infty} \frac{Ks}{s^3 + 5s^2 + 4s + 20} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^2 + 5s + \cdots} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{(s + 2.5)^2}$$

donde

$$s = -2.5$$

El ángulo de salida (ángulo θ) del polo en $s = j2$ se obtiene como sigue:

$$\theta = 180^\circ - 90^\circ - 21.8^\circ + 90^\circ = 158.2^\circ$$

Por tanto, el ángulo de salida del polo $s = j2$ es 158.2º. La Figura 6-62 muestra la gráfica del lugar de las raíces para el sistema. Observe que dos ramas del lugar de las raíces parten de los polos en $s = \pm j2$ y terminan en los ceros en el infinito. La rama restante parte del polo en $s = -5$ y termina en el cero en $s = 0$.

Observe que los polos en lazo cerrado $\zeta = 0.4$ deben encontrarse en líneas rectas que pasan por el origen y hacen ángulos de $\pm 66.42^\circ$ con el eje real negativo. En este caso, hay dos intersecciones de la rama del lugar de las raíces en el semiplano superior s y la línea recta de ángulo 66.42º. Por tanto, los dos valores de K darán un factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos en lazo cerrado igual a 0.4. En el punto P el valor de K es

$$K = \left| \frac{(s + j2)(s - j2)(s + 5)}{s} \right|_{s = -1.0490 + j2.4065} = 8.9801$$

Por tanto,

$$k = \frac{K}{20} = 0.4490 \qquad \text{en el punto } P$$

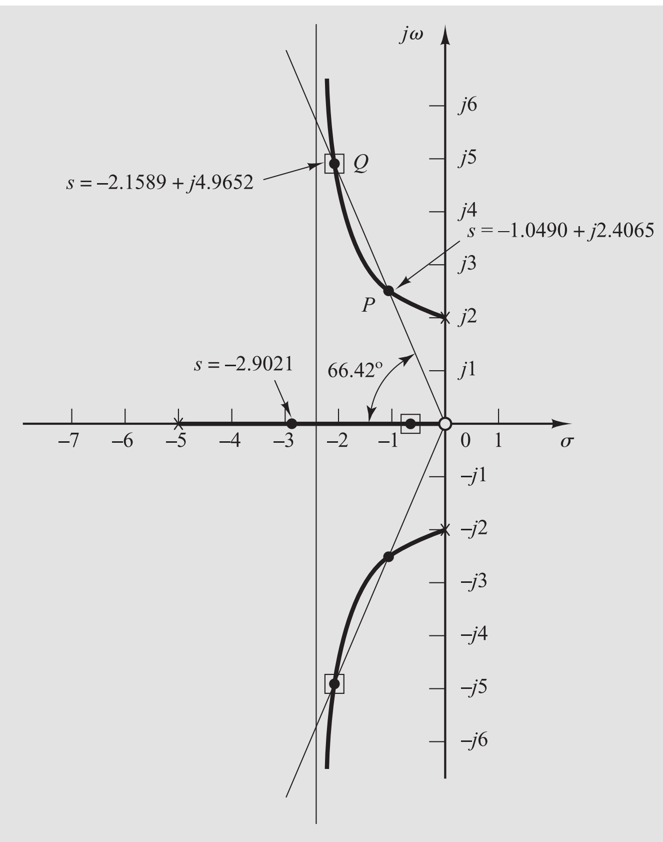


Figura 6-62. Gráfica del lugar de las raíces para el sistema de la Figura 6-61.

En el punto Q, el valor de K es

$$K = \left| \frac{(s + j2)(s - j2)(s + 5)}{s} \right|_{s = -2.1589 + j4.9652} = 28.260$$

Por tanto,

$$k = \frac{K}{20} = 1.4130 \qquad \text{en el punto } Q$$

Así, se tienen dos soluciones para este problema. Para $k = 0.4490$ los tres polos en lazo cerrado se localizan en

$$s = -1.0490 + j2.4065, \qquad s = -1.0490 - j2.4065, \qquad s = -2.9021$$

Para $k = 1.4130$ los tres polos en lazo cerrado se localizan en

$$s = -2.1589 + j4.9652, \qquad s = -2.1589 - j4.9652, \qquad s = -0.6823$$

Es importante señalar que el cero en el origen es el cero en lazo abierto pero no es el cero en lazo cerrado. Esto es evidente, debido a que el sistema original que se muestra en la Figura 6-61 no tiene un cero en lazo cerrado; por tanto

$$\frac{G(s)}{R(s)} = \frac{20}{s(s + 1)(s + 4) + 20(1 + ks)}$$

El cero en lazo abierto en $s = 0$ se introdujo en el proceso para modificar la ecuación característica para que la variable $K = 20k$ apareciese como un factor multiplicativo.

Se han obtenido dos valores diferentes de k para satisfacer el requisito de que el factor de amortiguamiento de los polos dominantes en lazo cerrado sea igual a 0.4. La función de transferencia en lazo cerrado con $k = 0.4490$ viene dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20}{s^3 + 5s^2 + 12.98s + 20}$$

$$= \frac{20}{(s + 1.0490 + j2.4065)(s + 1.0490 - j2.4065)(s + 2.9021)}$$

La función de transferencia en lazo cerrado con $k = 1.4130$ está dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20}{s^3 + 5s^2 + 32.26s + 20}$$

$$= \frac{20}{(s + 2.1589 + j4.9652)(s + 2.1589 - j4.9652)(s + 0.6823)}$$

Observe que el sistema con $k = 0.4490$ tiene un par de polos complejos conjugados dominantes en lazo cerrado, mientras que en el sistema $k = 1.4130$ el polo real en lazo cerrado en $s = -0.6823$ es dominante, y los polos complejos conjugados en lazo cerrado no son dominantes. En este caso la característica de la respuesta está principalmente determinada por el polo real en lazo cerrado.

A continuación se comparan las respuestas a un escalón unitario de ambos sistemas. El Programa MATLAB 6-14 se puede utilizar para dibujar las curvas de la respuesta a un escalón en un único diagrama. Las curvas resultantes de la respuesta a un escalón unitario [$c_1(t)$ para $k = 0.4490$ y $c_2(t)$ para $K = 1.4130$] se muestran en la Figura 6-63.

MATLAB Programa 6-14

```
% ***** Introduzca los numeradores y denominadores de sistemas con
% k = 0.4490 y k = 1.4130, respectivamente. *****

num1 = [20];
den1 = [1  5  12.98  20];
num2 = [20];
den2 = [1  5  32.26  20];
t = 0:0.1:10;
c1 = step(num1,den1,t);
c2 = step(num2,den2,t);
plot(t,c1,t,c2)
text(2.5,1.12,'k = 0.4490')
text(3.7,0.85,'k = 1.4130')
grid
title('Respuestas escalón unitario de dos sistemas')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salidas c1 y c2')
```

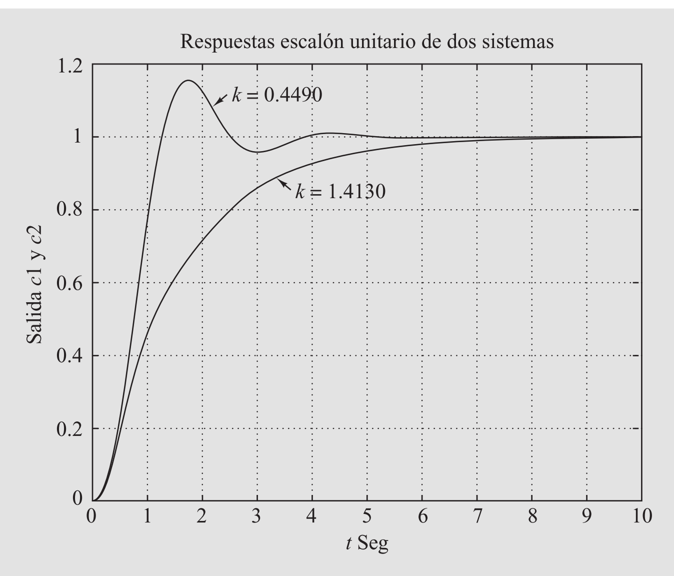


Figura 6-63. Curvas de la respuesta a un escalón unitario para el sistema de la Figura 6-61 cuando el factor de amortiguamiento ζ de los polos dominantes en lazo cerrado es igual a 0.4 (hay dos posibles valores de k que dan un factor de amortiguamiento ζ igual a 0.4).

De la Figura 6-63 se observa que la respuesta del sistema con $k = 0.4490$ es oscilatoria. (El efecto del polo en lazo cerrado en $s = -2.9021$ sobre la respuesta a un escalón unitario es pequeño). Para el sistema con $k = 1.4130$ las oscilaciones debidas a los polos en lazo cerrado en $s = -2.1589 \pm j4.9652$ se amortiguan mucho más rápidamente que la respuesta puramente exponencial debida al polo en lazo cerrado en $s = -0.6823$.

El sistema con $k = 0.4490$ (que presenta una respuesta más rápida con una sobreelongación relativamente pequeña) tiene una caracterísa de respuesta mucho mejor que el sistema con $k = 1.4130$ (que presenta una respuesta sobreamortiguada lenta). Por tanto, para el sistema actual se escogería $k = 0.4490$.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-6-1. Dibuje los lugares de las raíces para el sistema de la Figura 6-64(a). (Se supone que la ganancia K es positiva.) Observe que para valores pequeños o grandes de K el sistema es sobreamortiguado y para valores medios de K es subamortiguado.

Solución. El procedimiento para dibujar los lugares de las raíces es el siguiente:

1. Sitúe los polos y ceros en lazo abierto sobre el plano complejo. Existen lugares de las raíces sobre el eje real negativo entre 0 y -1 y entre -2 y -3.
2. El número de polos en lazo abierto y el de ceros finitos son iguales. Esto significa que no hay asíntotas en la región compleja del plano s.
3. Determine los puntos de ruptura y de ingreso. La ecuación característica para el sistema es

$$1 + \frac{K(s+2)(s+3)}{s(s+1)} = 0$$

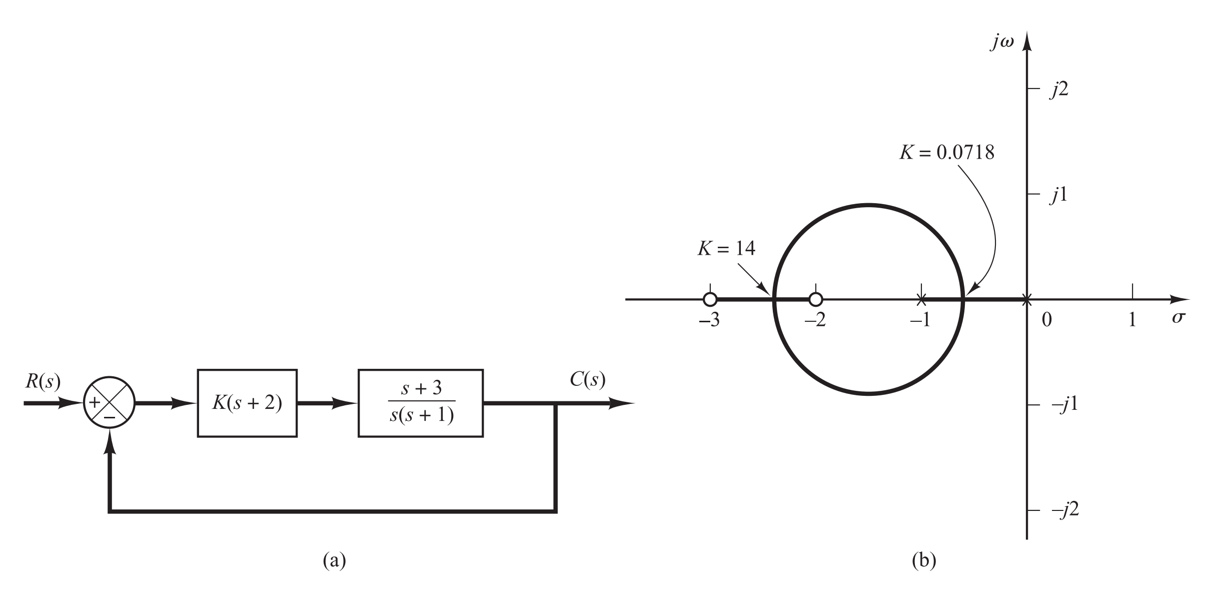


Figura 6-64. (a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar de las raíces.

o bien

$$K = -\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

Los puntos de ruptura y de ingreso se determinan a partir de

$$\begin{aligned}\frac{dK}{ds} &= -\frac{(2s+1)(s+2)(s+3) - s(s+1)(2s+5)}{[(s+2)(s+3)]^2} \\ &= -\frac{4(s+0.634)(s+2.366)}{[(s+2)(s+3)]^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

del modo siguiente:

$$s = -0.634, \qquad s = -2.366$$

Observe que ambos puntos están sobre los lugares de las raíces. Por tanto, son puntos de ruptura y de ingreso reales. En el punto $s = -0.634$, el valor de K es

$$K = -\frac{(-0.634)(0.366)}{(1.366)(2.366)} = 0.0718$$

Asimismo, en $s = -2.366$,

$$K = -\frac{(-2.366)(-1.366)}{(-0.366)(0.634)} = 14$$

(Debido a que el punto $s = -0.634$ se encuentra entre dos polos, es un punto de ruptura, y debido a que el punto $s = -2.366$ se encuentra entre dos ceros, es un punto de ingreso.)

4. Determine un número suficiente de puntos que satisfagan la condición de ángulo. (Se obtiene que el lugar de las raíces es un círculo con centro en -1.5 que atraviesa los puntos de ruptura y de ingreso.) La gráfica del lugar de las raíces para este sistema se muestra en la Figura 6-64(b).

Observe que este sistema es estable para cualquier valor positivo de K, puesto que todos los lugares de las raíces se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s.

Los valores pequeños de K ($0 < K < 0.0718$) corresponden a un sistema sobreamortiguado. Los valores medios de K ($0.0718 < K < 14$) corresponden a un sistema subamortiguado. Por último, los valores grandes de K ($14 < K$) corresponden a un sistema sobreamortiguado. Para un valor grande de K, el estado estacionario se alcanza en un tiempo mucho menor que para un valor pequeño de K.

El valor de K debe ajustarse para que el comportamiento del sistema sea óptimo, de acuerdo con un índice de comportamiento determinado.

A-6-2. Dibuje los lugares de las raíces para el sistema de la Figura 6-65(a).

Solución. Existe un lugar de las raíces sobre el eje real entre los puntos $s = -1$ y $s = -3.6$. Las asíntotas se determinan del modo siguiente:

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180^{\circ}(2k+1)}{3-1} = 90^{\circ},\ -90^{\circ}$$

La intersección de las asíntotas y el eje real se encuentra a partir de

$$s = -\frac{0+0+3.6-1}{3-1} = -1.3$$

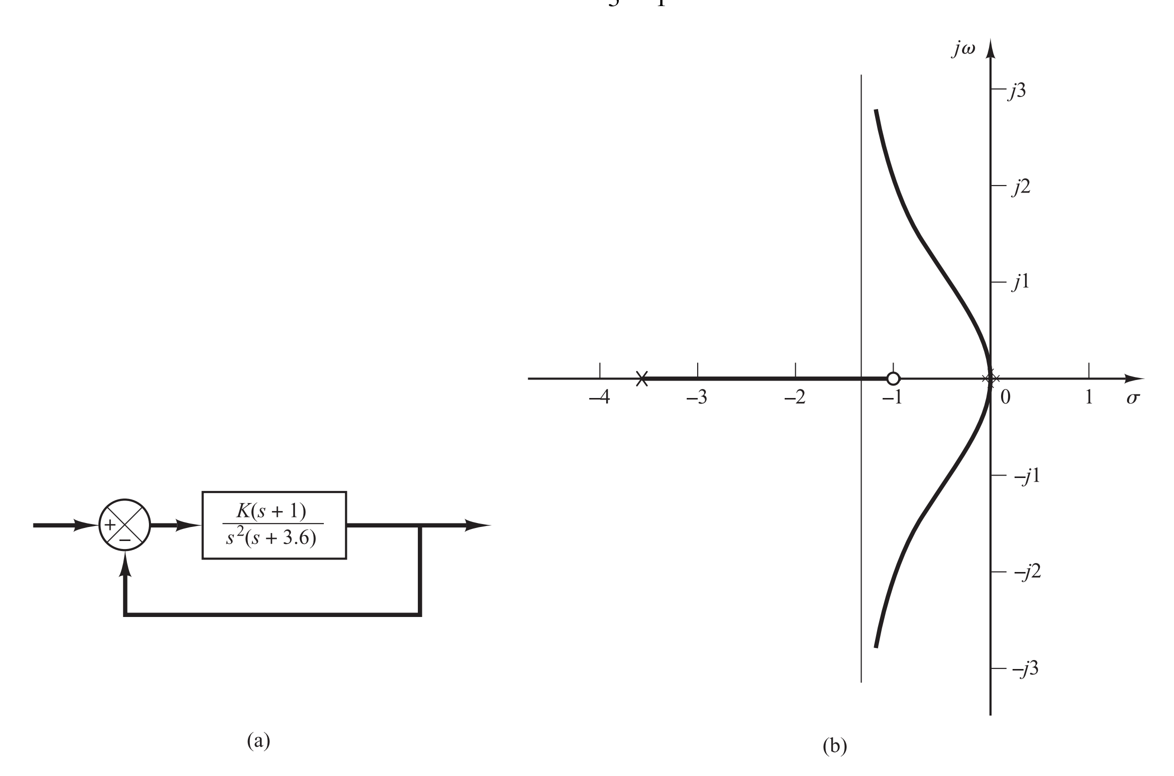


Figura 6-65. (a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar de las raíces.

Como la ecuación característica es

$$s^3 + 3.6s^2 + K(s + 1) = 0$$

se tiene que

$$K = -\frac{s^3 + 3.6s^2}{s + 1}$$

Los puntos de ruptura y de ingreso se encuentran a partir de

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(3s^2 + 7.2s)(s + 1) - (s^3 + 3.6s^2)}{(s + 1)^2} = 0$$

o bien

$$s^3 + 3.3s^2 + 3.6s = 0$$

de donde se obtiene

$$s = 0, \qquad s = -1.65 + j0.9367, \qquad s = -1.65 - j0.9367$$

El punto $s = 0$ corresponde al punto de ruptura real. Pero los puntos $s = -1.65 \pm j0.9367$ no son ni de ruptura ni de ingreso, debido a que los valores de la ganancia K correspondientes se convierten en cantidades complejas.

Para verificar los puntos en los que las ramas del lugar de las raíces cruzan el eje imaginario, se sustituye $s = j\omega$ en la ecuación característica.

$$(j\omega)^3 + 3.6(j\omega)^2 + Kj\omega + K = 0$$

o bien

$$(K - 3.6\omega^2) + j\omega(K - \omega^2) = 0$$

Observe que esta ecuación se satisface sólo si $\omega = 0$, $K = 0$. Debido a la presencia de un polo doble en el origen, el lugar de las raíces es tangente al eje $j\omega$ en $\omega = 0$. Las ramas del lugar de las raíces no cruzan el eje $j\omega$. La Figura 6-65(b) es un dibujo del lugar de las raíces para este sistema.

A-6-3. Dibuje los lugares de las raíces para el sistema de la Figura 6-66(a).

Solución. Existe un lugar de las raíces sobre el eje real entre el punto $s = -0.4$ y $s = -3.6$. Los ángulos de las asíntotas se obtienen del modo siguiente:

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{3 - 1} = 90^\circ,\ -90^\circ$$

La intersección de las asíntotas y el eje real se obtiene a partir de

$$s = -\frac{0 + 0 + 3.6 - 0.4}{3 - 1} = -1.6$$

A continuación se buscan los puntos de ruptura. Como la ecuación característica es

$$s^3 + 3.6s^2 + Ks + 0.4K = 0$$

se tiene que

$$K = -\frac{s^3 + 3.6s^2}{s + 0.4}$$

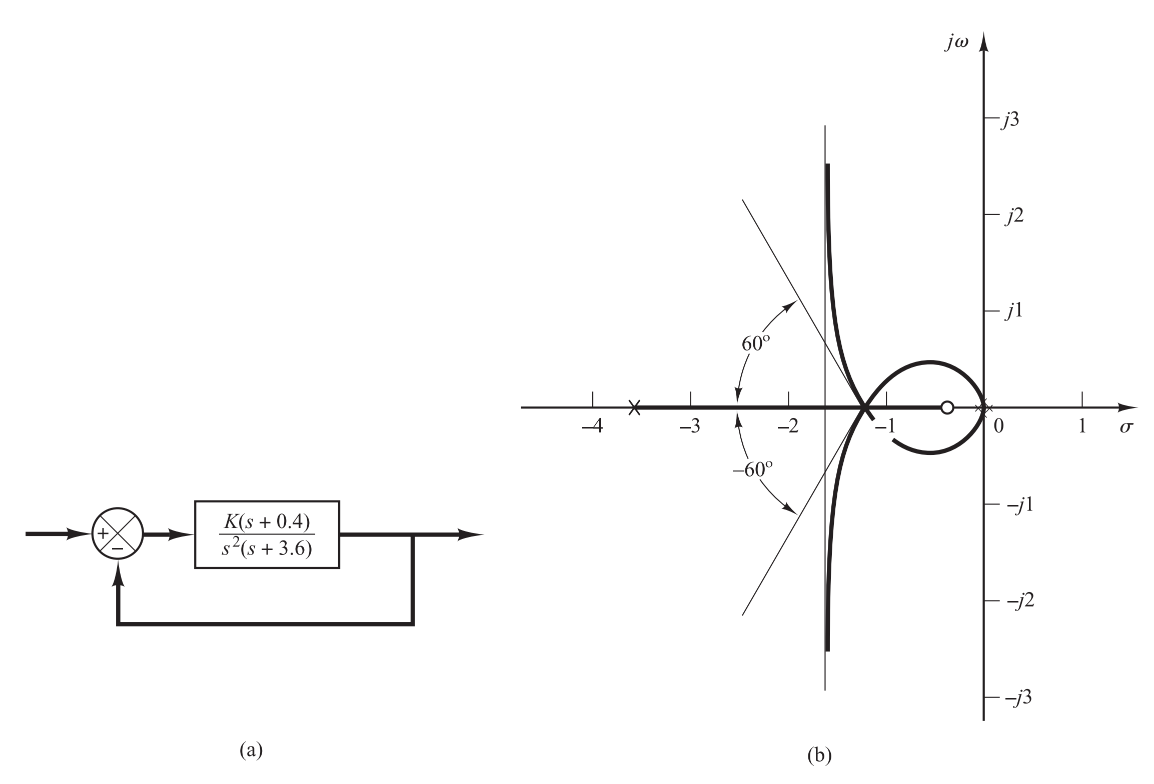


Figura 6-66. (a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar de las raíces.

Los puntos de ruptura y de ingreso se encuentran a partir de

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(3s^2 + 7.2s)(s + 0.4) - (s^3 + 3.6s^2)}{(s + 0.4)^2} = 0$$

de donde se obtiene

$$s^3 + 2.4s^2 + 1.44s = 0$$

o bien

$$s(s + 1.2)^2 = 0$$

Por tanto, los puntos de ruptura o de ingreso están en $s = 0$ y $s = -1.2$. Observe que $s = -1.2$ es una raíz doble. Cuando hay una raíz doble en $dK/ds = 0$ en el punto $s = -1.2$, $d^2K/(ds^2) = 0$ en este punto. El valor de la ganancia K en el punto $s = -1.2$ es

$$K = -\frac{s^3 + 3.6s^2}{s + 4}\bigg|_{s=-1.2} = 4.32$$

Esto significa que con $K = 4.32$ la ecuación característica tiene una raíz triple en el punto $s = -1.2$, lo que se comprueba fácilmente del modo siguiente:

$$s^3 + 3.6s^2 + 4.32s + 1.728 = (s + 1.2)^3 = 0$$

Por tanto, hay tres ramas del lugar de las raíces en el punto $s = -1.2$. Los ángulos de salida en el punto $s = -1.2$ de las ramas del lugar de las raíces que se aproximan a las asíntotas son $\pm 180°/3$, es decir, 60° y −60°. (Véase el Problema **A-6-4**.)

Por último, se examina si las ramas del lugar de las raíces cruzan el eje imaginario. Sustituyendo $s = j\omega$ en la ecuación característica, se tiene que

$$(j\omega)^3 + 3.6(j\omega)^2 + K(j\omega) + 0.4K = 0$$

o bien

$$(0.4K - 3.6\omega^2) + j\omega(K - \omega^2) = 0$$

Esta ecuación se satisface sólo si $\omega = 0$, $K = 0$. En el punto $\omega = 0$, el lugar de las raíces es tangente al eje $j\omega$ por la presencia de un polo doble en el origen. No hay puntos en los que las ramas del lugar de las raíces crucen el eje imaginario.

Un dibujo de los lugares de las raíces para este sistema aparece en la Figura 6-66(b).

A-6-4. Haciendo referencia al problema **A-6-3**, obtenga las ecuaciones para las ramas del lugar de las raíces del sistema de la Figura 6-66(a). Demuestre que las ramas del lugar de las raíces cruzan el eje real en el punto de ruptura en los ángulos $\pm 60^{\circ}$.

Solución. Las ecuaciones para las ramas del lugar de las raíces se obtienen a partir de la condición de ángulo

$$\angle \frac{K(s + 0.4)}{s^2(s + 3.6)} = \pm 180^{\circ}(2k + 1)$$

que puede reescribirse como

$$\angle s + 0.4 - 2\angle s - \angle s + 3.6 = \pm 180^{\circ}(2k + 1)$$

Sustituyendo $s = \sigma + j\omega$ se obtiene

$$\angle \sigma + j\omega + 0.4 - 2\angle \sigma + j\omega - \angle \sigma + j\omega + 3.6 = \pm 180^{\circ}(2k + 1)$$

o bien

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 0.4}\right) - 2\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 3.6}\right) = \pm 180^{\circ}(2k + 1)$$

Volviendo a ordenar, se obtiene

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 0.4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 3.6}\right) \pm 180^{\circ}(2k + 1)$$

Tomando las tangentes a ambos lados de esta última ecuación, y considerando que

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma + 3.6}\right) \pm 180^{\circ}(2k + 1)\right] = \frac{\omega}{\sigma + 3.6}$$

se obtiene

$$\frac{\dfrac{\omega}{\sigma + 0.4} - \dfrac{\omega}{\sigma}}{1 + \dfrac{\omega}{\sigma + 0.4}\,\dfrac{\omega}{\sigma}} = \frac{\dfrac{\omega}{\sigma} + \dfrac{\omega}{\sigma + 3.6}}{1 - \dfrac{\omega}{\sigma}\,\dfrac{\omega}{\sigma + 3.6}}$$

que se simplifica a

$$\frac{\omega\sigma - \omega(\sigma + 0.4)}{(\sigma + 0.4)\sigma + \omega^2} = \frac{\omega(\sigma + 3.6) + \omega\sigma}{\sigma(\sigma + 3.6) - \omega^2}$$

o bien

$$\omega(\sigma^3 + 2.4\sigma^2 + 1.44\sigma + 1.6\omega^2 + \sigma\omega^2) = 0$$

que puede simplificarse todavía más a

$$\omega[\sigma(\sigma + 1.2)^2 + (\sigma + 1.6)\omega^2] = 0$$

Para $\sigma \neq -1.6$, se puede escribir esta última ecuación como

$$\omega\left[\omega - (\sigma + 1.2)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1.6}}\right]\left[\omega + (\sigma + 1.2)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1.6}}\right] = 0$$

de donde se obtienen las ecuaciones para el lugar de las raíces del modo siguiente:

$$\omega = 0$$

$$\omega = (\sigma + 1.2)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1.6}}$$

$$\omega = -(\sigma + 1.2)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1.6}}$$

La ecuación $\omega = 0$ representa el eje real. El lugar de las raíces para $0 \leqslant K \leqslant \infty$ está entre los puntos $s = -0.4$ y $s = -3.6$. (El eje real que no es este segmento y el origen $s = 0$ corresponde al lugar de las raíces para $-\infty \leqslant K < 0$.)

Las ecuaciones

$$\omega = \pm(\sigma + 1.2)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1.6}} \qquad (6\text{-}29)$$

representan las ramas complejas para $0 \leqslant K \leqslant \infty$. Estas dos ramas se encuentran entre $\sigma = -1.6$ y $\sigma = 0$. [Véase la Figura 6-66(b).] Las pendientes de las ramas de los lugares de las raíces complejas en el punto de ruptura ($\sigma = -1.2$) se encuentran calculando los valores de $d\omega/d\sigma$ de la Ecuación (6-29) en el punto $\sigma = -1.2$.

$$\left.\frac{d\omega}{d\sigma}\right|_{\sigma=-1.2} = \pm\left.\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma + 1.6}}\right|_{\sigma=-1.2} = \pm\sqrt{\frac{1.2}{0.4}} = \pm\sqrt{3}$$

Como $\tan^{-1}\sqrt{3} = 60^\circ$, las ramas del lugar de las raíces cortan al eje real con ángulos de $\pm 60^\circ$.

A-6-5. Considere el sistema de la Figura 6-67(a). Dibuje los lugares de las raíces para el sistema. Observe que para valores pequeños o grandes de K el sistema es subamortiguado y para valores medios de K es sobreamortizado.

Solución. Existe un lugar de las raíces sobre el eje real entre el origen y $-\infty$. Los ángulos de las asíntotas de las ramas de este lugar se obtienen como

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180^\circ(2k + 1)}{3} = 60^\circ,\ -60^\circ,\ 180^\circ$$

La intersección de las asíntotas y el eje real se localiza sobre el eje real en

$$s = -\frac{0 + 2 + 2}{3} = -.3333$$

Los puntos de ruptura y de ingreso se encuentran a partir de $dK/ds = 0$. Debido a que la ecuación característica es

$$s^3 + 4s^2 + 5s + K = 0$$

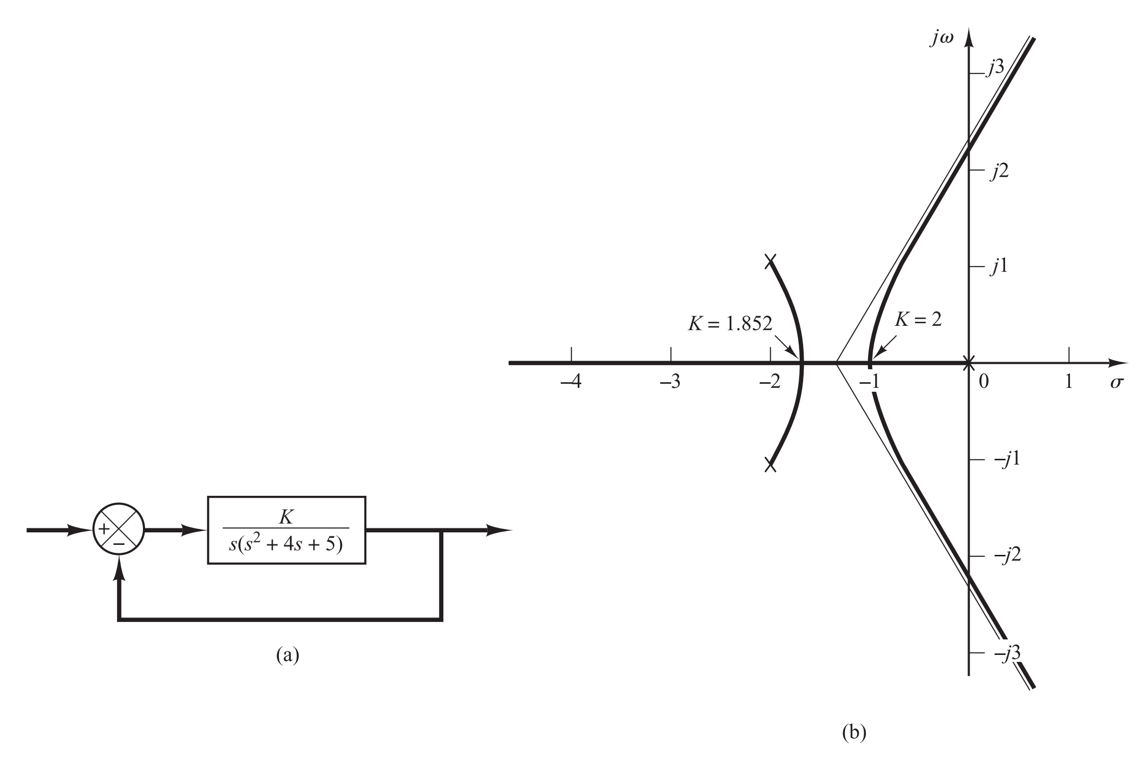


Figura 6-67. (a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar de las raíces.

se tiene que

$$K = -(s^3 + 4s^2 + 5s)$$

Ahora se establece

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 8s + 5) = 0$$

de donde se obtiene

$$s = -1, \qquad s = -1.6667$$

Debido a que estos puntos están sobre los lugares de las raíces, son puntos de ruptura y de ingreso reales. (En el punto $s = -1$, el valor de K es 2, y en el punto $s = -1.6667$, el valor de K es 1.852.)

El ángulo de salida de un polo complejo en la mitad superior del plano s se obtiene a partir de

$$\theta = 180^\circ - 153.43^\circ - 90^\circ$$

o bien

$$\theta = -63.43^\circ$$

La rama del lugar de las raíces a partir del polo complejo en la mitad superior del plano s corta al eje real en $s = -1.6667$.

A continuación se determinan los puntos donde las ramas del lugar de las raíces cruzan el eje imaginario. Sustituyendo $s = j\omega$ en la ecuación característica, se tiene que

$$(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 5(j\omega) + K = 0$$

o bien

$$(K - 4\omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) = 0$$

a partir de la cual se obtiene

$$\omega = \pm\sqrt{5}, \qquad K = 20 \qquad \text{o bien} \qquad \omega = 0, \qquad K = 0$$

Las ramas del lugar de las raíces cruzan el eje imaginario en $\omega = \sqrt{5}$ y $\omega = -\sqrt{5}$. La rama del lugar de las raíces sobre el eje real toca el eje $j\omega$ en $\omega = 0$. La Figura 6-67(b) muestra el diagrama de los lugares de las raíces para el sistema.

Observe que, debido a que este sistema es de tercer orden, existen tres polos en lazo cerrado. La naturaleza de la respuesta del sistema a una entrada determinada depende de las situaciones de los polos en lazo cerrado.

Para $0 < K < 1.852$, existe un conjunto de polos complejos conjugados en lazo cerrado y un polo real en lazo cerrado. Para $1.852 \leqslant K \leqslant 2$, hay tres polos reales en lazo cerrado. Por ejemplo, los polos en lazo cerrado se localizan en

$$\text{s} = -1.667, \qquad s = -1.667, \qquad s = -0.667, \qquad \text{para } K = 1.852$$

$$s = -1, \qquad s = -1, \qquad s = -2, \qquad \text{para } K = 2$$

Para $2 < K$, hay un conjunto de polos complejos conjugados en lazo cerrado y un polo real en lazo cerrado. Por tanto, los valores pequeños de K $(0 < K < 1.852)$ corresponden a un sistema subamortiguado. (Debido a que el polo real en lazo cerrado domina, solo aparece una pequeña oscilación en la respuesta transitoria.) Los valores medios de K $(1.852 \leqslant K \leqslant 2)$ corresponden a un sistema sobreamortiguado. Los valores grandes de K $(2 < K)$ corresponden a un sistema subamortiguado. Para valores grandes de K el sistema responde mucho más rápido que para valores más pequeños de K.

A-6-6. Dibuje los lugares de las raíces para el sistema de la Figura 6-68(a).

Solución. Los polos en lazo abierto se localizan en $s = 0$, $s = -1$, $s = -2 + j3$ y $s = -2 - j3$. Existe un lugar de las raíces sobre el eje real entre los puntos s = 0 y $s = -1$. Las asíntotas se encuentran del modo siguiente:

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{4} = 45^\circ,\ -45^\circ,\ 135^\circ,\ -135^\circ$$

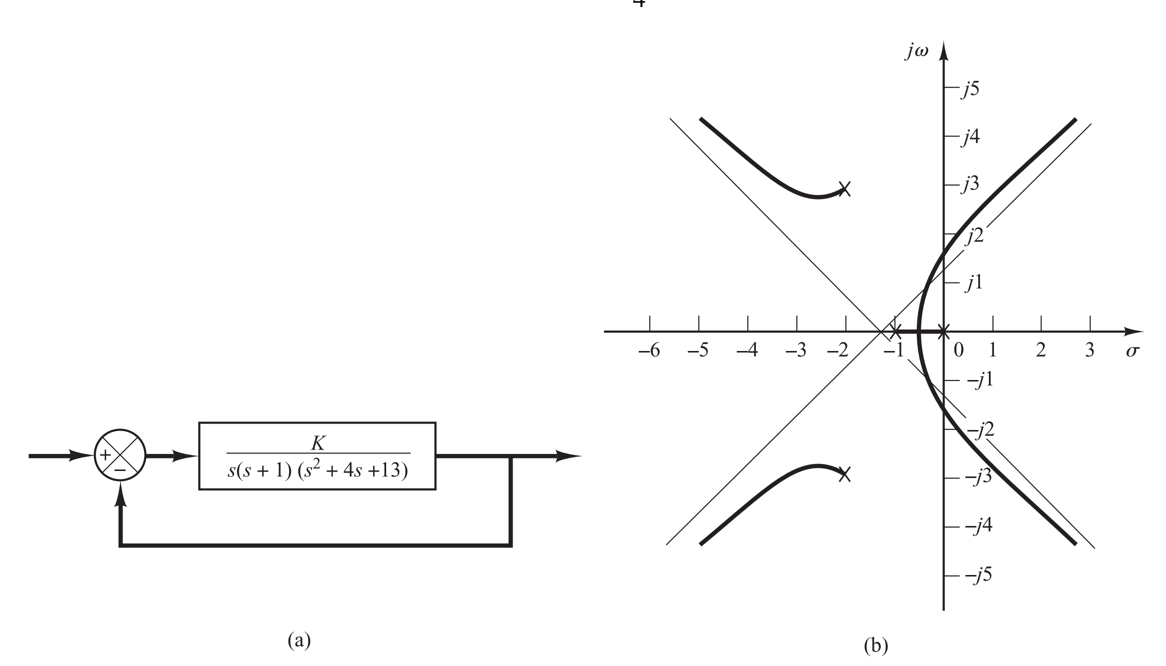


Figura 6-68. (a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar de las raíces.

La intersección de las asíntotas y el eje real se encuentra a partir de

$$s = -\frac{0 + 1 + 2 + 2}{4} = -1.25$$

Los puntos de ruptura y de ingreso se encuentra a partir de $dK/ds = 0$. Considerando que

$$K = -s(s + 1)(s^2 + 4s + 13) = -(s^4 + 5s^3 + 17s^2 + 13s)$$

se tiene

$$\frac{dK}{ds} = -(4s^3 + 15s^2 + 34s + 13) = 0$$

con lo que se obtiene

$$s = -0.467, \qquad s = -1.642 + j2.067, \qquad s = -1.642 - j2.067$$

El punto $s = -0.467$ está sobre un lugar de las raíces. Por tanto, se trata un punto de ruptura real. Los valores de la ganancia K correspondientes a los puntos $s = -1.642 \pm j2.067$ son cantidades complejas. Como los valores de ganancia no son positivos reales, estos puntos no son de ruptura ni de ingreso.

El ángulo de salida del polo complejo en la mitad superior del plano s es

$$\theta = 180^{\circ} - 123.69^{\circ} - 108{,}44^{\circ} - 90^{\circ}$$

o bien

$$\theta = -142.13^{\circ}$$

A continuación se buscan los puntos donde los lugares de las raíces cruzan el eje $j\omega$. Debido a que la ecuación característica es

$$s^4 + 5s^3 + 17s^2 + 13s + K = 0$$

si se sustituye $s = j\omega$ dentro de ella, se obtiene

$$(j\omega)^4 + 5(j\omega)5(j\omega)^3 + 17(j\omega)^2 + 13(j\omega) + K = 0$$

o bien

$$(K + \omega^4 - 17\omega^2) + j\omega(13 - 5\omega^2) = 0$$

de donde se obtiene

$$\omega = \pm 1.6125, \qquad K = 37.44 \qquad \text{o bien} \qquad \omega = 0, \qquad K = 0$$

Las ramas del lugar de las raíces que se tienden al semiplano derecho del plano s cruzan el eje imaginario en $\omega = \pm 1.6125$. Asimismo, la rama del lugar de las raíces sobre el eje real toca el eje imaginario en $\omega = 0$. La Figura 6-68(b) muestra un dibujo de los lugares de las raíces para el sistema. Observe que cada rama del lugar de las raíces que tiende al semiplano derecho del plano s cruza su propia asíntota.

A-6-7. Dibuje los lugares de las raíces del sistema de control de la Figura 6-69(a). Determine el rango de valores de la ganancia K para la estabilidad.

Solución. Los polos en lazo abierto se localizan en $s = 1$, $s = -2 + j\sqrt{3}$ y $s = -2 - j\sqrt{3}$. Existe un lugar de las raíces sobre el eje real entre los puntos $s = 1$ y $s = -\infty$. Las asíntotas de las ramas del lugar de las raíces se encuentran del modo siguiente:

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{3} = 60^\circ,\ -60^\circ,\ 180^\circ$$

La intersección de las asíntotas y el eje real se obtiene como

$$s = -\frac{-1+2+2}{3} = -1$$

Los puntos de ruptura y de ingreso se localizan a partir de $dK/ds = 0$. Como

$$K = -(s-1)(s^2+4s+7) = -(s^3+3s^2+3s-7)$$

se tiene que

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2+6s+3) = 0$$

de donde

$$(s+1)^2 = 0$$

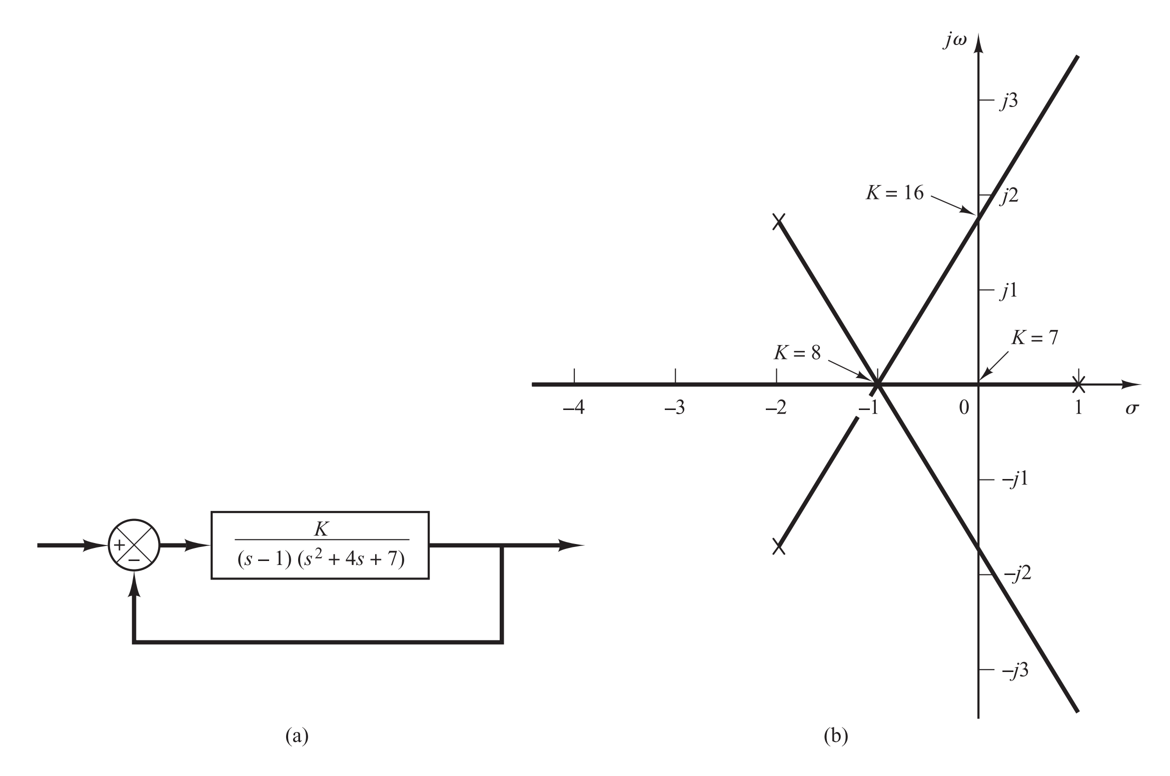


Figura 6-69. (a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar de las raíces.

Por tanto, la ecuación $dK/ds = 0$ tiene una raíz doble en $s = -1$. (Esto significa que la ecuación característica tiene una raíz triple en $s = -1$.) El punto de ruptura se localiza en $s = -1$. Las tres ramas del lugar de las raíces se encuentran en este punto de ruptura. Los ángulos de salida de las ramas en el punto de ruptura son $\pm 180^\circ/3$, es decir, 60° y -60°.

A continuación se determinan los puntos donde las ramas del lugar de las raíces cruzan el eje imaginario. Observe que la ecuación característica es

$$(s - 1)(s^2 + 4s + 7) + K = 0$$

o bien

$$s^3 + 3s^2 + 3s - 7 + K = 0$$

Si se sustituye $s = j\omega$ en la ecuación, se obtiene

$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 3(j\omega) - 7 + K = 0$$

Reescribiendo esta última ecuación se obtiene

$$(K - 7 - 3\omega^2) + j\omega(3 - \omega^2) = 0$$

Esta ecuación se satisface cuando

$$\omega = \pm\sqrt{3}, \qquad K = 7 + 3\omega^2 = 16 \quad \text{o} \quad \omega = 0, \qquad K = 7$$

Las ramas del lugar de las raíces cruzan el eje imaginario en $\omega = \pm\sqrt{3}$ (donde $K = 16$) y $\omega = 0$ (donde $K = 7$). Como el valor de la ganancia K en el origen es 7, el rango de valores de la ganancia K para la estabilidad es

$$7 < K < 16$$

La Figura 6-69(b) muestra una gráfica del lugar de las raíces. Obsérvese cómo todas las ramas son líneas rectas.

El hecho de que las ramas del lugar de las raíces son líneas rectas se puede demostrar como sigue: Como la condición de ángulo es

$$\angle \frac{K}{(s - 1)(s + 2 + j\sqrt{3})(s + 2 - j\sqrt{3})} = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

se tiene

$$-\angle s - 1 - \angle s + 2 + j\sqrt{3} - \angle s + 2 - j\sqrt{3} = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Sustituyendo $s = \sigma + j\omega$ en la última ecuación,

$$\angle \sigma - 1 + j\omega + \angle \sigma + 2 + j\omega + j\sqrt{3} + \angle \sigma + 2 + j\omega - j\sqrt{3} = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

o bien

$$\angle \sigma + 2 + j(\omega + \sqrt{3}) + \angle \sigma + 2 + j(\omega - \sqrt{3}) = -\angle \sigma - 1 + j\omega \pm 180^\circ(2k + 1)$$

que se puede escribir como

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega + \sqrt{3}}{\sigma + 2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega - \sqrt{3}}{\sigma + 2}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma - 1}\right) \pm 180^\circ(2k + 1)$$

Tomando las tangentes a ambos lados de esta última ecuación, se obtiene

$$\frac{\dfrac{\omega + \sqrt{3}}{\sigma + 2} + \dfrac{\omega - \sqrt{3}}{\sigma + 2}}{1 - \left(\dfrac{\omega + \sqrt{3}}{\sigma + 2}\right)\left(\dfrac{\omega - \sqrt{3}}{\sigma + 2}\right)} = -\frac{\omega}{\sigma - 1}$$

o bien

$$\frac{2\omega(\sigma + 2)}{\sigma^2 + 4\sigma + 4 - \omega^2 + 3} = -\frac{\omega}{\sigma - 1}$$

que se puede simplificar a

$$2\omega(\sigma + 2)(\sigma - 1) = -\omega(\sigma^2 + 4\sigma + 7 - \omega^2)$$

o bien

$$\omega(3\sigma^2 + 6\sigma + 3 - \omega^2) = 0$$

Haciendo nueva simplificación en esta última ecuación

$$\omega\left(\sigma + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\omega\right)\left(\sigma + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\omega\right) = 0$$

lo que define tres líneas:

$$\omega = 0, \qquad \sigma + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\omega = 0, \qquad \sigma + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\omega = 0$$

Por tanto, las ramas del lugar de las raíces tienen tres líneas. Observe que los lugares de las raíces para $K > 0$ tienen partes de las rectas que aparecen en la Figura 6-69(b). (Observe que cada recta empieza a partir de un polo en lazo abierto y tiende a infinito en la dirección de 180º, 60º o -60º, medidos a partir del eje real.) La parte restante de cada recta corresponde a $K < 0$.

A-6-8. Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia feedforward

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}$$

Utilizando MATLAB, dibuje el lugar de las raíces y sus asíntotas.

Solución. Dibujar un diagrama los lugares de las raíces y las asíntotas. Como la función de transferencia en lazo abierto se obtiene mediante

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

la ecuación para las asíntotas se obtiene del modo siguiente: considerando que

$$\lim_{s \to \infty} \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s} \doteq \lim_{s \to \infty} \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{K}{(s + 1)^3}$$

la ecuación para las asíntotas se obtiene mediante

$$G_a(s) = \frac{K}{(s + 1)^3}$$

Por tanto, para el sistema, se tiene que

```
num = [1]
den = [1  3  2  0]
```

y para las asíntotas,

```
numa = [1]
dena = [1  3  3  1]
```

Al usar las siguientes órdenes root-locus y plot

```
r = rlocus(num,den)
a = rlocus(numa,dena)
plot([r a])
```

el número de filas de `r` y de `a` debe ser el mismo. Para asegurar esto, se incluye la constante de ganancia `K` en los comandos. Por ejemplo,

```
K1 = 0:0.1:0.3;
K2 = 0.3:0.005:0.5;
K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5:100;
K = [Kl  K2  K3  K4]
r = rlocus(num,den,K)
a = rlocus(numa,dena,K)
y = [r  a]
plot(y,'-')
```

El programa MATLAB 6-15 generará una gráfica del lugar de las raíces y de sus asíntotas tal como se muestra en la Figura 6-70.

MATLAB Programa 6-15

```
% ---------- Lugar de las raíces ----------
num = [1];
den = [1  3  2  0];
numa = [1];
dena = [1  3  3  1];
K1 = 0:0.1:0.3;
K2 = 0.3:0.005:0.5;
K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5:100;
K = [K1  K2  K3  K4];
r = rlocus(num,den,K);
a = rlocus(numa,dena,K);
y = [r  a];
plot(y,'-')
v = [-4  4  -4  4]; axis(v)
grid
title('Lugar de las raíces de G(s) = K/[s(s + 1)(s + 2)] y asíntotas')
xlabel('Eje Real')
ylabel('Eje Imag')
% ***** Los polos en lazo abierto se dibujan manualmente *****
```

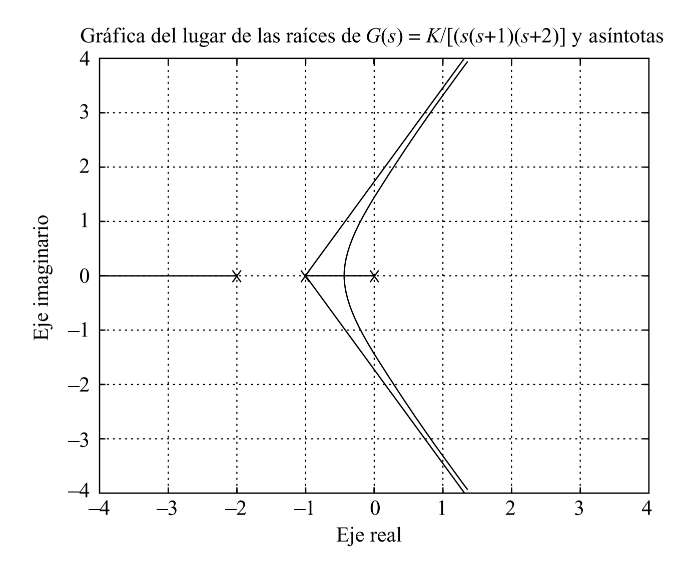


Figura 6-70. Gráfica del lugar de las raíces.

Es posible dibujar dos o más gráficas en un diagrama mediante la orden `hold`. El Programa MATLAB 6-16 usa la orden `hold`. La gráfica del lugar de las raíces resultante se muestra en la Figura 6-71.

MATLAB Programa 6-16

```
% ------------ Lugar de las raíces ------------
num = [1];
den = [1  3  2  0];
numa = [1];
dena = [1  3  3  1];
K1 = 0:0.1:0.3;
K2 = 0.3:0.005:0.5;
K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5:100;
K = [K1  K2  K3  K4];
r = rlocus(num,den,K);
a = rlocus(numa,dena,K);
plot(r,'o')
hold
Current plot held
plot(a,'-')
v = [-4  4  -4  4]; axis(v)
grid
title('Lugar de las raíces de G(s) = K/[s(s + 1)(s + 2)] y asíntotas')
xlabel('Eje Real')
ylabel('Eje Imag')
```

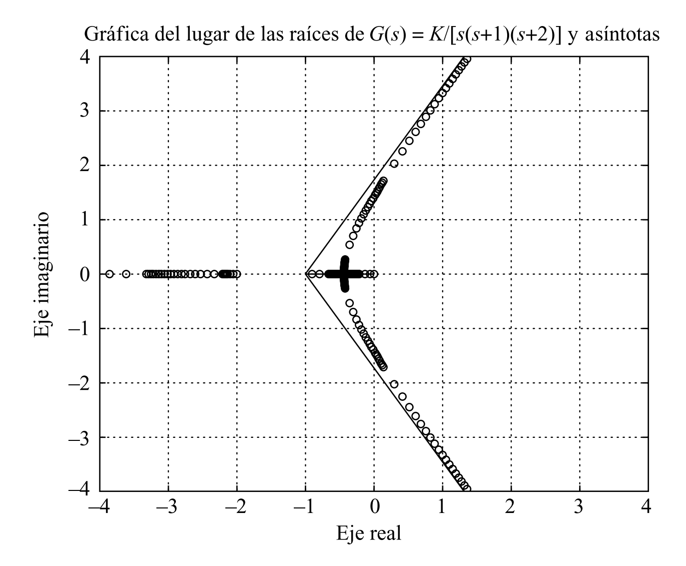


Figura 6-71. Gráfica del lugar de las raíces.

A-6-9. Dibujar el lugar de las raíces y las asíntotas para un sistema con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia feedforward:

$$G(s) = \frac{K}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

Determinar los puntos exactos donde el lugar de las raíces atraviesa el eje $j\omega$.

Solución. La función de transferencia feedforward $G(s)$ se puede escribir como

$$G(s) = \frac{K}{s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 14s + 10}$$

Obsérvese que cuando s tiende a infinito $\lim_{s \to \infty} G(s)$ se puede escribir como

$$\lim_{s \to \infty} G(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{K}{s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 14s + 10}$$

$$\doteq \lim_{s \to \infty} \frac{K}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1}$$

$$= \lim_{s \to \infty} \frac{K}{(s + 1)^4}$$

donde se ha utilizado la siguiente fórmula:

$$(s + a)^4 = s^4 + 4as^3 + 6a^2s^2 + 4a^3s + a^4$$

La expresión

$$\lim_{s \to \infty} G(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{K}{(s + 1)^4}$$

da la ecuación para las asíntotas.

El programa MATLAB 6-17 calcula el lugar de las raíces de $G(s)$ y sus asíntotas. Obsérvese que el numerador y denominador de $G(s)$ son

```
num = [1]
den = [1  4  11  14  10]
```

Para el numerador y denominador de las asíntotas $\lim_{s\to\infty} G(s)$ utilizamos

```
numa = [1]
dena = [1  4  6  4  1]
```

La Figura 6-72 muestra la gráfica del lugar de las raíces y de las asíntotas.

Como la ecuación característica para el sistema es

$$(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5) + K = 0$$

MATLAB Programa 6-17

```
% ------------ Diagrama del lugar de las raíces ------------
num = [1];
den = [1  4  11  14  10];
numa = [1];
dena = [1  4  6  4  1];
r = rlocus(num,den);
plot(r,'-')
hold
Current plot held
plot(r,'o')
rlocus(numa,dena);
v = [-6  4  -5  5];axis(v);axis('square')
grid
title('Lugar de las raíces y Asíntotas')
```

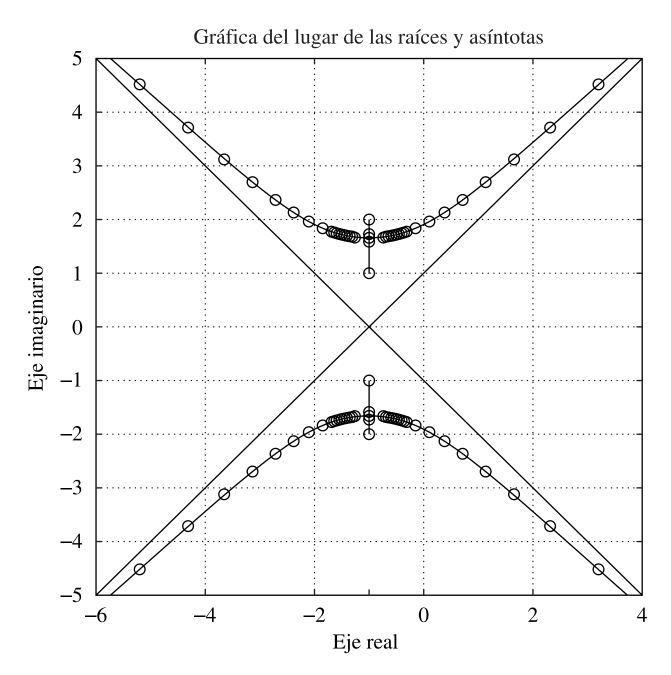


Figura 6-72. Gráfica del lugar de las raíces y asíntotas.

los puntos donde el lugar de las raíces atraviesa el eje imaginario se pueden encontrar sustituyendo $s = j\omega$ en la ecuación característica tal como sigue:

$$[(j\omega)^2 = 2j\omega + 2][(j\omega)^2 + 2j\omega + 5] + K$$

$$= (\omega^4 - 11\omega^2 + 10 + K) + j(-4\omega^3 + 14\omega) = 0$$

e igualando la parte imaginaria a cero. El resultado es

$$\omega = \pm 1.8708$$

Así pues los puntos exactos donde el lugar de las raíces atraviesa el ej $j\omega$ son $\omega = \pm 1.8708$. Igualando la parte real a cero, se obtiene el valor de la ganancia en los puntos de cruce $K = 16.25$.

A-6-10. Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la función de transferencia feedforward $G(s)$ dada por:

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

Dibujar el lugar de las raíces con MATLAB.

Solución. La función de transferencia feedforward $G(s)$ se puede escribir como

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^4 + 4s^3 + 11s^2 + 14s + 10}$$

El Programa MATLAB 6-18 es un posible programa en MATLAB para dibujar el lugar de las raíces. En la Figura 6-73 se muestra el lugar de las raíces resultante.

MATLAB Programa 6-18

```
num = [1  1];
den = [1  4  11  14  10];
K1 = 0:0.2:200;
K2 = 2:0.0.2:2.5;
K3 = 2.5:0.5:10;
K4 = 10:1:50;
K = [K1  K2  K3  K4];
r = rlocus(num,den,K);
plot(y,'o')
v = [-8  2  -5  5];axis(v);axis('square')
grid
title('Lugar de las raíces de G(s) = K(s + 1)/[(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)]')
xlabel('Eje Real')
ylabel('Eje Imag')
```

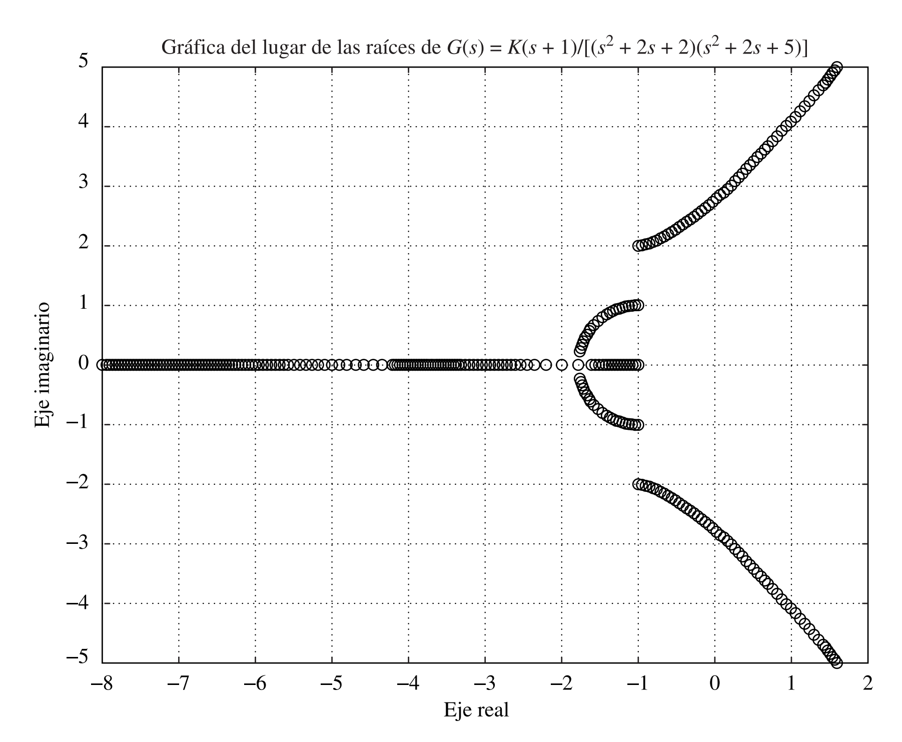


Figura 6-73. Gráfica del lugar de las raíces.

A-6-11. Obtenga la función de transferencia del sistema mecánico de la Figura 6-74. Suponga que el desplazamiento x_i es la entrada y el desplazantiento x_o es la salida del sistema.

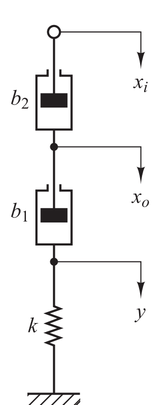


Figura 6-74. Sistema mecánico.

Solución. A partir del diagrama se obtiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$b_2(\dot{x}_i - \dot{x}_o) = b_1(\dot{x}_o - \dot{y})$$

$$b_1(\dot{x}_o - \dot{y}) = ky$$

Tomando las transformadas de Laplace de estas dos ecuaciones, suponiendo condiciones iniciales cero y eliminando $Y(s)$, se obtiene

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_2}{b_1 + b_2} \frac{\dfrac{b_1}{k} s + 1}{\dfrac{b_2}{b_1 + b_2} \dfrac{b_1}{k} s + 1}$$

Esta es la función de transferencia entre $X_o(s)$ y $X_i(s)$. Si se define

$$\frac{b_1}{k} = T, \qquad \frac{b_2}{b_1 + b_2} = \alpha < 1$$

se obtiene

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{s + \dfrac{1}{T}}{s + \dfrac{1}{\alpha T}}$$

Este sistema mecánico es una red de adelanto mecánica.

A-6.12. Obtenga la función de transferencia del sistema mecánico de la Figura 6-75. Suponga que el desplazamiento x_i es la entrada y el desplazamiento x_o es la salida.

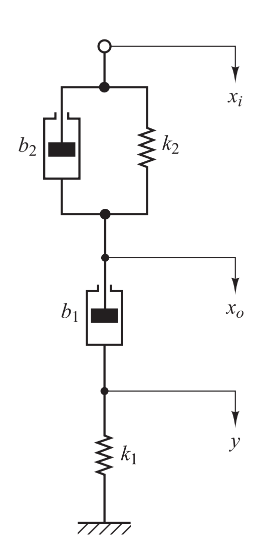


Figura 6-75. Sistema mecánico.

Solución. Las ecuaciones de movimiento para este sistema son

$$b_2(\dot{x}_i - \dot{x}_o) + k_2(x_i - x_o) = b_1(\dot{x}_o - \dot{y})$$

$$b_1(\dot{x}_o - \dot{y}) = k_1 y$$

Tomando las transformadas de Laplace de estas dos ecuaciones, y suponiendo condiciones iniciales de cero, se obtiene

$$b_2[sX_i(s) - sX_o(s)] + k_2[X_i(s) - X_o(s)] = b_1[sX_o(s) - sY(s)]$$

$$b_1[sX_o(s) - sY(s)] = k_1 Y(s)$$

Si se elimina $Y(s)$ de las dos últimas ecuaciones, la función de transferencia $X_o(s)/X_i(s)$ se obtiene como

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\left(\frac{b_1}{k_1}\, s + 1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}\, s + 1\right)}{\left(\frac{b_1}{k_1}\, s + 1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}\, s + 1\right) + \frac{b_1}{k_2}\, s}$$

Se define

$$T_1 = \frac{b_1}{k_1}, \qquad T_2 = \frac{b_2}{k_2},$$

Si se escogen k_1, k_2, b_1 y b_2 tal que existe un β que satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{b_1}{k_1} + \frac{b_2}{k_2} + \frac{b_1}{k_2} = \frac{T_1}{\beta} + \beta T_2 \qquad (\beta > 1) \tag{6-30}$$

Entonces $X_0(s)/X_i(s)$ se simplifica como

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}\, s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} = \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

[Obsérvese que dependiendo de la elección k_1, k_2, b_1 y b_2, no existe un β que satisfaga la Ecuación (6-30).]

Si existe un tal β y si para un s_1 dado (donde $s = s_1$ es uno de los polos en lazo cerrado dominantes del sistema de control para el cual se desea utilizar este dispositivo mecánico) las condiciones siguientes se satisfacen:

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} \right| \doteq 1, \qquad -5^\circ < \angle \frac{s_1 + \frac{1}{T_2}}{s_1 + \frac{1}{\beta T_2}} < 0^\circ$$

entonces el sistema mecánico que se muestra en la Figura 6-75 actúa como un compensador de retardo-adelanto.

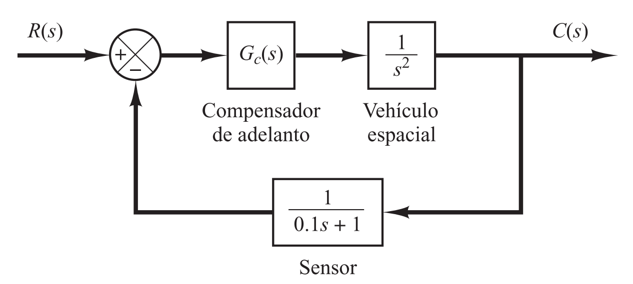


Figura 6-76. Sistema de control de un vehículo espacial.

A-6-13. Considere un modelo para un sistema de control de un vehículo espacial, como el que se muestra en la Figura 6-76. Diseñe un compensador de adelanto $G_c(s)$ tal que el factor de amortiguamiento relativo ζ y la frecuencia natural no amortiguada ω_n de los polos dominantes en lazo cerrado sean 0.5 y 2 rad/seg, respectivamente.

Solución.

Primer intento: Suponga que el compensador de adelanto $G_c(s)$ es

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s + \dfrac{1}{T}}{s + \dfrac{1}{\alpha T}}\right) \qquad (0 < \alpha < 1)$$

A partir de las especificaciones dadas, $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 2$ rad/seg, los polos dominantes en lazo cerrado deben localizarse en

$$s = -1 \pm j\sqrt{3}$$

Primero se calcula la deficiencia del ángulo en este polo en lazo cerrado.

$$\begin{aligned}\text{Deficiencia del ángulo} &= -120^\circ - 120^\circ - 10.8934^\circ + 180^\circ \\ &= -70.8934^\circ\end{aligned}$$

El compensador de adelanto debe compensar esta deficiencia del ángulo. Existen muchas formas de determinar las situaciones del polo y el cero de la red de adelanto. Se selecciona el cero del compensador en $s = -1$. A continuación, haciendo referencia a la Figura 6-77, se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{1.73205}{x - 1} = \tan(90^\circ - 70.8934^\circ) = 0.34641$$

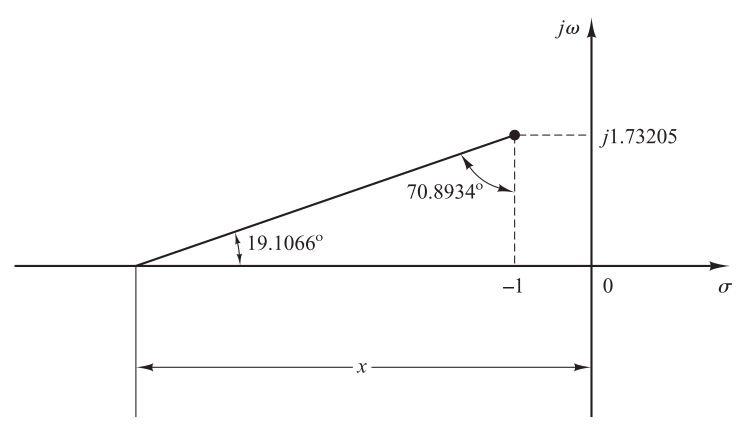


Figura 6-77. Determinación del polo de la red de adelanto.

o bien

$$x = 1 + \frac{1.73205}{0.34641} = 6$$

Por tanto,

$$G_c(s) = K_c \frac{s+1}{s+6}$$

El valor de K_c se determina a partir de la condición de magnitud

$$K_c \left| \frac{s+1}{s+6} \frac{1}{s^2} \frac{1}{0.1s+1} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1$$

del modo siguiente:

$$K_c \left| \frac{(s+6)s^2(0.1s+1)}{s+1} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 11.2000$$

Así,

$$G_c(s) = 11.2 \frac{s+1}{s+6}$$

Como la función de transferencia en lazo abierto queda

$$G_c(s)G(s)H(s) = 11.2 \frac{s+1}{(s+6)s^2(0.1s+1)}$$

$$= \frac{11.2(s+1)}{0.1s^4 + 1.6s^3 + 6s^2}$$

una gráfica del lugar de las raíces del sistema compensado se obtiene fácilmente con MATLAB introduciendo `num` y `den`, y usando la orden `rlocus`. El resultado se muestra en la Figura 6-78.

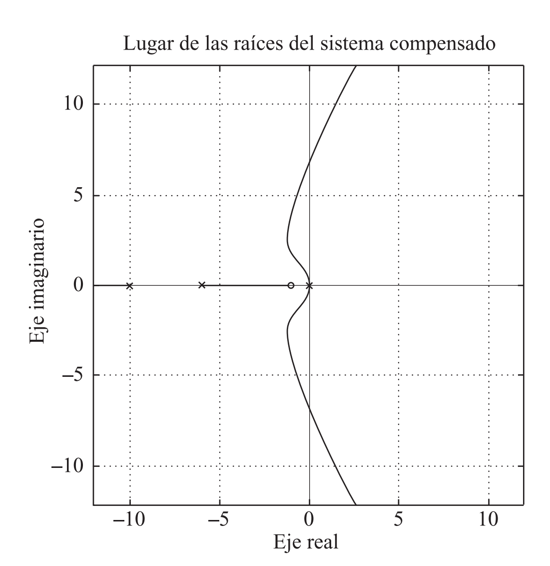


Figura 6-78. Gráfica del lugar de las raíces del sistema compensado.

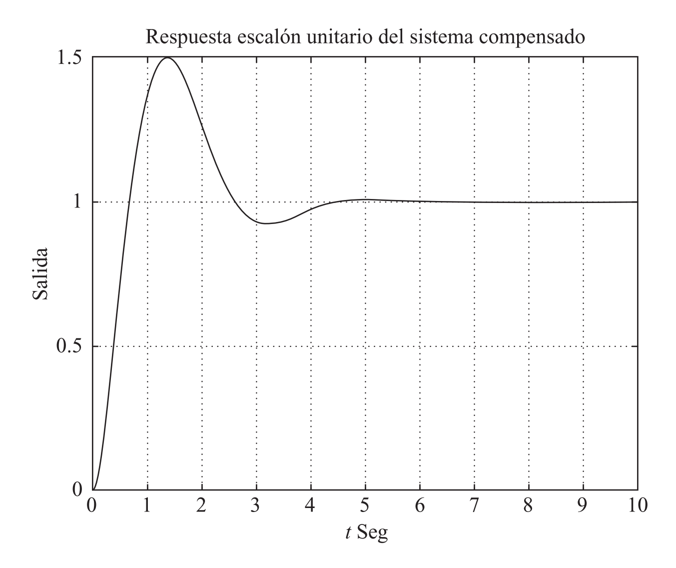


Figura 6-79. Respuesta a un escalón unitario del sistema compensado.

La función de transferencia en lazo cerrado para el sistema compensado queda

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{11.2(s+1)(0.1s+1)}{(s+6)s^2(0.1s+1) + 11.2(s+1)}$$

La Figura 6-79 muestra la curva de respuesta a un escalón unitario. A pesar de que el factor de amortiguamiento de los polos dominantes en lazo cerrado es 0.5, presenta una sobreelongación mucho más grande de la esperada. Una revisión cuidadosa de la gráfica del lugar de las raíces revela que la presencia del cero en $s = -1$ incrementa el valor de la sobreelongación máxima. [En general, si un cero o ceros en lazo cerrado (compensador de cero o ceros) se encuentran a la derecha del par de polos dominantes complejos conjugados, los polos dominantes no serán muy dominantes.] Si la máxima sobreeelongación no se puede tolerar, el compensador de cero(s) debería modificarse de tal forma que el cero(s) casi cancele al polo(s) real en lazo cerrado.

En el diseño actual, se desea modificar el compensador de adelanto y disminuir la máxima sobreelongación. Una forma de evitar esto es modificar el compensador de adelanto, tal y como se presenta en el intento siguiente.

Segundo intento: Para modificar la forma de los lugares de las raíces, es posible usar dos redes de adelanto, tales que cada una contribuya con la mitad del ángulo de adelanto necesario, $70.8934^\circ/2 = 35.4467^\circ$. Se selecciona la localización de los ceros en $s = -3$. (Esta es una elección arbitraria. Es posible elegir otra localización, como $s = -2.5$ o $s = -4$.)

Una vez elegidos dos ceros en $s = -3$, la localización necesaria de los polos se determina tal y como se muestra en la Figura 6-80, o bien

$$\frac{1.73205}{y-1} = \tan(40.89334^\circ - 35.4467^\circ)$$

$$= \tan 5.4466^\circ = 0.09535$$

de donde se obtiene

$$y = 1 + \frac{1.73205}{0.09535} = 19.1652$$

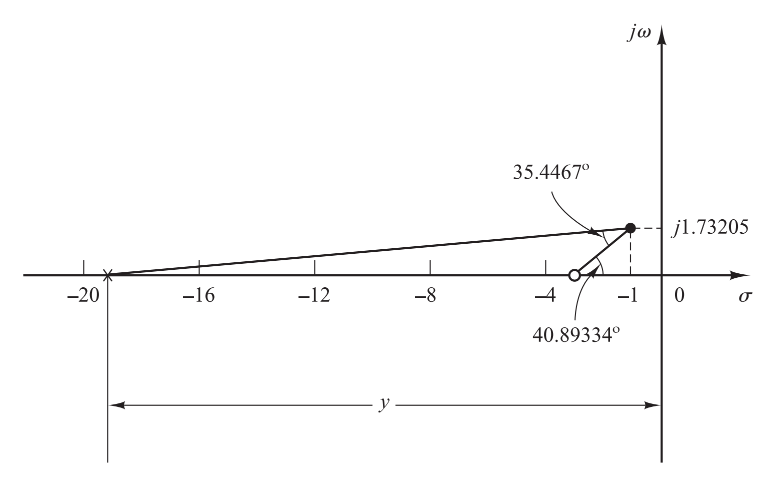


Figura 6-80. Determinación del polo de la red de adelanto.

Por tanto, el compensador de adelanto tendrá la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s+3}{s+19.1652}\right)^2$$

El valor de K_c se determina a partir de la condición de magnitud del modo siguiente:

$$\left| K_c\left(\frac{s+3}{s+19.1652}\right)^2 \frac{1}{s^2}\frac{1}{0.1s+1}\right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1$$

o bien

$$K_c = 174.3864$$

De esta forma, el compensador de adelanto recién diseñado es

$$G_c(s) = 174.3864\left(\frac{s+3}{s+19.1652}\right)^2$$

Así, la función de transferencia en lazo abierto se convierte en

$$G_c(s)G(s)H(s) = 174.3864\left(\frac{s+3}{s+19.1652}\right)^2 \frac{1}{s^2}\frac{1}{0.1s+1}$$

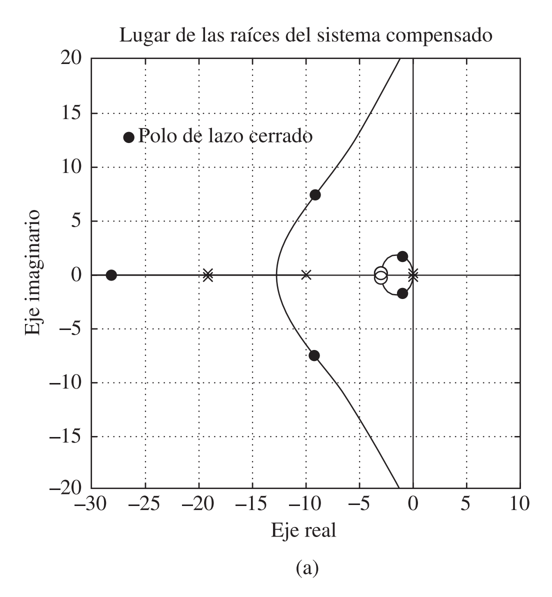
La Figura 6-81(a) muestra una gráfica del lugar de las raíces para el sistema compensado. Observe que no hay un cero en lazo cerrado cerca del origen. Una vista ampliada de la gráfica del lugar de las raíces cerca del origen se muestra en la Figura 6-81(b).

La función de transferencia en lazo cerrado se convierte en

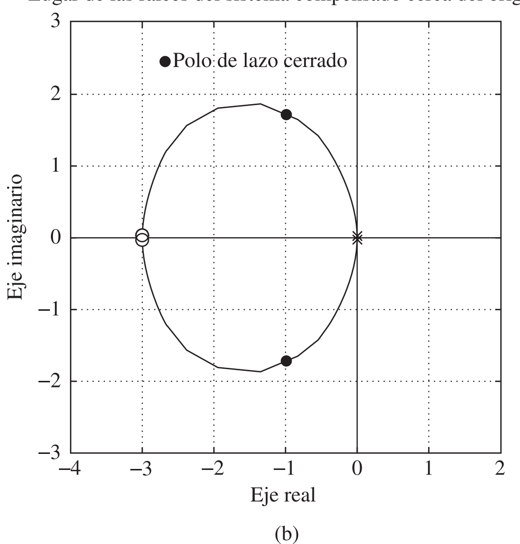
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{174.3864(s+3)^2(0.1s+1)}{(s+19.1652)^2 s^2(0.1s+1) + 174.3864(s+3)^2}$$

Los polos en lazo cerrado se encuentran del modo siguiente:

$$s = -1 \pm j1.73205$$
$$s = -9.1847 \pm j7.4814$$
$$s = -27.9606$$



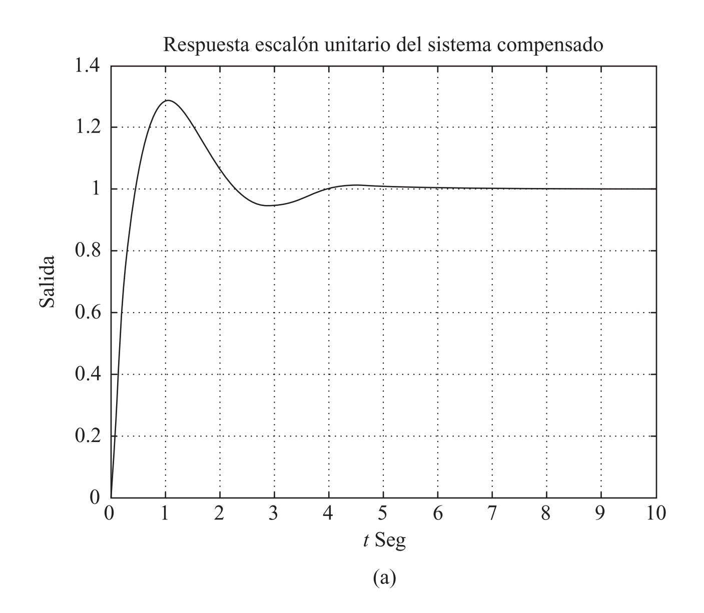
(a)



(b)

Figura 6-81. (a) Gráfica del lugar de las raíces del sistema compensado; (b) gráfica del lugar de las raíces cerca del origen.

Las Figuras 6-82(a) y (b) muestran la respuesta a un escalón unitario y la respuesta a una rampa unitaria del sistema compensado. La curva de respuesta a un escalón unitario es razonable y la respuesta a una rampa unitaria parece aceptable. Observe que, en la respuesta a una rampa unitaria, la salida se adelanta ligeramente a la entrada. Esto se debe a que el sistema tiene una función de transferencia realimentada de $1/(0.1s + 1)$. Si se dibuja la señal de realimentación frente a t, junto con la entrada de la rampa unitaria, la primera no se adelantara a la entrada rampa en estado estacionario. Véase la Figura 6-82(c).



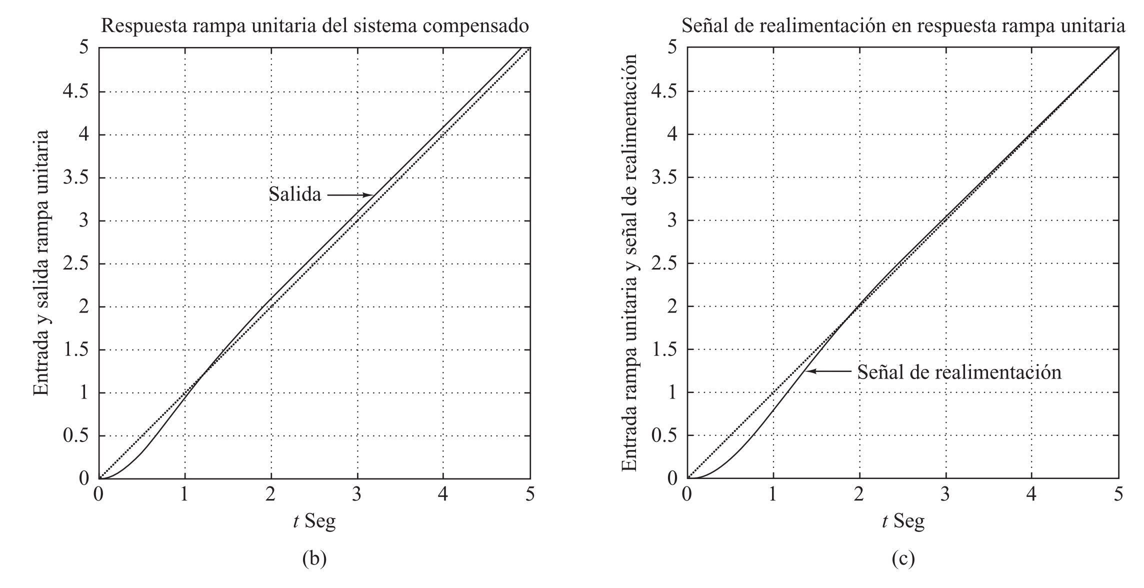
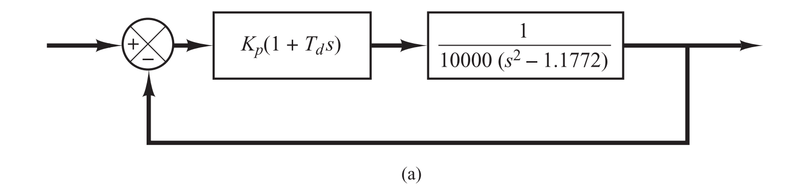


Figura 6-82. (a) Respuesta a un escalón unitario del sistema compensado; (b) respuesta a una rampa unitaria del sistema compensado; (c) gráfica de la señal de realimentación frente a *t* en la respuesta a una rampa unitaria.

A-6-14. Considere un sistema con una planta inestable, como el de la Figura 6-83(a). Utilizando el método del lugar de las raíces, diseñe un controlador proporcional derivativo (es decir, determine los valores de K_p y T_d) tal que el factor de amortiguamiento relativo ζ del sistema en lazo cerrado sea 0.7 y la frecuencia natural no amortiguada ω_n sea 0.5 rad/seg.

Solución. Observe que la función de transferencia en lazo abierto tiene dos polos en $s = 1.085$ y $s = -1.085$ y un cero en $s = -1/T_d$, que se desconoce en este punto.



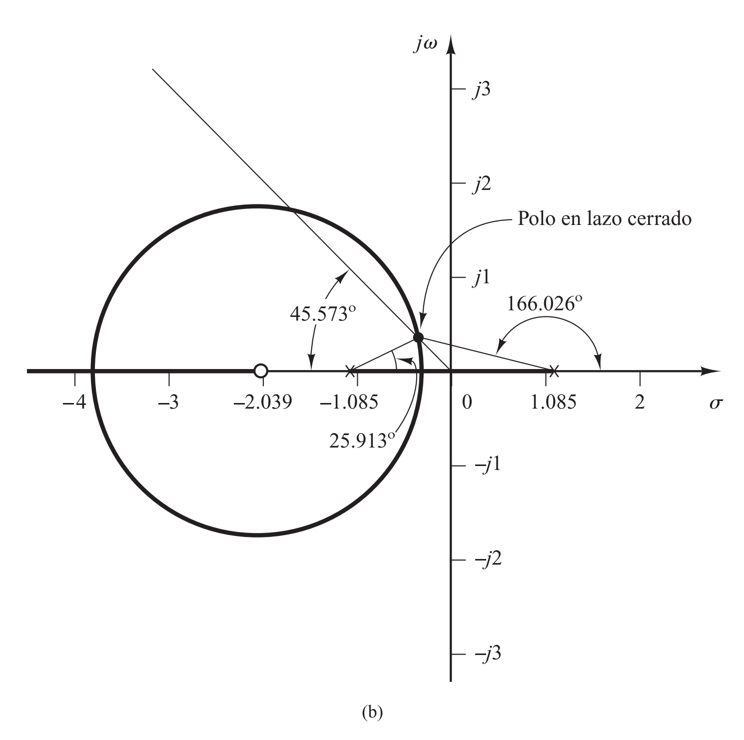


Figura 6-83. (a) Control PD de una planta inestable; (b) diagrama del lugar de las raíces para el sistema.

Como los polos en lazo cerrado deseados deben tener $\omega_n = 0.5$ rad/seg y $\zeta = 0.7$, deben localizarse en

$$s = 0.5 \underline{/180^{\circ} \pm 45.573^{\circ}}$$

($\zeta = 0.7$ corresponde a una línea que forma un ángulo de 45.573° con el eje real negativo.) Por tanto, los polos en lazo cerrado deseados están en

$$s = -0.35 \pm j0.357$$

Los polos en lazo abierto y el polo en lazo cerrado deseado de la mitad superior del plano se localizan en el diagrama de la Figura 6-83(b). La deficiencia de ángulo en el punto $s = -0.35 + j0.357$ es

$$-166.026^{\circ} - 25.913^{\circ} + 180^{\circ} = -11.939^{\circ}$$

Esto significa que el cero en $s = -1/T_d$ debe contribuir con 11.939°, los mismos que, a su vez, determinan la localización del cero del modo siguiente:

$$s = -\frac{1}{T_d} = -2.039$$

Por tanto, se tiene que

$$K_p(1 + T_d s) = K_p T_d \left(\frac{1}{T_d} + s \right) = K_p T_d (s + 2.039) \qquad (6\text{-}31)$$

El valor de T_d es

$$T_d = \frac{1}{2.039} = 0.4904$$

El valor de la ganancia K_p se determina a partir de la condición de magnitud del modo siguiente:

$$\left| K_p T_d \frac{s + 2.039}{10000(s^2 - 1.1772)} \right|_{s = -0.35 + j0.357} = 1$$

o bien

$$K_p T_d = 6999.5$$

Por tanto,

$$K_p = \frac{6999.5}{0.4904} = 14{,}273$$

Sustituyendo T_d y K_p por sus valores numéricos en la Ecuación (6-31), se obtiene

$$K_p(1 + T_d s) = 14{,}273(1 + 0.4904s) = 6999.5(s + 2.039)$$

que proporciona la función de transferencia deseada del controlador proporcional derivativo.

A-6-15. Considere el sistema de control de la Figura 6-84. Diseñe un compensador de retardo $G_c(s)$ tal que la constante de error estático de velocidad K_v sea 50 seg^{-1} sin modificar notablemente la localización original de los polos en lazo cerrado, que están en $s = -2 \pm j\sqrt{6}$.

Solución. Se supone que la función de transferencia del compensador de retardo es:

$$G_c(s) = \hat{K}_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \qquad (\beta > 1)$$

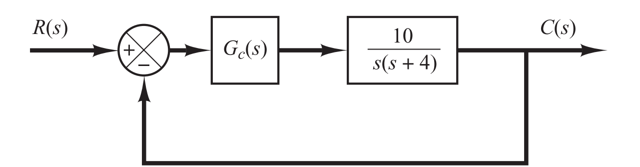


Figura 6-84. Sistema de control.

Debido a que K_v se especifica como 50 seg^{-1}, se tiene que

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)\frac{10}{s(s+4)} = \hat{K}_c\beta 2.5 = 50$$

Por tanto,

$$\hat{K}_c\beta = 20$$

Ahora, se selecciona $\hat{K}_c = 1$. De este modo,

$$\beta = 20$$

Se toma $T = 10$. A continuación, el compensador de retardo se obtiene mediante

$$G_c(s) = \frac{s+0.1}{s+0.005}$$

La contribución de ángulo del compensador de retardo en el polo en lazo cerrado $s = -2 + j\sqrt{6}$ es

$$\left. \underline{/G_c(s)} \right|_{s=-2+j\sqrt{6}} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{6}}{-1.9} - \tan^{-1}\frac{\sqrt{6}}{-1.995}$$

$$= -1.3616^{\circ}$$

que es pequeña. La magnitud de $G_c(s)$ en $s = -2 + j6$ es 0.981. Por tanto, el cambio en la localización de los polos dominantes en lazo cerrado es muy pequeño.

La función de transferencia en lazo abierto del sistema se convierte en

$$G_c(s)G(s) = \frac{s+0.1}{s+0.005}\,\frac{10}{s(s+4)}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10s+1}{s^3 + 4.005s^2 + 10.02s + 1}$$

Con el fin de comparar la característica de la respuesta transitoria antes y después de la compensación, las respuestas a un escalón unitario y a una rampa unitaria de los sistemas compensados y sin compensar se muestran en las Figuras 6-85(a) y (b), respectivamente. El error en estado estacionario en la respuesta a una rampa unitaria se muestra en la Figura 6-85(c).

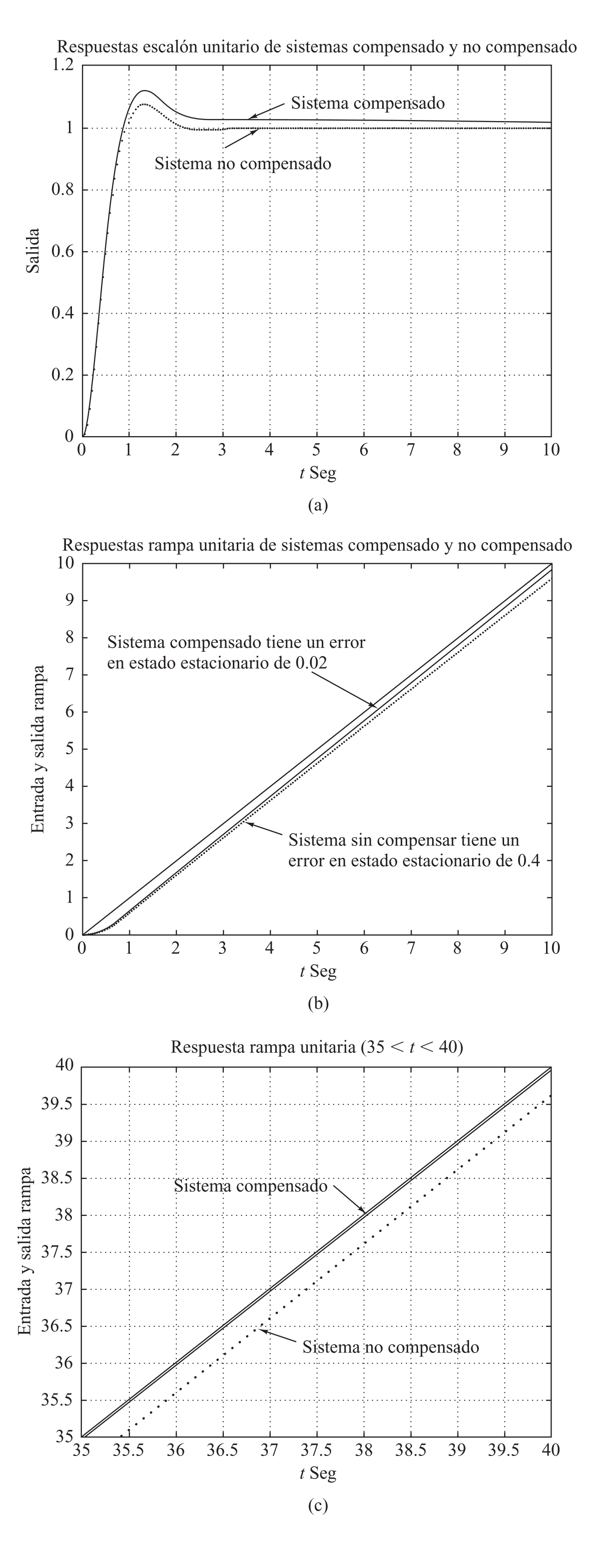


Figura 6-85. (a) Respuestas a un escalón unitario de los sistemas compensado y sin compensar; (b) respuestas a una rampa unitaria de ambos sistemas; (c) respuestas a una rampa unitaria que muestran los errores en estado estacionario.

A-6-16. Considere un sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia de camino directo se obtiene mediante

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+8)}$$

Diseñe un compensador tal que los polos dominantes en lazo cerrado se localicen en $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$ y la constante de error estático de velocidad K_v sea igual a 80 seg^{-1}.

Solución. La constante de error estático de velocidad del sistema sin compensar es $K_v = \frac{10}{16} = 0.625$. Como se requiere que $K_v = 80$, se necesita ineremental la ganancia en lazo abierto en 128. (Esto implica que se necesita un compensador de retardo.) La gráfica del lugar de las raíces del sistema sin compensar revela que no es posible llevar los polos dominantes en lazo cerrado a $-2 \pm j2\sqrt{3}$ con sólo un ajuste de la ganancia. Véase la Figura 6-86. (Esto significa que también se necesita un compensador de adelanto.) Por tanto, se utilizará un compensador de retardo-adelanto.

Se supone que la función de transferencia del compensador de retardo-adelanto es

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right)$$

donde $K_c = 128$. Esto se debe a que

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s \to 0} sK_cG(s) = K_c \frac{10}{16} = 80$$

y se obtiene $K_c = 128$. La deficiencia de ángulo en el polo deseado en lazo cerrado deseado $s = -2 + j2\sqrt{3}$ es

$$\text{Deficiencia del ángulo} = 120^\circ + 90^\circ + 30^\circ - 180^\circ = 60^\circ$$

La parte de adelanto del compensador de retardo-adelanto debe contribuir a este ángulo. Para seleccionar T_1 se utiliza el método gráfico que se presentó en la Sección 6-8.

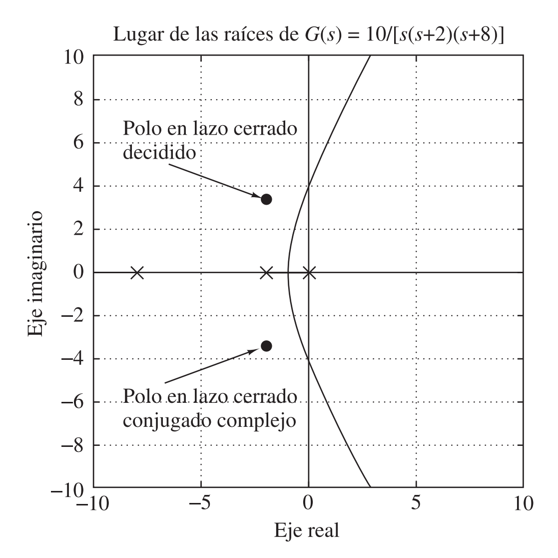


Figura 6-86. Gráfica del lugar de las raíces de $G(s) = 10/[s(s+2)(s+8)]$.

La parte de adelanto debe cumplir las siguientes condiciones:

$$\left| 128 \left(\frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} \right) G(s_1) \right|_{s_1 = -2 + j2\sqrt{3}} = 1$$

y

$$\left. \angle \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s_1 = -2 + j2\sqrt{3}} = 60^{\circ}$$

La primera condición se simplifica como

$$\left| \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\beta}{T_1}} \right|_{s_1 = -2 + j2\sqrt{3}} = \frac{1}{13.3333}$$

Utilizando el mismo método que el aplicado en la Sección 6-8, el cero ($s = 1/T_1$) y el polo ($s = \beta/T_1$) se determinan del modo siguiente:

$$\frac{1}{T_1} = 3.70, \qquad \frac{\beta}{T_1} = 53.35$$

Véase la Figura 6-87. Por tanto, el valor de β se determina como

$$\beta = 14.419$$

Para la parte de retardo del compensador, se selecciona

$$\frac{1}{\beta T_2} = 0.01$$

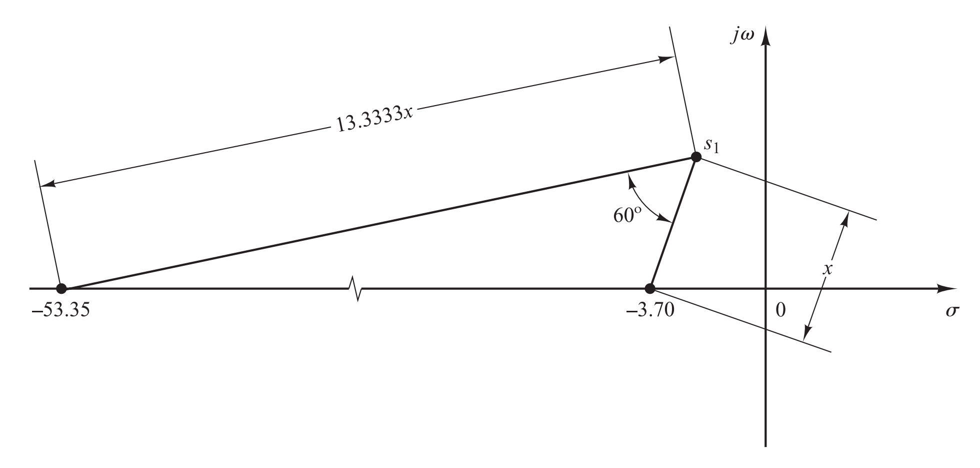


Figura 6-87. Determinación gráfica del cero y el polo de la parte de adelanto del compensador.

Así,

$$\frac{1}{T_2} = 0.1442$$

Considerando que

$$\left| \frac{s_1 + 0.1442}{s_1 + 0.01} \right|_{s_1 = -2 + j2\sqrt{3}} = 0.9837$$

$$\angle \left. \frac{s_1 + 0.1442}{s_1 + 0.01} \right|_{s_1 = -2 + j2\sqrt{3}} = -1.697^{\circ}$$

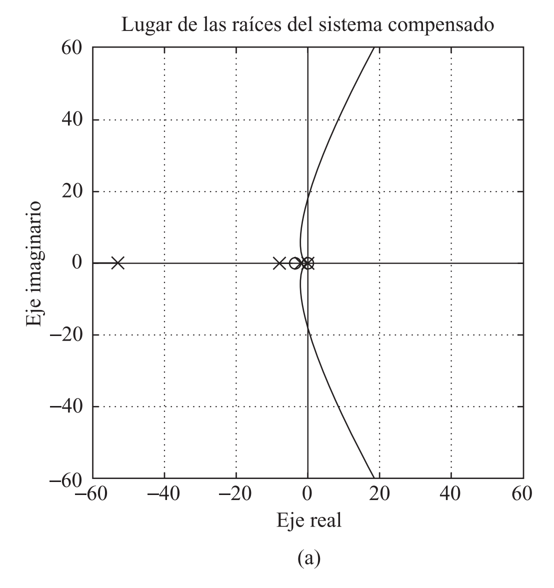
la contribución del ángulo de la parte de retardo es -1.697° y la contribución de magnitud es 0.9837. Esto significa que los polos dominantes en lazo cerrado se encuentran cerca de la posición deseada $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$. Por tanto, el compensador diseñado,

$$G_c(s) = 128\left(\frac{s + 3.70}{s + 53.35}\right)\left(\frac{s + 0.1442}{s + 0.01}\right)$$

es aceptable. La función de transferencia de camino directo del sistema compensado resulta

$$G_c(s)G(s) = \frac{1280(s + 3.7)(s + 0.1442)}{s(s + 53.35)(s + 0.01)(s + 2)(s + 8)}$$

La Figura 6-88(a) muestra una gráfica del lugar de las raíces del sistema compensado. La Figura 6-88(b) muestra una gráfica ampliada del lugar de las raíces cerca del origen.



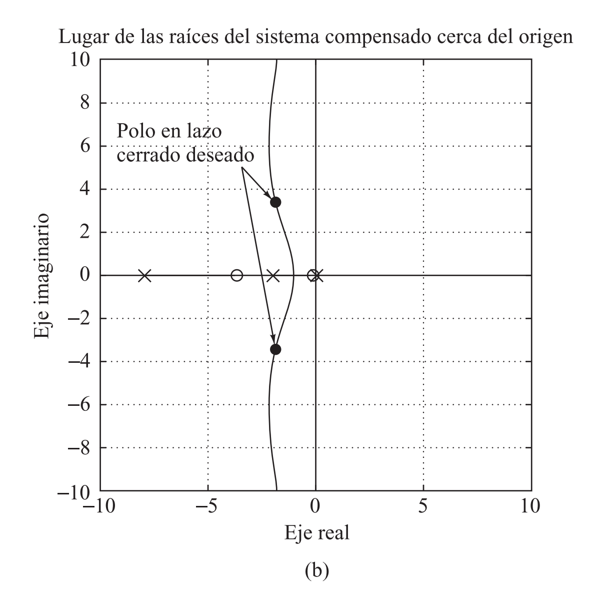


Figura 6-88. (a) Gráfica del lugar de las raíces del sistema compensado; (b) gráfica del lugar de las raíces cerca del origen.

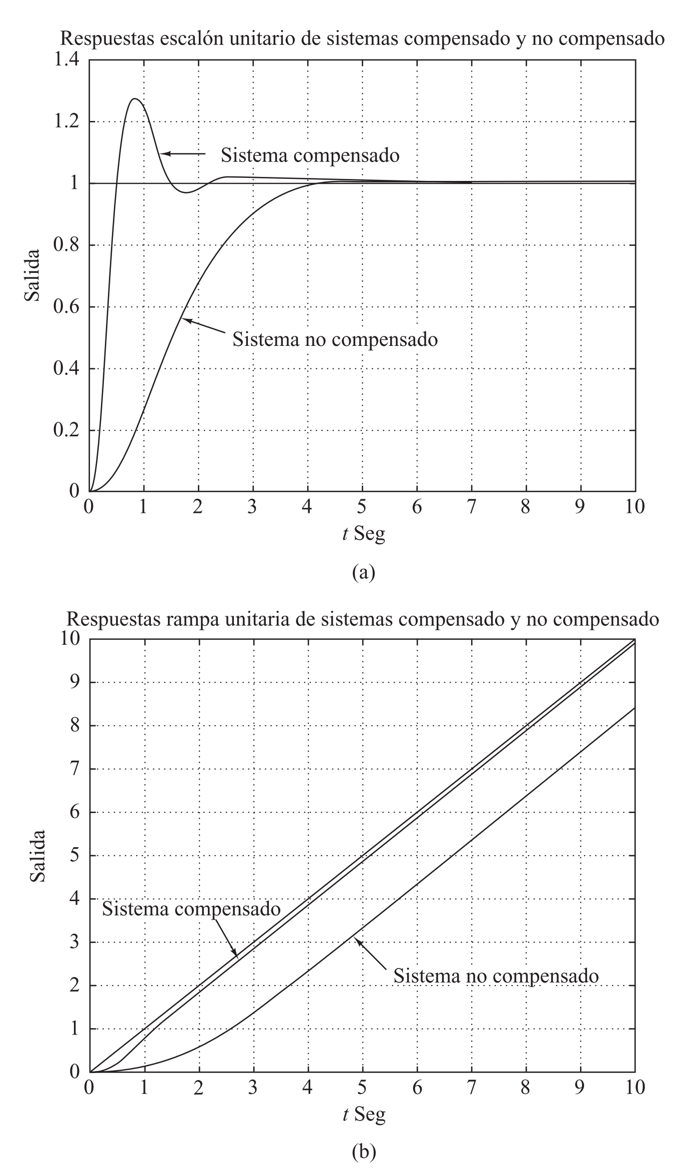


Figura 6-89. (a) Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado; (b) respuestas rampa unitaria de ambos sistemas.

Para verificar el comportamiento del sistema mejorado del sistema sin compensar, véanse las respuestas a un escalón unitario y las respuestas a una rampa unitaria de los sistemas compensados y sin compensar de las Figuras 6-89(a) y (b), respectivamente.

A-6-17. Considere el sistema de la Figura 6-90. Diseñe un compensador de retardo-adelanto tal que la constante de error estático de velocidad K_v sea de 50 seg^{-1} y la razón de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.5. (Seleccione el cero de la parte de adelanto del compensador de retardo-adelanto para cancelar el polo en $s = -1$ de la planta.) Determine todos los polos en lazo cerrado del sistema compensado.

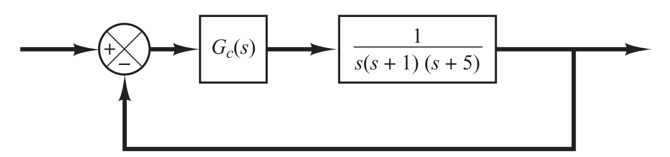


Figura 6-90. Sistema de control.

Solución. Se utiliza el compensador de retardo-adelanto obtenido mediante

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s+\dfrac{1}{T_1}}{s+\dfrac{\beta}{T_1}}\right)\left(\frac{s+\dfrac{1}{T_2}}{s+\dfrac{1}{\beta T_2}}\right) = K_c\,\frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{\left(\dfrac{T_1}{\beta}\,s+1\right)(\beta T_2 s+1)}$$

donde $\beta > 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\,\frac{K_c(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{\left(\dfrac{T_1}{\beta}\,s+1\right)(\beta T_2 s+1)}\,\frac{1}{s(s+1)(s+5)} \\ &= \frac{K_c}{5} \end{aligned}$$

La especificación $K_v = 50\ \text{seg}^{-1}$ determina el valor de K_c:

$$K_c = 250$$

Ahora se selecciona $T_1 = 1$ para que $s + (1/T_1)$ cancele el término $(s + 1)$ de la planta. La parte de adelanto queda

$$\frac{s+1}{s+\beta}$$

Para la parte de retardo del compensador de retardo-adelanto se necesita que

$$\left|\frac{s_1+\dfrac{1}{T_2}}{s_1+\dfrac{1}{\beta T_2}}\right| \doteq 1, \qquad -5^{\circ} < \angle\frac{s_1+\dfrac{1}{T_2}}{s_1+\dfrac{1}{\beta T_2}} < 0^{\circ}$$

donde $s = s_1$ es uno de los polos dominantes en lazo cerrado. Para $s = s_1$ la función de transferencia en lazo abierto se convierte en

$$G_c(s_1)G(s_1) \doteq K_c\left(\frac{s_1+1}{s_1+\beta}\right)\frac{1}{s_1(s_1+1)(s_1+5)} = K_c\,\frac{1}{s_1(s_1+\beta)(s_1+5)}$$

Considerando que en $s = s_1$ se satisfacen las condiciones de magnitud y de ángulo, se tiene que

$$\left| K_c \frac{1}{s_1(s_1 + \beta)(s_1 + 5)} \right| = 1 \tag{6-32}$$

$$\angle K_c \frac{1}{s_1(s_1 + \beta)(s_1 + 5)} = \pm 180^\circ(2k + 1) \tag{6-33}$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$ En las Ecuaciones (6-32) y (6-33), β y s_1 son incógnitas. Como el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado se especifica como 0.5, el polo en lazo cerrado $s = s_1$ queda

$$s_1 = -x + j\sqrt{3}x$$

donde x todavía no está determinada.

Observe que la condición de magnitud, Ecuación (6-32), se puede reescribir como

$$\left| \frac{K_c}{(-x + j\sqrt{3}x)(-x + \beta + j\sqrt{3}x)(-x + 5 + j\sqrt{3}x)} \right| = 1$$

Considerando que $K_c = 250$, se tiene que

$$x\sqrt{(\beta - x)^2 + 3x^2}\,\sqrt{(5 - x)^2 + 3x^2} = 125 \tag{6-34}$$

La condición de ángulo, Ecuación (6-33), puede reescribirse como

$$\angle K_c \frac{1}{(-x + j\sqrt{3}x)(-x + \beta + j\sqrt{3}x)(-x + 5 + j\sqrt{3}x)}$$

$$= -120^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{-x + \beta}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{-x + 5}\right) = -180^\circ$$

o bien

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{-x + \beta}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{-x + 5}\right) = 60^\circ \tag{6-35}$$

Se necesita despejar β y x en las Ecuaciones (6-34) y (6-35). Mediante varios cálculos de prueba y error, se encuentra que

$$\beta = 16.025, \qquad x = 1.9054$$

Por tanto,

$$s_1 = -1.9054 + j\sqrt{3}\,(1.9054) = -1.9054 + j3.3002$$

La parte de retardo del compensador de retardo-adelanto se determina del modo siguiente: considerando que el polo y el cero de la parte de retardo del compensador deben localizarse cerca del origen, se selecciona

$$\frac{1}{\beta T_2} = 0.01$$

Es decir,

$$\frac{1}{T_2} = 0.16025 \quad \text{o bien} \quad T_2 = 6.25$$

Con la elección de $T_2 = 6.25$, se tiene que

$$\left| \frac{s_1 + \dfrac{1}{T_2}}{s_1 + \dfrac{1}{\beta T_2}} \right| = \left| \frac{-1.9054 + j3.3002 + 0.16025}{-1.9054 + j3.3002 + 0.01} \right|$$

$$= \left| \frac{-1.74515 + j3.3002}{-1.89054 + j3.3002} \right| = 0.98 \doteqdot 1 \qquad (6\text{-}36)$$

y

$$\angle \frac{s_1 + \dfrac{1}{T_2}}{s_1 + \dfrac{1}{\beta T_2}} = \angle \frac{-1.9054 + j3.3002 + 0.16025}{-1.9054 + j3.3002 + 0.01}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3.3002}{-1.74515}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3.3002}{-1.89054}\right) = -1.937^{\circ} \qquad (6\text{-}37)$$

Como

$$-5^{\circ} < -1.937^{\circ} < 0^{\circ}$$

la elección de $T_2 = 6.25$ es aceptable. A continuación, el compensador de retardo-adelanto recién diseñado se escribe como

$$G_c(s) = 250\left(\frac{s + 1}{s + 16.025}\right)\left(\frac{s + 0.16025}{s + 0.01}\right)$$

Por tanto, el sistema compensado tiene la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G_c(s)G(s) = \frac{250(s + 0.16025)}{s(s + 0.01)(s + 5)(s + 16.025)}$$

La Figura 6-91(a) muestra una gráfica del lugar de las raíces del sistema compensado. La Figura 6-91(b) muestra una gráfica ampliada del lugar de las raíces cerca del origen.

La función de transferencia en lazo cerrado se convierte en

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{250(s + 0.16025)}{s(s + 0.01)(s + 5)(s + 16.025) + 250(s + 0.16025)}$$

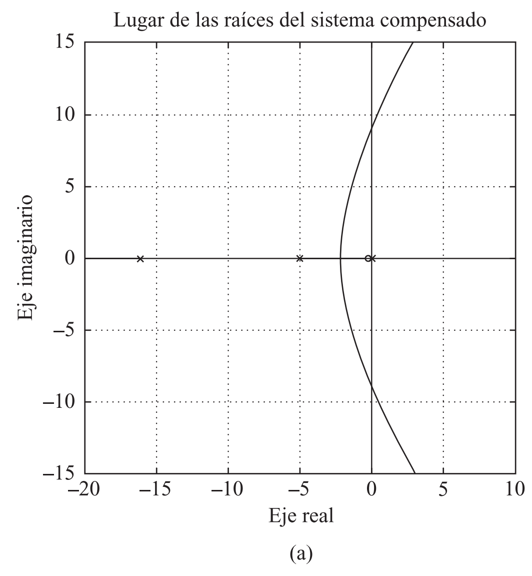
Los polos en lazo cerrado se localizan en

$$s = -1.8308 \pm j3.2359$$

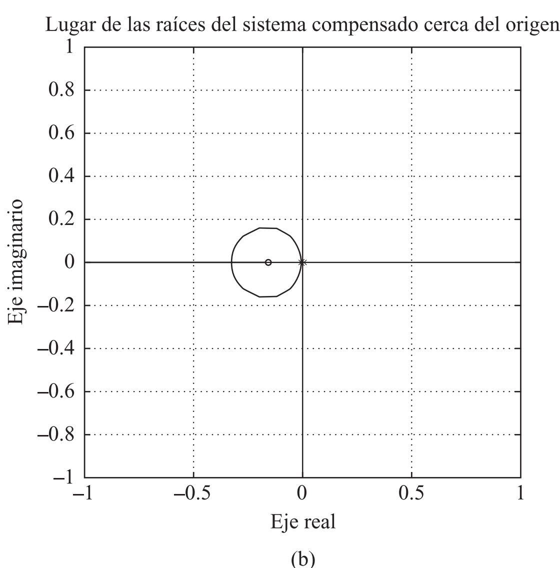
$$s = -0.1684$$

$$s = -17.205$$

Observe que los polos dominantes en lazo cerrado $s = -1.8308 \pm j3.2359$ difieren de los polos dominantes en lazo cerrado $s = \pm s_1$ supuestos en el cálculo de β y T_2. Las pequeñas desviaciones de los polos dominantes en lazo cerrado $s = -1.8308 \pm j3.2359$ a partir de $s = \pm s_1 = -1.9054 \pm j3.3002$ se deben a las aproximaciones implícitas al determinar la parte de retardo del compensador [véanse las Ecuaciones (6-36) y (6-37)].



(a)



(b)

Figura 6-91. (a) Gráfica del lugar de las raíces del sistema compensado; (b) gráfica del lugar de las raíces cerca del origen.

Las Figuras 6-92(a) y (b) muestran, respectivamente, la respuesta a un escalón unitario y la respuesta a una rampa unitaria del sistema diseñado. Observe que el polo en lazo cerrado en $s = -0.1684$ casi cancela el cero en $s = -0.16025$. Sin embargo, este par formado por un polo y un cero en lazo cerrado localizado cerca del origen produce una larga cola de amplitud pequeña. Como el polo en lazo cerrado en $s = -17.205$ se localiza muy lejos a la izquierda, en comparación con los polos en lazo cerrado en $s = -1.8308 \pm j3.2359$, el efecto de este polo real sobre la respuesta del sistema también es muy pequeño. Por tanto, los polos en lazo cerrado en $s = -1.8308 \pm j3.2359$ son en realidad polos dominantes en lazo cerrado que determinan la característica de respuesta del sistema en lazo cerrado. En la respuesta a una rampa unitaria, el error en estado estacionario al seguir la entrada rampa unitaria termina por convertirse en $1/K_v = \frac{1}{50} = 0.02$.

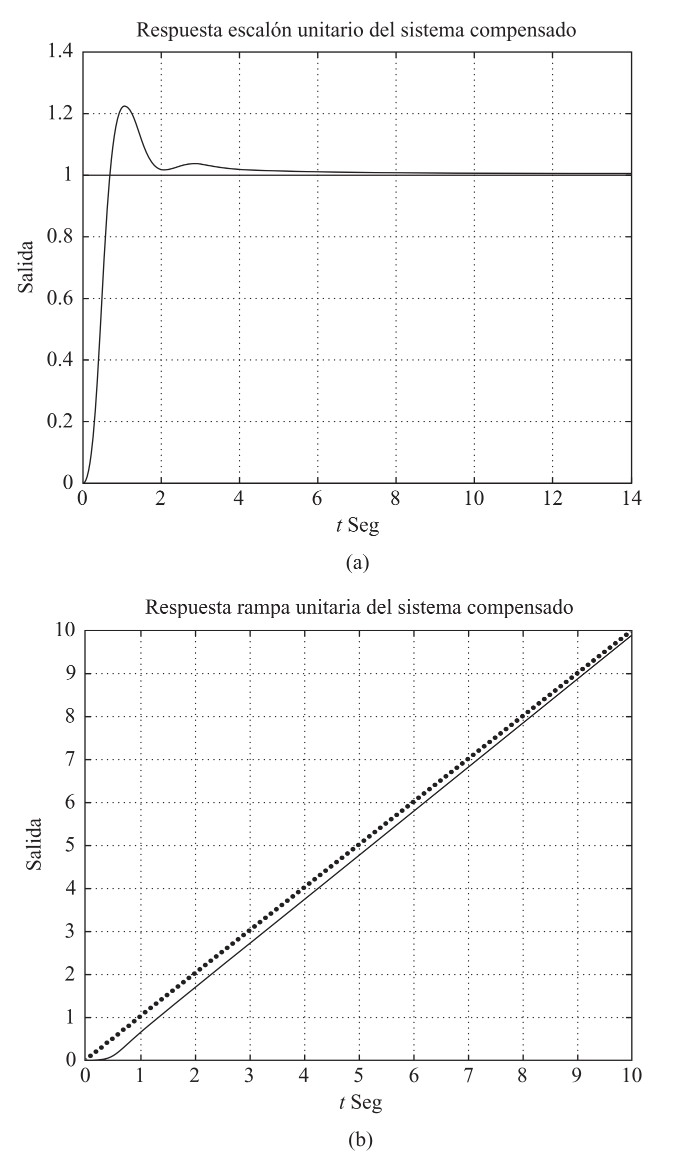


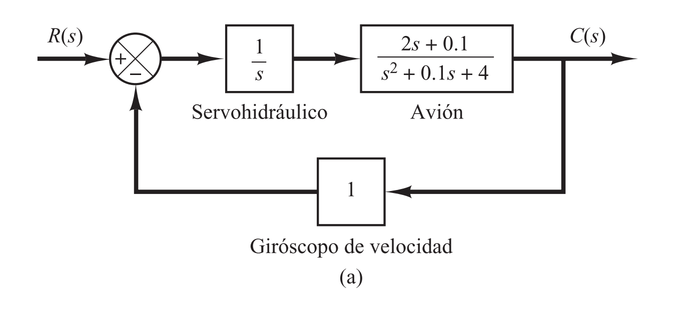
Figura 6-92. (a) Respuesta a un escalón unitario del sistema compensado; (b) respuesta a una rampa unitaria del sistema compensado.

A-6-18. La Figura 6-93(a) es un diagrama de bloques de un modelo para un sistema de control de cambio de posición. La función de transferencia en lazo cerrado para este sistema es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 0.1}{s^3 + 0.1s^2 + 6s + 0.1}$$

$$= \frac{2(s + 0.05)}{(s + 0.0417 + j2.4489)(s + 0.0417 - j2.4489)(s + 0.0167)}$$

La respuesta a un escalón unitario de este sistema se muestra en la Figura 6-93(b). La respuesta muestra las oscilaciones de alta frecuencia al inicio de la misma, debido a los polos en



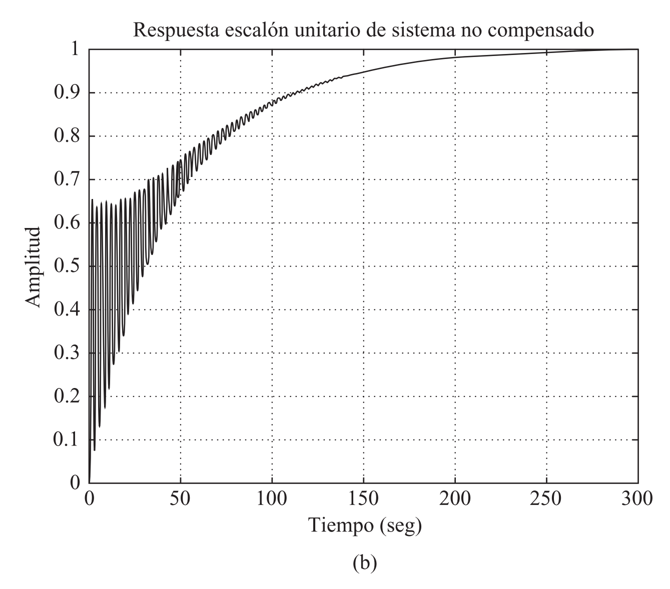


Figura 6-93. (a) Sistema de control de cambio de posición; (b) respuesta a un escalón unitario.

$s = -0.0417 \pm j2.4489$. La respuesta la controla el polo en $s = -0.0167$. El tiempo de asentamiento es de aproximadamente 240 segundos.

Se desea acelerar la respuesta, así como eliminar el comportamiento oscilatorio al inicio de la misma. Diseñe un compensador adecuado tal que los polos dominantes en lazo cerrado estén en $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$.

Solución. La Figura 6-94 muestra un diagrama de bloques para el sistema compensado. Observe que el cero en lazo abierto en $s = -0.05$ y el polo en lazo abierto en $s = 0$ generan un polo en lazo cerrado entre $s = 0$ y $s = -0.05$. Tal polo en lazo cerrado se convierte en un polo dominante en lazo cerrado y desacelera la respuesta. Por tanto, es necesario sustituir este cero por uno que se localice bastante lejos del eje $j\omega$, por ejemplo, un cero en $s = -4$.

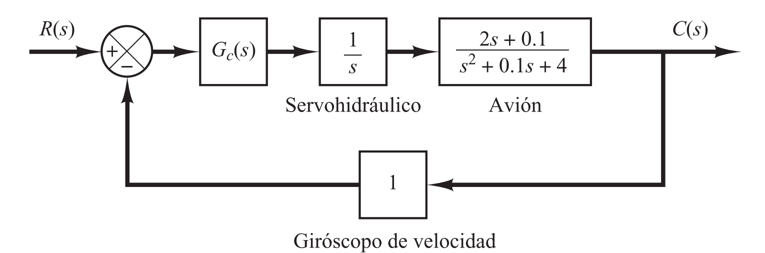


Figura 6-94. Sistema de control de cambio de posición compensado.

Ahora se selecciona el compensador de la forma siguiente:

$$G_c(s) = \hat{G}_c(s)\,\frac{s+4}{2s+0.1}$$

A continuación, la función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado queda

$$G_c(s)G(s) = \hat{G}_c(s)\,\frac{s+4}{2s+0.1}\,\frac{1}{s}\,\frac{2s+0.1}{s^2+0.1s+4}$$

$$= \hat{G}_c(s)\,\frac{s+4}{s(s^2+0.1s+4)}$$

Para determinar $\hat{G}_c(s)$ mediante el método del lugar de las raíces, se necesita encontrar la deficiencia de ángulo en el polo en lazo cerrado deseado $s = -2 + j2\sqrt{3}$. La deficiencia del ángulo se encuentra del siguiente modo:

$$\text{Deficiencia del ángulo} = -143.088^\circ - 120^\circ - 109.642^\circ + 60^\circ + 180^\circ$$

$$= -132.73^\circ$$

Por tanto, el compensador de adelanto $\hat{G}_c(s)$ debe aportar 132.73°. Como la deficiencia de ángulo es de 132.73°, se necesitan dos compensadores de adelanto que aporten 66.365° cada uno. Por tanto, $G_c(s)$ tendrá la siguiente forma:

$$G_c(s) = K_c\left(\frac{s+s_z}{s+s_p}\right)^2$$

Suponga que se eligen dos ceros en $s = -2$. A continuación, los dos polos de los compensadores de adelanto se obtienen a partir de

$$\frac{3.4641}{s_p - 2} = \tan(90^\circ - 66.365^\circ) = 0.4376169$$

o bien

$$s_p = 2 + \frac{3.4641}{0.4376169}$$

$$= 9.9158$$

(Véase Figura 6-95.) Por tanto,

$$\hat{G}_c(s) = K_c\left(\frac{s+2}{s+9.9158}\right)^2$$

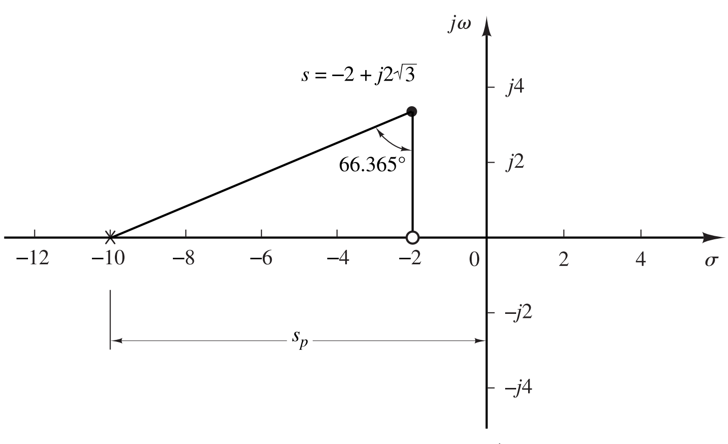


Figura 6-95. Polo y cero de $\hat{G}_c(s)$.

El compensador $G_c(s)$ completo para el sistema queda

$$G_c(s) = \hat{G}_c(s)\,\frac{s+4}{2s+0.1} = K_c\,\frac{(s+2)^2}{(s+9.9158)^2}\,\frac{s+4}{2s+0.1}$$

El valor de K_c se determina a partir de la condición de magnitud. Como la función de transferencia en lazo abierto es

$$G_c(s)G(s) = K_c\,\frac{(s+2)^2(s+4)}{(s+9.9158)^2 s(s^2+0.1s+4)}$$

la condición de magnitud queda

$$\left|K_c\,\frac{(s+2)^2(s+4)}{(s+9.9158)^2 s(s^2+0.1s+4)}\right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 1$$

Por tanto,

$$K_c = \left|\frac{(s+9.9158)^2 s(s^2+0.1s+4)}{(s+2)^2(s+4)}\right|_{s=-2+j2\sqrt{3}}$$

$$= 88.0227$$

De este modo, el compensador $G_c(s)$ queda

$$G_c(s) = 88.0227\,\frac{(s+2)^2(s+4)}{(s+9.9158)^2(2s+0.1)}$$

La función de transferencia en lazo abierto se obtiene mediante

$$G_c(s)G(s) = \frac{88.0227(s+2)^2(s+4)}{(s+9.9158)^2 s(s^2+0.1s+4)}$$

La Figura 6-96 muestra una gráfica del lugar de las raíces para el sistema compensado. En la gráfica se indican los polos en lazo cerrado para el sistema compensado. Los polos en lazo cerrado, las raíces de la ecuación característica

$$(s+9.9158)^2 s(s^2+0.1s+4) + 88.0227(s+2)^2(s+4) = 0$$

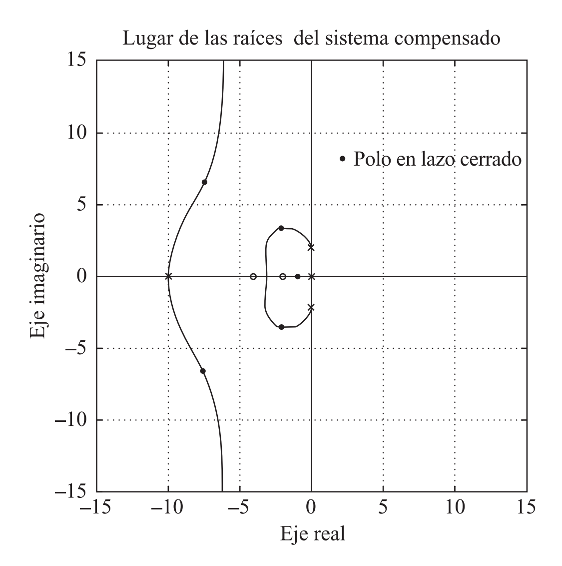


Figura 6-96. Gráfica del lugar de las raíces del sistema compensado.

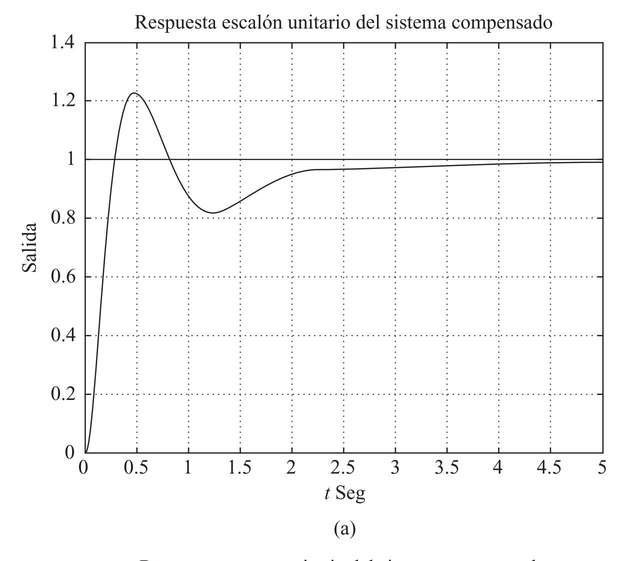
son los siguientes:

$$s = -2.0000 \pm j3.4641$$
$$s = -7.5224 \pm j6.5326$$
$$s = -0.8868$$

Ahora que se ha diseñado el compensador, se examina la característica de la respuesta transitoria con MATLAB. La función de transferencia en lazo cerrado se obtiene a partir de

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{88.0227(s+2)^2(s+4)}{(s+9.9158)^2 s(s^2+0.1s+4) + 88.0227(s+2)^2(s+4)}$$

Las Figuras 6-97(a) y (b) muestran las gráficas de la respuesta a un escalón unitario y de la respuesta a una rampa unitaria del sistema compensado. Estas curvas de respuesta muestran que el sistema diseñado es aceptable.



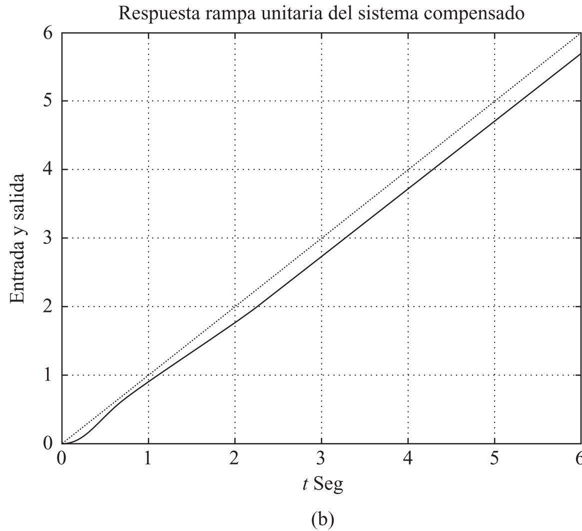


Figura 6-97. (a) Respuesta a un escalón unitario del sistema compensado; (b) respuesta a una rampa unitaria del sistema compensado.

A-6-19. Considere el sistema de la Figura 6-98(a). Determine el valor de a para que el factor de amortiguamiento ζ de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.5.

Solución. La ecuación característica es

$$1 + \frac{10(s + a)}{s(s + 1)(s + 8)} = 0$$

La variable a no es un factor multiplicativo. Por tanto, es necesario modificar la ecuación característica. Entonces la ecuación característica se puede escribir como

$$s^3 + 9s^2 + 18s + 10a = 0$$

Si se reescribe esta ecuación tal que a aparezca como un factor multiplicativo queda:

$$1 + \frac{10a}{s(s^2 + 9s + 18)} = 0$$

Se define

$$10a = K$$

Por tanto, la ecuación característica queda

$$1 + \frac{K}{s(s^2 + 9s + 18)} = 0$$

Observe que la ecuación característica tiene una forma adecuada para la construcción de la gráfica del lugar de las raíces.

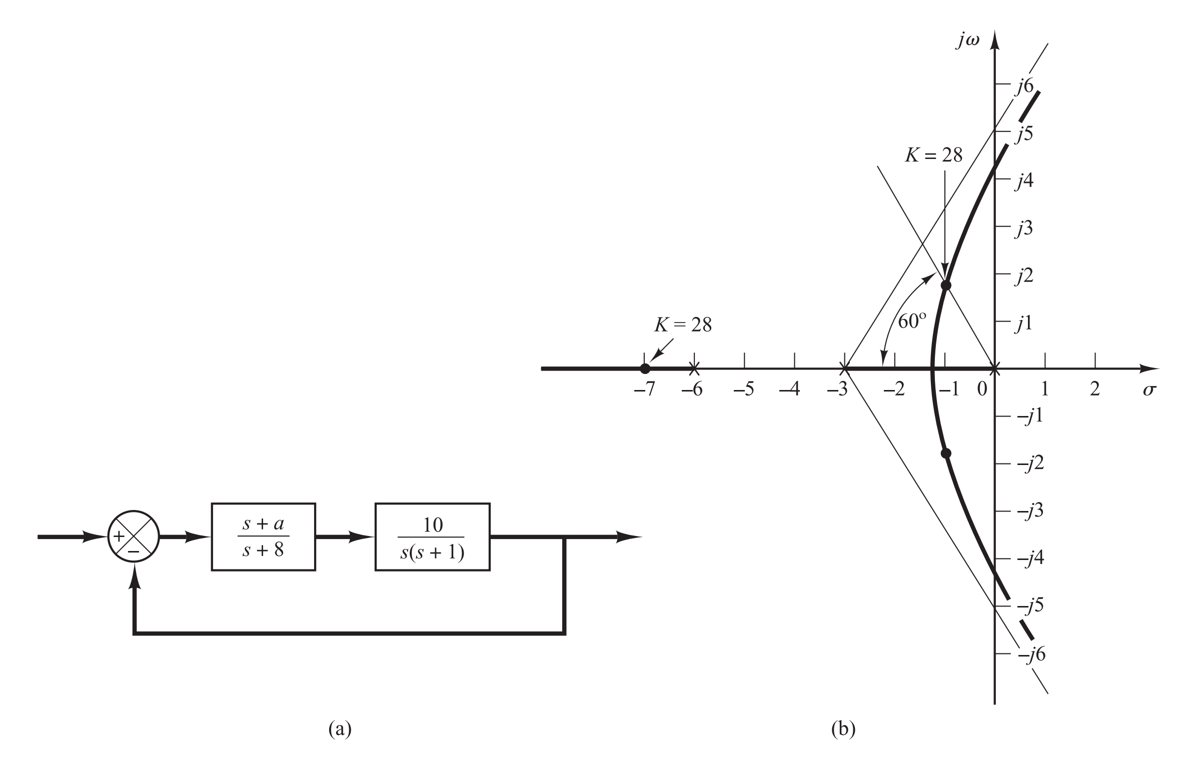


Figura 6-98. (a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar de las raíces donde $K = 10a$.

Este sistema tiene tres polos y ningún cero. Los tres polos están en $s = 0$, $s = -3$ y $s = -6$. Una rama del lugar de las raíces se encuentra sobre el eje real entre los puntos $s = 0$ y $s = -3$. Además, hay otra rama entre los puntos $s = -6$ y $s = -\infty$.

Las asíntotas para el lugar de las raíces se calculan como sigue:

$$\text{Ángulos de las asíntotas} = \frac{\pm 180^{\circ}(2k+1)}{3} = 60^{\circ},\ -60^{\circ},\ 180^{\circ}$$

La intersección de las asíntotas y el eje real se obtiene a partir de

$$s = -\frac{0+3+6}{3} = -3$$

Los puntos de ruptura y de ingreso se calculan a partir de $dK/ds = 0$, donde

$$K = -(s^3 + 9s^2 + 18s)$$

Calculando

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 18s + 18) = 0$$

se obtiene

$$s^2 + 6s + 6 = 0$$

o bien

$$s = -1.268, \qquad s = -4.732$$

El punto $s = -1.268$ se encuentra sobre una rama del lugar de las raíces. Por tanto, el punto $s = -1.268$ es un punto de ruptura. Pero el punto $s = -4.732$ no se encuentra sobre el lugar de las raíces y, por tanto, no es punto de ruptura ni de ingreso.

A continuación se buscan los puntos donde las ramas del lugar de las raíces cortan al eje imaginario. Se sustituye $s = j\omega$ en la ecuación característica

$$s^3 + 9s^2 + 18s + K = 0$$

como sigue:

$$(j\omega)^3 + 9(j\omega)^2 + 18(j\omega) + K = 0$$

o bien

$$(K - 9\omega^2) + j\omega(18 - \omega^2) = 0$$

de donde se obtiene

$$\omega = \pm 3\sqrt{2}, \qquad K = 9\omega^2 = 162 \quad \text{o bien} \quad \omega = 0, \qquad K = 0$$

Los puntos de corte están en $\omega = \pm 3\sqrt{2}$ y el correspondiente valor de la ganancia K es 162. Además, una rama del lugar de las raíces toca el eje imaginario en $\omega = 0$. La Figura 6-98(b) muestra una gráfica del lugar de las raíces para el sistema.

Como el factor de amortiguamiento de los polos dominantes en lazo cerrado se especificó en 0.5, el polo deseado en lazo cerrado en el semiplano superior s se localiza en la intersección de la rama del lugar de las raíces en el semiplano superior s y una línea recta que forma un ángulo de 60° con el eje real negativo. Los polos dominantes deseados en lazo cerrado se localizan en

$$s = -1 + j1.732, \qquad s = -1 - j1.732$$

En estos puntos el valor de la ganancia K es 28. Por tanto,

$$a = \frac{K}{10} = 2.8$$

Al tener el sistema dos o más polos que ceros (de hecho, tres polos y ningún cero), el tercer polo se puede localizar sobre el eje real negativo debido a que la suma de los tres polos cerrados es -9. Por tanto, el tercer polo se encuentra en

$$s = -9 - (-1 + j1.732) - (-1 - j1.732)$$

o bien

$$s = -7$$

A-6-20. Considere el sistema de la Figura 6-99(a). Dibuje el lugar de las raíces del sistema cuando la ganancia k de la realimentación de velocidad varía de cero a infinito. Determine el valor de k para que los polos en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento ζ de 0.7.

Solución. La función de transferencia en lazo abierto es

$$\text{Función de transferencia en lazo abierto} = \frac{10}{(s + 1 + 10k)s}$$

Como k no es un factor multiplicativo, hay que modificar la ecuación para que k aparezca como factor multiplicativo. Como la ecuación característica es

$$s^2 + s + 10ks + 10 = 0$$

se reescribe esta ecuación como sigue:

$$1 + \frac{10ks}{s^2 + s + 10} = 0 \tag{6.38}$$

Se define

$$10k = K$$

La Ecuación (6-38) queda

$$1 + \frac{Ks}{s^2 + s + 10} = 0$$

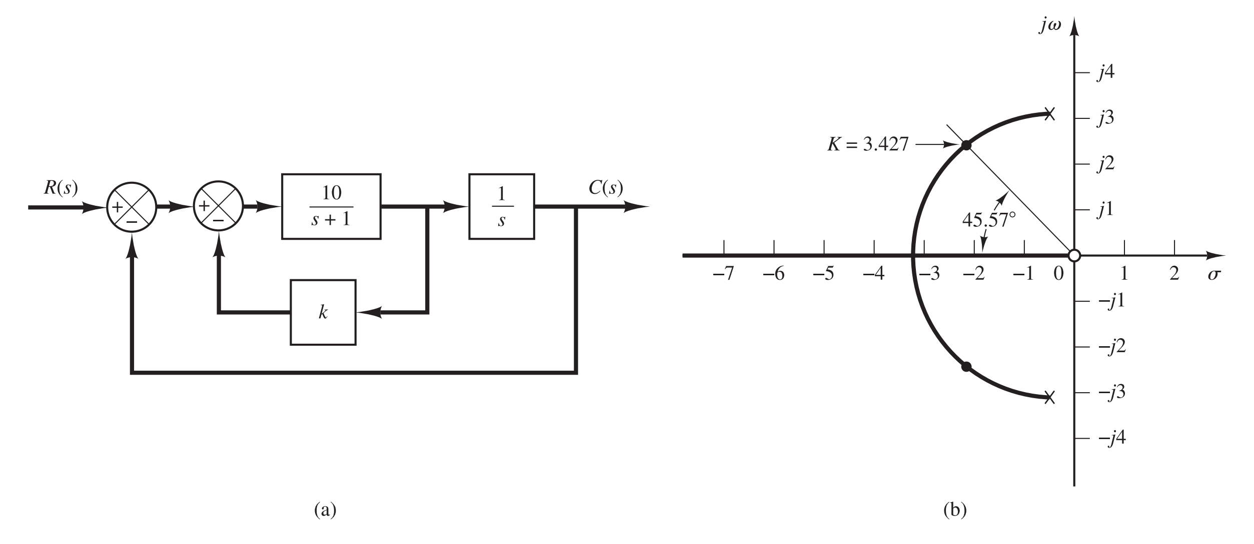


Figura 6-99. (a) Sistema de control; (b) gráfica del lugar de las raíces donde $K = 10k$.

Observe que el sistema tiene un cero en $s = 0$ y dos polos en $s = -0.5 \pm j3.1225$. Como el sistema tiene dos polos y un cero, existe la posibilidad de tener un lugar de las raíces circular. De hecho, como se verá a continuación, este sistema tiene un lugar de las raíces circular. Por la condición de ángulo

$$\angle \frac{Ks}{s^2 + s + 10} = \pm 180^{\circ}(2k + 1)$$

se tiene

$$\angle s - \angle s + 0.5 + j3.1225 - \angle s + 0.5 - j3.1225 = \pm 180^{\circ}(2k + 1)$$

Sustituyendo $s = \sigma + j\omega$ en esta última ecuación y reagrupando, se obtiene

$$\angle \sigma + 0.5 + j(\omega + 3.1225) + \angle \sigma + 0.5 + j(\omega - 3.1225) = \angle \sigma + j\omega \pm 180^{\circ}(2k + 1)$$

que se puede reescribir como

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega + 3.1225}{\sigma + 0.5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega - 3.1225}{\sigma + 0.5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) \pm 180^{\circ}(2k + 1)$$

Tomando tangentes a ambos lados de esta última ecuación se obtiene

$$\frac{\dfrac{\omega + 3.1225}{\sigma + 0.5} + \dfrac{\omega - 3.1225}{\sigma + 0.5}}{1 - \left(\dfrac{\omega + 3.1225}{\sigma + 0.5}\right)\left(\dfrac{\omega - 3.1225}{\sigma + 0.5}\right)} = \frac{\omega}{\sigma}$$

Simplificando,

$$\frac{2\omega(\sigma + 0.5)}{(\sigma + 0.5)^2 - (\omega^2 - 3.1225^2)} = \frac{\omega}{\sigma}$$

o bien

$$\omega(\sigma^2 - 10 + \omega^2) = 0$$

donde

$$\omega = 0 \qquad \text{o bien} \qquad \sigma^2 + \omega^2 = 10$$

Observe que $\omega = 0$ corresponde al eje real. El eje real negativo (entre $s = 0$ y $s = -\infty$) corresponde a $K \geqslant 0$ y el eje real positivo corresponde a $K < 0$. La ecuación

$$\sigma^2 + \omega^2 = 10$$

es una ecuación de un círculo con centro en $\sigma = 0$, $\omega = 0$ con radio igual a $\sqrt{10}$. Una parte de este círculo la cual se encuentra a la izquierda de los polos complejos se corresponde con el lugar de las raíces para $K > 0$. La parte del círculo que se encuentra a la derecha de los polos complejos se corresponde con el lugar de las raíces para $K < 0$. La Figura 6-99(b) muestra la gráfica del lugar de las raíces.

Como se requiere que $\zeta = 0.7$ para los polos en lazo cerrado, hay que buscar la intersección del lugar de las raíces circular con una línea que forma un ángulo de 45.57° (observe que $\cos 45.57^{\circ} = 0.7$) con el eje real negativo. La intersección es en $s = -2.214 + j2.258$. La ganancia K correspondiente a ese punto es 3.427. Por tanto, el valor deseado de la ganancia de realimentación de velocidad k es

$$k = \frac{K}{10} = 0.3427$$

PROBLEMAS

B-6-1. Dibuje los lugares de las raíces para el sistema de control en lazo cerrado con

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2}, \qquad H(s) = 1$$

B-6-2. Dibuje los lugares de las raíces para el sistema de control en lazo cerrado con

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s^2+4s+5)}, \qquad H(s) = 1$$

B-6-3. Dibuje los lugares de las raíces para el sistema con

$$G(s) = \frac{K}{s(s+0.5)(s^2+0.6s+10)}, \qquad H(s) = 1$$

B-6-4. Demuestre que los lugares de las raíces para un sistema de control con

$$G(s) = \frac{K(s^2+6s+10)}{s^2+2s+10}, \qquad H(s) = 1$$

son arcos de círculo con centro en el origen y con radio igual a $\sqrt{10}$.

B-6-5. Dibuje los lugares de las raíces para un sistema de control en lazo cerrado con

$$G(s) = \frac{K(s+0.2)}{s^2(s+3.6)}, \qquad H(s) = 1$$

B-6-6. Dibuje los lugares de las raíces para el sistema de control en lazo cerrado con

$$G(s) = \frac{K(s+9)}{s(s^2+4s+11)}, \qquad H(s) = 1$$

Localice los polos en lazo cerrado sobre los lugares de las raíces de modo que los polos dominantes en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento igual a 0.5. Determine el valor correspondiente de la ganancia K.

B-6-7. Dibuje el lugar de las raíces para el sistema de la Figura 6-100. Determine el rango de valores de la ganancia K.

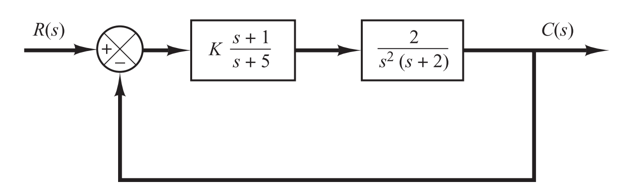


Figura 6-100. Sistema de control.

B-6-8. Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia de trayectoria directa:

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+8)}$$

Dibuje los lugares de las raíces para el sistema. Si el valor de la ganancia se fija a 2, ¿dónde se localizan los polos en lazo cerrado?

B-6-9. Considere el sistema cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s)H(s) = \frac{K(s-0.6667)}{s^4+3.3401s^3+7.0325s^2}$$

Demuestre que la ecuación para las asíntotas es

$$G_a(s)H_a(s) = \frac{K}{s^3+4.0068s^2+5.3515s+2.3825}$$

Utilizando MATLAB, dibuje el lugar de las raíces y las asíntotas para el sistema.

B-6-10. Considere el sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia de trayectoria directa es

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

El lugar de ganancia constante para el sistema para un valor de ganancia determinado K se define mediante la siguiente ecuación:

$$\left|\frac{K}{s(s+1)}\right| = 1$$

Demuestre que el lugar de ganancia constante para $0 \leqslant K \leqslant \infty$ puede venir dado por

$$[\sigma(\sigma+1)+\omega^2]^2+\omega^2 = K^2$$

Dibuje el lugar de ganancia constante para $K = 1, 2, 5, 10$ y 20 sobre el plano s.

B-6-11. Considere el sistema de la Figura 6-101. Dibuje el lugar de las raíces con MATLAB. Localice los polos en lazo cerrado cuando la ganancia K es igual a 2.

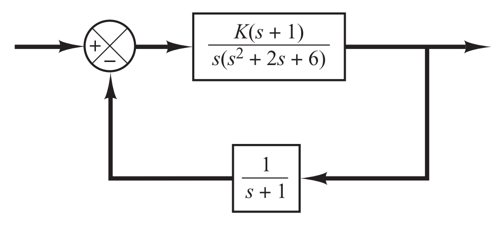


Figura 6-101. Sistema de control.

B-6-12. Dibuje los diagramas de los lugares de las raíces para el sistema de fase no mínima de las Figuras 6-102(a) y (b), respectivamente.

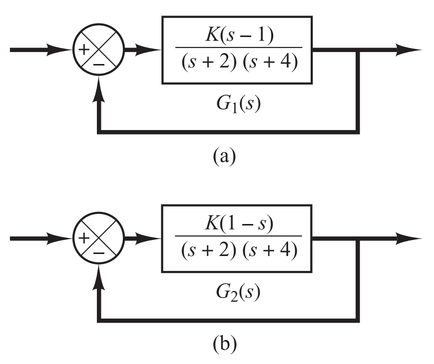


Figura 6-102. (a) y (b) Sistemas de fase no mínima.

B-6-13. Considere el sistema mecánico de la Figura 6-103. Está formado por un resorte y dos amortiguadores. Obtenga la función de transferencia del sistema. El desplazamiento x_i es la entrada y el desplazamiento x_o es la salida. Este sistema, ¿es una red de adelanto mecánico o una red de retardo?

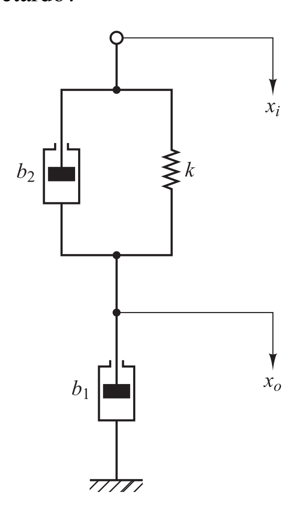


Figura 6-103. Sistema mecánico.

B-6-14. Considere el sistema de la Figura 6-104. Dibuje los lugares de las raíces para el sistema. Determine el valor de K tal que el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.5. Después, determine todos los polos en lazo cerrado. Dibuje la curva de la respuesta a un escalón unitario con MATLAB.

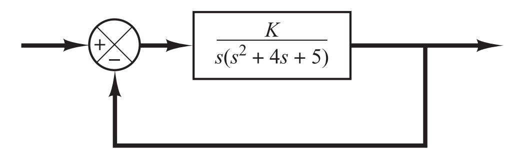


Figura 6-104. Sistema de control.

B-6-15. Determine los valores de K, T_1 y T_2 del sistema de la Figura 6-105 tales que los polos dominantes en lazo cerrado tengan el factor de amortiguamiento relativo $\zeta = 0.5$ y la frecuencia natural no amortiguada $\omega_n = 3$ rad/seg.

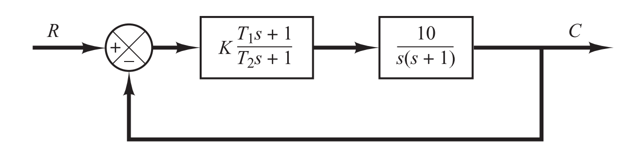


Figura 6-105. Sistema mecánico.

B-6-16. Considere el sistema de control de la Figura 6-106. Determine la ganancia K y la constante de tiempo T del controlador $G_c(s)$ para que los polos en lazo cerrado se localicen en $s = -2 \pm j2$.

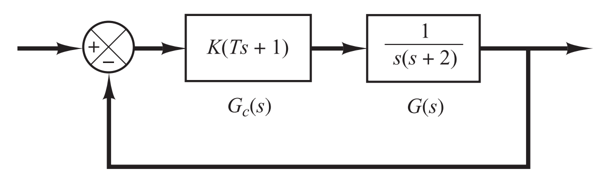


Figura 6-106. Sistema de control.

B-6-17. Considere el sistema de la Figura 6-107. Diseñe un compensador de adelanto para que los polos dominantes en lazo cerrado se localicen en $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$. Dibuje la respuesta a una entrada escalón del sistema diseñado con MATLAB.

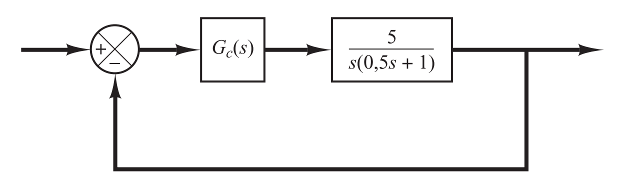


Figura 6-107. Sistema de control.

B-6-18. Considere el sistema de la Figura 6-108. Diseñe un compensador tal que los polos dominantes en lazo cerrado se localicen en $s = -1 \pm j1$.

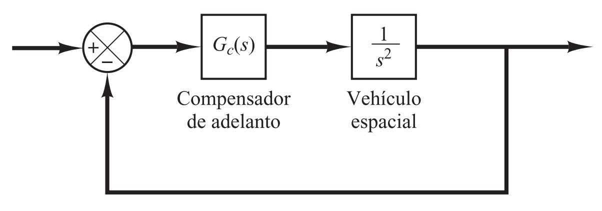


Figura 6-108. Sistema de control.

B-6-19. Haciendo referencia al sistema de la Figura 6-109, diseñe un compensador tal que la constante de error estático de velocidad K_v sea de 20 seg^{-1} sin que se modifique de forma notable la localización original ($s = -2 \pm j2\sqrt{3}$) de un par de polos complejos conjugados en lazo cerrado.

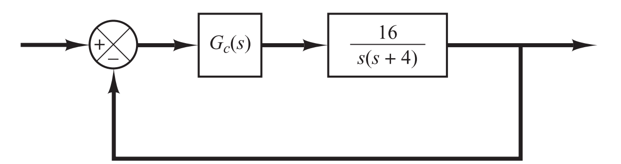


Figura 6-109. Sistema de control.

B-6-20. Considere el sistema de control de posición angular de la Figura 6-110. Los polos dominantes en lazo cerrado se localizan en $s = -3.60 \pm j4.80$. El factor de amortiguamiento relativo ξ de los polos dominantes en lazo cerrado es 0.6. La constante de error estático de velocidad K_v es 4.1 seg^{-1}, lo que significa que, para una entrada rampa de 360º/seg, el error en estado estacionario al seguir la entrada rampa es

$$e_v = \frac{\theta_i}{K_v} = \frac{360^{\circ}/\text{seg}}{4.1 \text{ seg}^{-1}} = 87.8^{\circ}$$

Se desea disminuir e_v a un 10% del valor presente, o incrementar el valor de la constante de error estático de velocidad K_v a 41 seg^{-1}. También se busca conservar el factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos dominantes en lazo cerrado en 0.6. Se permite un pequeño cambio en la frecuencia natural no amortiguada ω_n de los polos dominantes en lazo cerrado. Diseñe un compensador de retardo adecuado para incrementar la constante de error estático de velocidad al valor deseado.

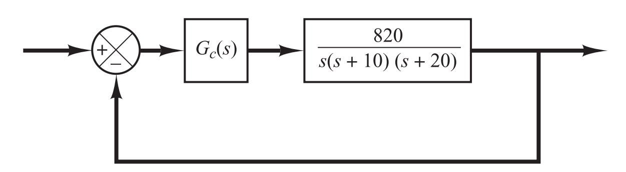


Figura 6-110. Sistema de posición angular.

B-6-21. Considere el sistema de control de la Figura 6-111. Diseñe un compensador tal que los polos dominantes en lazo cerrado se localicen en $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$ y la constante de error estático de velocidad K_v sea de 50 seg^{-1}.

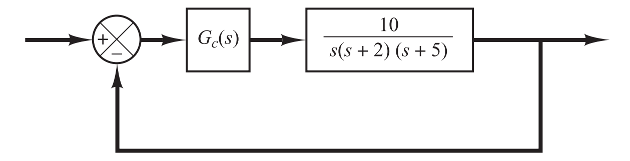


Figura 6-111. Sistema de control.

B-6-22. Considere el sistema de control de la Figura 6-112. Diseñe un compensador tal que la curva de respuesta a un escalón unitario muestre una máxima sobreelongación del 30% o menor y un tiempo de asentamiento no superior a 3 seg.

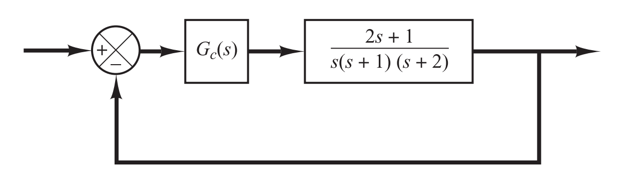


Figura 6-112. Sistema de control.

B-6-23. Considere el sistema de control de la Figura 6-113. Diseñe un compensador tal que la curva de respuesta a un escalón unitario muestre una máxima sobreelongación del 25% o menor y un tiempo de asentamiento no superior a 5 seg.

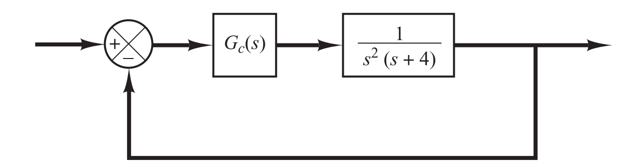


Figura 6-113. Sistema de control.

B-6-24. Considere el sistema de la Figura 6-114, que incluye una realimentación de velocidad. Determine los valores de la ganancia de amplificador K y la ganancia de realimentación de velocidad K_h, tales que se satisfagan las siguientes especificaciones:

1. El factor de amortiguamiento de los polos en lazo cerrado es 0.5.
2. El tiempo de asentamiento es $\leqslant 2$ segundos.
3. La constante de error estático de velocidad $K_v \geqslant 50$ seg^{-1}.
4. $0 < K_h < 1$.

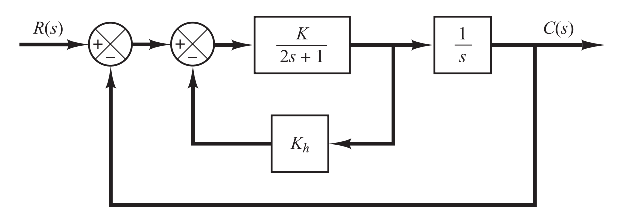


Figura 6-114. Sistema de control.

B-6-25. Considere el sistema de la Figura 6-115. El sistema dispone de realimentación de velocidad. Determine el valor de la ganancia K para que los polos dominantes en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento de 0.5. Utilice el valor de la ganancia K calculado para obtener la respuesta a un escalón unitario del sistema.

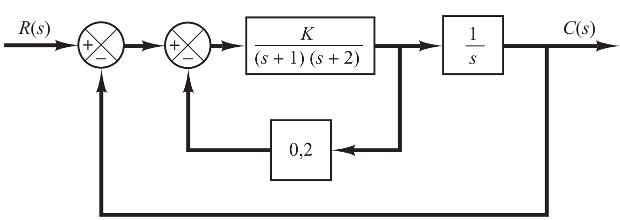


Figura 6-115. Sistema de control.

B-6-26. Considere el sistema de la Figura 6-116. Dibuje el lugar de las raíces cuando a varía de 0 a 8. Determine el valor de a para que el factor de amortiguamiento de los polos dominantes en lazo cerrado sea 0.5.

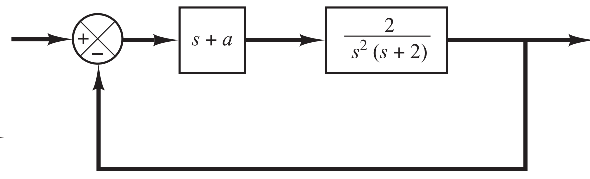


Figura 6-116. Sistema de control.

B-6-27. Considere el sistema de la Figura 6-117. Dibuje el lugar de las raíces cuando el valor de k varía de 0 a ∞. ¿Qué valor debe tener k para que el factor de amortiguamiento de los polos dominantes en polo cerrado sea igual a 0.5? Calcule la constante de error estático de velocidad del sistema con este valor de k.

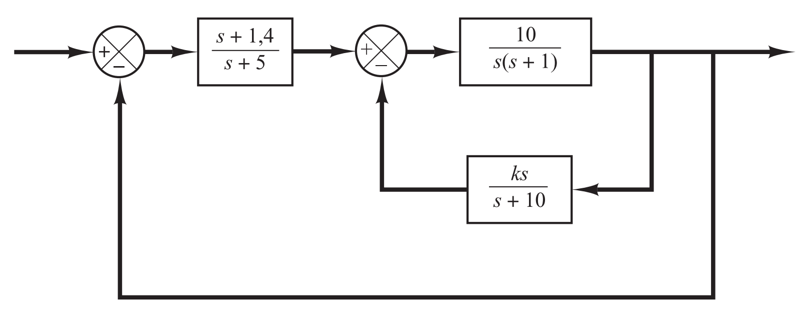


Figura 6-117. Sistema de control.

B-6-28. Considere el sistema de la Figura 6-118. Suponiendo que el valor de la ganancia K varía de 0 a ∞, dibuje el lugar de las raíces cuando $K_h = 0.1, 0.3$ y 0.5.

Compare las respuestas a una entrada escalón unitario para el sistema en los tres siguientes casos:

(1) $K = 10, \quad K_h = 0.1$

(2) $K = 10, \quad K_h = 0.3$

(3) $K = 10, \quad K_h = 0.5$

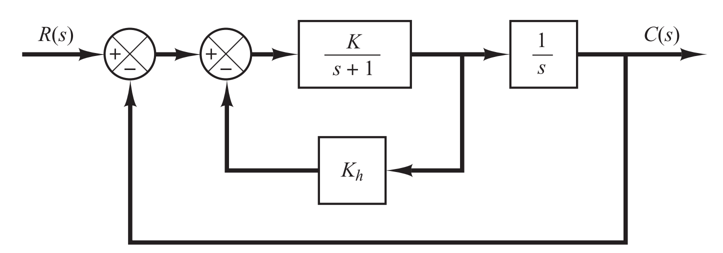


Figura 6-118. Sistema de control.



Análisis y diseño de sistemas de control por el método de la respuesta en frecuencia

7-1 Introducción

Con el término respuesta en frecuencia, se quiere hacer referencia a la respuesta de un sistema en estado estacionario a una entrada sinusoidal. En los métodos de respuesta en frecuencia, la frecuencia de la señal de entrada se varía en un cierto rango, para estudiar la respuesta resultante.

En este y en el próximo capítulo se presentan los métodos de respuesta en frecuencia para el análisis y diseño de sistemas de control. La información que se extrae de dichos análisis es diferente a la obtenida en el análisis del lugar de las raíces. De hecho, los métodos de la respuesta en frecuencia y del lugar de las raíces se complementan. Una ventaja del método de la respuesta en frecuencia es que se pueden utilizar los datos que se obtienen de las medidas sobre el sistema físico sin deducir su modelo matemático. Los ingenieros de control deben familiarizarse con ambos métodos.

Los métodos de respuesta en frecuencia fueron desarrollados en los años 1930 y 1940 por Nyquist, Bode y Nichols, entre otros. Los métodos de respuesta en frecuencia son los más potentes en la teoría de control convencional. También son indispensables para la teoría de control robusto.

El criterio de estabilidad de Nyquist permite averiguar la estabilidad relativa y absoluta de los sistemas lineales en lazo cerrado a partir del conocimiento de sus características de frecuencia en lazo abierto. Una ventaja del método de la respuesta en frecuencia es que las pruebas de la respuesta en frecuencia son, en general, sencillas y pueden ser muy precisas con el uso de generadores de señales sinusoidales y un equipo de medición preciso. A menudo las funciones de transferencia de los componentes complicados se determinan experimentalmente mediante pruebas de la respuesta en frecuencia. Además, este método tiene la ventaja de que permite diseñar un sistema en el que se eliminen los efectos no deseados del ruido así como extender este análisis y diseño a ciertos sistemas de control no lineales.

Aunque la respuesta en frecuencia de un sistema de control presenta una imagen cualitativa de la respuesta transitoria, la correlación entre las respuestas en frecuencia y transitoria es indirecta, excepto en el caso de los sistemas de segundo orden. Al diseñar un sistema en lazo cerrado, las características de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia en lazo abierto se ajustan mediante varios criterios de diseño, con el fin de obtener características adecuadas de respuesta transitoria para el sistema.

Salida en estado estacionario para una entrada sinusoidal. A continuación se muestra cómo la salida en estado estacionario de una función de transferencia de un sistema se puede obtener directamente de la función de transferencia sinusoidal, es decir, sustituyendo en la función de transferencia s por $j\omega$, donde ω es la frecuencia.

Considérese el sistema lineal e invariante en el tiempo de la Figura 7-1. La entrada y la salida de este sistema, cuya función de transferencia es $G(s)$, se denotan por $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. Si la entrada $x(t)$ es una señal sinusoidal, la salida en estado estacionario será también una señal sinusoidal de la misma frecuencia, pero posiblemente con diferente magnitud y ángulo de fase.

Supóngase que la señal de entrada viene dada por

$$x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$$

[En este texto «ω» se mide siempre en rad/seg. Cuando la frecuencia se mide en ciclos/seg, usamos la notación «f». Esto es $\omega = 2\pi f$.]

La función de transferencia $G(s)$ se puede escribir como cociente de dos polinomios en s; es decir,

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)}$$

La transformada de Laplace de la salida $Y(s)$ es

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{p(s)}{q(s)} X(s) \tag{7-1}$$

donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada $x(t)$.

Se demostrará que, después de alcanzar las condiciones de estado estacionario, la respuesta en frecuencia se puede calcular sustituyendo s por $j\omega$ en la función de transferencia. También se mostrará que la respuesta en estado estacionario puede darse como

$$G(j\omega) = Me^{j\phi} = M\underline{/\phi}$$

donde M es el cociente de amplitud de las señales sinusoidales de entrada y salida y ϕ es el desplazamiento de fase entre ambas señales. En la prueba de respuesta en frecuencia, la frecuencia de entrada ω se varía a lo largo de todo el rango de frecuencias de interés.

La respuesta en estado estacionario de un sistema estable, lineal e invariante en el tiempo a una entrada sinusoidal no depende de las condiciones iniciales (por tanto, se puede suponer que las condiciones iniciales son cero). Si $Y(s)$ tiene únicamente polos distintos (simples), el desarrollo de la Ecuación (7-1) en fracciones parciales queda

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) = G(s)\frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \cdots + \frac{b_n}{s + s_n} \end{aligned} \tag{7-2}$$

$x(t)$ / $X(s)$ → $G(s)$ → $y(t)$ / $Y(s)$

Figura 7-1. Sistema estable, lineal e invariante en el tiempo.

donde a y los b_i (donde $i = 1, 2, ..., n$) son constantes y $\bar{a}$ es el complejo conjugado de a. La transformada inversa de Laplace de la Ecuación (7-2) da

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-s_1t} + b_2e^{-s_2t} + \cdots + b_ne^{-s_nt} \qquad (t \geqslant 0) \tag{7-3}$$

Para un sistema estable, $-s_1, -s_2, ..., -s_n$, tienen parte real negativa. Por lo tanto, cuando t se aproxima a infinito, los términos e^{-s_1t}, e^{-s_2t}, ..., y e^{-s_nt} se aproximan a cero. Así, todos los términos del lado derecho de la Ecuación (7-3), excepto los dos primeros, se desprecian en estado estacionario.

Si $Y(s)$ contiene polos múltiples s_j de multiplicidad m_j, entonces, $y(t)$ contendrá términos como $t^{h_j}e^{-s_jt}(h_j = 0, 1, 2, ..., m_j - 1)$. Para un sistema estable, los términos $t^{h_j}e^{-s_jt}$ tienden a cero cuando t se aproxima a infinito.

Por tanto, independientemente de si el sistema tiene polos distintos o no, la respuesta en estado estacionario es

$$y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} \tag{7-4}$$

donde la constante a se puede calcular con la Ecuación (7-2) de la siguiente forma:

$$a = G(s)\frac{\omega X}{s^2 + \omega^2}(s + j\omega)\bigg|_{s=-j\omega} = -\frac{XG(-j\omega)}{2j}$$

Obsérvese que

$$\bar{a} = G(s)\frac{\omega X}{s^2 + \omega^2}(s - j\omega)\bigg|_{s=j\omega} = \frac{XG(j\omega)}{2j}$$

Como $G(j\omega)$ es una cantidad compleja, se puede reescribir de la siguiente forma:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$$

donde $|G(j\omega)|$ representa la magnitud y ϕ el ángulo de $G(j\omega)$, es decir,

$$\phi = \underline{/G(j\omega)} = \tan^{-1}\left[\frac{\text{parte imaginaria de } G(j\omega)}{\text{parte real de } G(j\omega)}\right]$$

El ángulo ϕ puede ser negativo, positivo o cero. Análogamente, se obtiene la siguiente expresión para $G(-j\omega)$:

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{-j\phi} = |G(j\omega)|e^{-j\phi}$$

Por tanto, verificando que

$$a = \frac{X|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j}, \qquad \bar{a} = \frac{X|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j}$$

la Ecuación (7-4) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= X|G(j\omega)|\frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ &= X|G(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \\ &= Y \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \end{aligned} \tag{7-5}$$

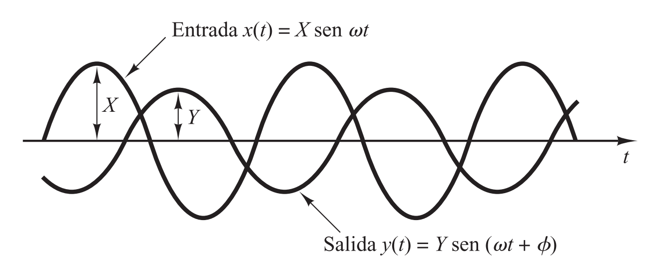


Figura 7-2. Señales sinusoidales de entrada y salida.

donde $Y = X|G(j\omega)|$. Un sistema estable, lineal e invariante en el tiempo, sujeto a una entrada sinusoidal, tendrá, en estado estacionario, una salida sinusoidal de la misma frecuencia que la entrada. Pero, en general, la amplitud y la fase de la salida serán diferentes de las de la entrada. De hecho, la amplitud de la salida se obtiene del producto de la amplitud de la entrada $|G(j\omega)|$, en tanto que el ángulo de fase difiere del de la entrada en una cantidad $\phi = \angle G(j\omega)$. Un ejemplo de las señales sinusoidales de entrada y salida se muestra en la Figura 7-2.

Basándose en esto, se obtiene un resultado importante: Para entradas sinusoidales,

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right| = \text{Cociente de amplitud entre las señales sinusoidales de salida y de entrada}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \text{Desplazamiento de fase de la señal sinusoidal de salida con respecto a la de entrada}$$

Por tanto, la característica de respuesta en estado estacionario de un sistema para una entrada sinusoidal se obtiene directamente de

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega)$$

La función $G(j\omega)$ se denomina función de transferencia sinusoidal. Es decir, el cociente entre $Y(j\omega)$ y $X(j\omega)$ es una cantidad compleja y se puede representar mediante la magnitud y el ángulo de fase con la frecuencia como parámetro. La función de transferencia sinusoidal de cualquier sistema lineal se obtiene sustituyendo s por $j\omega$ en la función de transferencia del sistema.

Como ya se mencionó en el Capítulo 6 un ángulo de fase positivo se denomina adelanto de fase y un ángulo de fase negativo se llama retardo de fase. Una red que tiene una característica de adelanto de fase se denomina red de adelanto, mientras que una red que tiene una característica de retardo de fase se denomina red de retardo.

EJEMPLO 7-1 Considere el sistema de la Figura 7-3. La función de transferencia $G(s)$ es

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

Para la entrada sinusoidal $x(t) = X \sin \omega t$, la salida en estado estacionario $y_{ss}(t)$ se puede obtener de la siguiente forma. Sustituya $j\omega$ por s en $G(s)$:

$$G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1}$$

x → $\frac{K}{Ts+1}$ → y

$G(s)$

Figura 7-3. Sistema de primer orden.

El cociente de amplitudes entre la salida y la entrada es

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

mientras que el ángulo de fase ϕ es

$$\phi = \underline{/G(j\omega)} = -\tan^{-1} T\omega$$

Por tanto, para la entrada $x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$, la salida en estado estacionario $y_{ss}(t)$ se puede obtener de la Ecuación (7-5) como sigue:

$$y_{ss}(t) = \frac{XK}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \tan^{-1} T\omega) \tag{7-6}$$

De la Ecuación (7-6), se puede observar que para una ω pequeña, la amplitud de la salida $y_{ss}(t)$ en estado estacionario es casi igual a K veces la amplitud de la entrada. El desplazamiento de fase de la salida es pequeño para ω pequeña. Para valores grandes de ω, la amplitud de la salida es pequeña y casi inversamente proporcional a ω. El desplazamiento de fase tiende a 90° cuando ω tiende a infinito. Esto es una red de retardo de fase.

EJEMPLO 7-2 Considere la red siguiente:

$$G(s) = \frac{s + \dfrac{1}{T_1}}{s + \dfrac{1}{T_2}}$$

Determine si se trata de una red de adelanto o de una red de retraso.

Para la entrada sinusoidal $x(t) = X \sin \omega t$, la salida en estado estacionario $y_{ss}(t)$ se puede obtener de la siguiente forma. Como

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + \dfrac{1}{T_1}}{j\omega + \dfrac{1}{T_2}} = \frac{T_2(1 + T_1 j\omega)}{T_1(1 + T_2 j\omega)}$$

se tiene

$$|G(j\omega)| = \frac{T_2\sqrt{1 + T_1^2\omega^2}}{T_1\sqrt{1 + T_2^2\omega^2}}$$

y

$$\phi = \underline{/G(j\omega)} = \tan^{-1} T_1\omega - \tan^{-1} T_2\omega$$

Por tanto, la salida en estado estacionario es

$$y_{ss}(t) = \frac{XT_2\sqrt{1 + T_1^2\omega^2}}{T_1\sqrt{1 + T_2^2\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \tan^{-1} T_1\omega - \tan^{-1} T_2\omega)$$

De esta expresión, se observa que si $T_1 > T_2$, entonces $\tan^{-1} T_1\omega - \tan^{-1} T_2\omega > 0$. Por tanto, si $T_1 > T_2$, la red es una red de adelanto. Si $T_1 < T_2$, la red es de retardo.

Presentación de las características de la respuesta en frecuencia de forma gráfica. La función de transferencia sinusoidal, función compleja de la frecuencia ω, se caracteriza por su magnitud y ángulo de fase, con la frecuencia como parámetro. Por lo general se usan tres representaciones gráficas de las funciones de transferencia sinusoidales:

1. El diagrama de Bode o diagrama logarítmico.
2. El diagrama de Nyquist o diagrama polar.
3. El diagrama de magnitud logarítmico contra la fase (diagrama de Nichols).

En este capítulo se analizan estas representaciones con detalle, y se muestra la utilización de MATLAB para obtener los diagramas de Bode y los de Nyquist.

Contenido del capítulo. La Sección 7-1 presentó el material introductorio para la respuesta en frecuencia. La Sección 7-2 presenta los diagramas de Bode de diferentes sistemas de funciones de transferencia. La Sección 7-3 trata los diagramas polares de funciones de transferencia. La Sección 7-4 presenta los diagramas de magnitud logarítmica frente a la fase. La Sección 7-5 realiza una explicación detallada del criterio de estabilidad de Nyquist. La Sección 7-6 estudia el análisis de estabilidad de sistemas en lazo cerrado mediante el mismo criterio de estabilidad. La Sección 7-7 de estabilidad relativa introduce medidas. La Sección 7-8 presenta un método para obtener la respuesta en frecuencia en lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia en lazo abierto, mediante el uso de los círculos M y N. También se describe el uso del diagrama de Nichols. La Sección 7-9 aborda la determinación experimental de funciones de transferencia. La Sección 7-10 presenta aspectos introductorios de diseño de sistemas de control mediante el método de la respuesta en frecuencia. Las Secciones 7-11, 7-12 y 7-13 dan, respectivamente, una presentación detallada de la compensación por adelanto, compensación por retardo y compensación por retardo-adelanto.

7-2 Diagramas de Bode

Diagramas de Bode o diagramas logarítmicos. Un diagrama de Bode está formado por dos gráficas: una es la gráfica del logaritmo de la magnitud de la función de transferencia sinusoidal, y la otra es la gráfica del ángulo de fase; ambas se dibujan contra la frecuencia en escala logarítmica.

La representación común de la magnitud logarítmica de $G(j\omega)$ es $20 \log |G(j\omega)|$, donde la base del logaritmo es 10. La unidad utilizada en esta representación para la magnitud es el decibelio, por lo general abreviado dB. En la representación logarítmica, se dibujan las curvas sobre papel semilogarítmico, con la escala logarítmica para la frecuencia y la escala lineal para cualquier magnitud (en decibelios) o el ángulo de fase (en grados). (El rango de frecuencia de interés determina el número de ciclos logarítmicos que se requieren en la abscisa.)

La ventaja principal de utilizar el diagrama de Bode es que la multiplicación de magnitudes se convierte en suma. Además, cuenta con un método simple para dibujar una curva aproximada de magnitud logarítmica. Se basa en aproximaciones asintóticas. Esta aproximación, mediante asíntotas (líneas rectas), es suficiente si sólo se necesita información general sobre la característica de la respuesta en frecuencia. Si se desea obtener curvas exactas, es fácil corregir las curvas asintóticas. Es muy útil ampliar el rango de bajas frecuencias mediante el uso de una escala logarítmica, debido a que las características de las bajas frecuencias son las más importantes en los sistemas prácticos. Aunque no es posible dibujar las curvas hasta una frecuencia cero, debido a la frecuencia logarítmica ($\log 0 = -\infty$), esto no es un problema serio.

Obsérvese que la determinación experimental de una función de transferencia se hace simplemente si los datos de la respuesta en frecuencia se presentan como un diagrama de Bode.

Factores básicos de $G(j\omega)H(j\omega)$. Como se planteó anteriormente, la ventaja principal de utilizar un diagrama logarítmico es la facilidad relativa de dibujar las curvas de la respuesta en frecuencia. Los factores básicos que suele presentar una función de transferencia arbitraria $G(j\omega)H(j\omega)$ son:

1. La ganancia K
2. Los factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\mp 1}$
3. Los factores de primer orden $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$
4. Los factores cuadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\mp 1}$

Cuando los diagramas logarítmicos de estos factores básicos resulten familiares, es posible utilizarlos con el fin de construir un diagrama logarítmico para cualquier forma de $G(j\omega)H(j\omega)$ dibujando las curvas para cada factor y agregando curvas individuales de forma gráfica, ya que agregar los logaritmos de las ganancias corresponde a multiplicarlos entre sí.

La ganancia K. Un número mayor que la unidad tiene un valor positivo en decibelios, mientras que un número menor que la unidad tiene un valor negativo. La curva de magnitud logarítmica para una ganancia constante K es una recta horizontal cuya magnitud es de 20 log K decibelios. El ángulo de fase de la ganancia K es cero. El efecto de variar la ganancia K en la función de transferencia es que sube o baja la curva de magnitud logarítmica de la función de transferencia en la cantidad constante correspondiente, pero no afecta a la curva de fase.

La Figura 7-4 contiene una línea de conversión de números a decibelios. El valor en decibelios de cualquier número se obtiene a partir de esta línea. A medida que un número aumenta en un factor de 10, el valor correspondiente en decibelios aumenta en un factor de 20. Esto se observa a partir de lo siguiente:

$$20 \log (K \times 10) = 20 \log K + 20$$

Análogamente,

$$20 \log (K \times 10^n) = 20 \log K + 20n$$

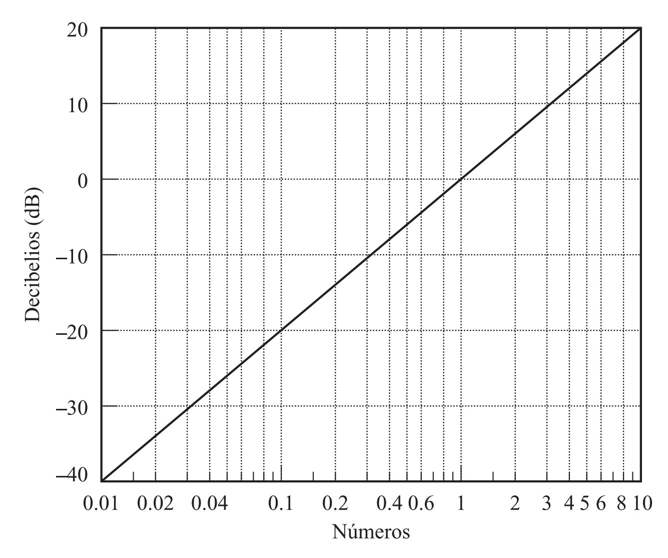


Figura 7-4. Línea de conversión de números a decibelios.

Obsérvese que, cuando se expresa en decibelios, el recíproco de un número difiere de su valor sólo en el signo; es decir, para el número K,

$$20 \log K = -20 \log \frac{1}{K}$$

Factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\mp 1}$. La magnitud logarítmica de $1/j\omega$ en decibelios es

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB}$$

El ángulo de fase de $1/j\omega$ es constante e igual a -90°.

En los diagramas de Bode, las razones de frecuencia se expresan en términos de octavas o décadas. Una octava es una banda de frecuencia de ω_1 a $2\omega_1$, donde ω_1 es cualquier frecuencia. Una década es una banda de frecuencia de ω_1 a $10\omega_1$, donde, otra vez, ω_1 es cualquier frecuencia. (En la escala logarítmica del papel semilogarítmico, cualquier razón de frecuencia determinada se representa mediante la misma distancia horizontal. Por ejemplo, la distancia horizontal de $\omega = 1$ a $\omega = 10$ es igual a la de $\omega = 3$ a $\omega = 30$.)

Si se dibuja la magnitud logarítmica de $-20 \log \omega$ dB con respecto a ω en una escala logarítmica, se obtiene una recta. Para trazar esta recta, se necesita localizar un punto (0 dB, $\omega = 1$) en ella. Como

$$(-20 \log 10\omega) \text{ dB} = (-20 \log \omega - 20) \text{ dB}$$

la pendiente de la recta es -20 dB/década (o -6 dB/octava).

De la misma manera, la magnitud logarítmica de $j\omega$ en decibelios es

$$20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ dB}$$

El ángulo de fase de $j\omega$ es constante e igual a 90°. La curva de magnitud logarítmica es una recta con una pendiente de 20 dB/década. Las Figuras 7-5(a) y (b) muestran curvas de respuesta en frecuencia para $1/j\omega$ y $j\omega$, respectivamente. Es fácil observar que las diferencias en las respuestas en frecuencia de los factores $1/j\omega$ y $j\omega$ se encuentran en los signos de las pendientes de las curvas de magnitud logarítmica y en los signos de los ángulos de fase. Ambas magnitudes logarítmicas llegan a ser iguales a 0 dB en $\omega = 1$.

Si la función de transferencia contiene el factor $(1/j\omega)^n$ o $(j\omega)^n$, la magnitud logarítmica se convierte, respectivamente, en

$$20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| = -n \times 20 \log |j\omega| = -20n \log \omega \text{ dB}$$

o bien

$$20 \log |(j\omega)^n| = n \times 20 \log |j\omega| = 20n \log \omega \text{ dB}$$

Por tanto, las pendientes de las curvas de magnitud logarítmica para los factores $(1/j\omega)^n$ y $(j\omega)^n$ son $-20n$ dB/década y $20n$ dB/década, respectivamente. El ángulo de fase de $(1/j\omega)^n$ es igual a $-90^{\circ} \times n$ durante todo el rango de frecuencia, mientras que el de $(j\omega)^n$ es igual a $90^{\circ} \times n$ en todo el rango de frecuencia. Las curvas de magnitud pasarán por el punto (0 dB, $\omega = 1$).

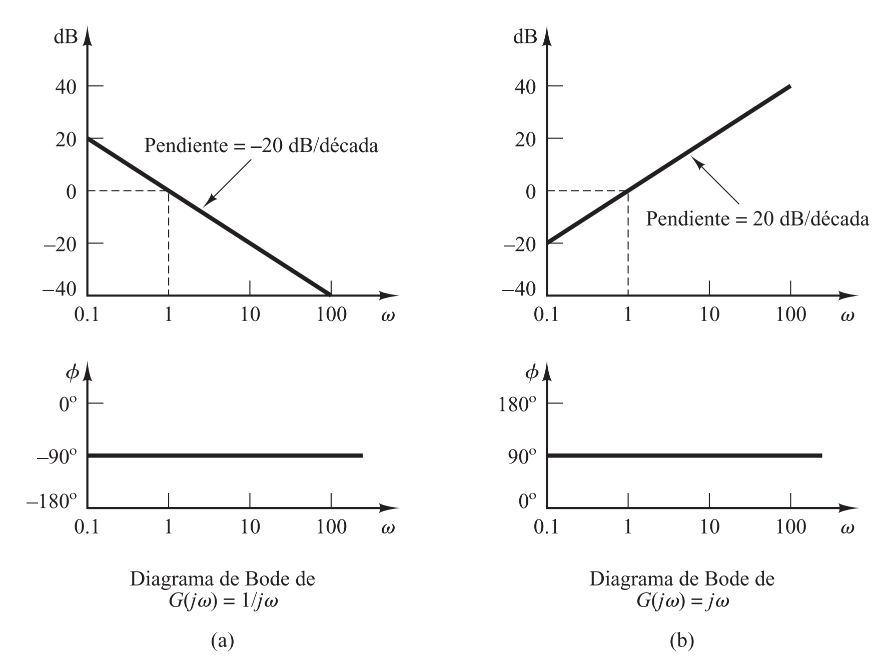


Figura 7-5. (a) Diagrama de Bode de $G(j\omega) = 1/j\omega$; (b) diagrama de Bode de $G(j\omega) = j\omega$.

Factores de primer orden $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$. La magnitud logarítmica del factor de primer orden $1/(1 + j\omega T)$ es

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \text{ dB}$$

Para bajas frecuencias, tales que $\omega \ll 1/T$, la magnitud logarítmica se aproxima mediante

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \doteqdot -20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Por tanto, la curva de magnitud logarítmica para bajas frecuencias es la línea 0 dB constante. Para altas frecuencias, tales que $\omega \gg 1/T$,

$$-20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \doteqdot -20 \log \omega T \text{ dB}$$

Esta es una expresión aproximada para el rango de altas frecuencias. En $\omega = 1/T$, la magnitud logarítmica es igual a 0 dB; en $\omega = 10/T$, la magnitud logarítmica es de -20 dB. Por tanto, el valor de $-20 \log \omega T$ dB disminuye en 20 dB para todas las décadas de ω. De esta forma, para $\omega \gg 1/T$, la curva de magnitud logarítmica es una línea recta con una pendiente de -20 dB/década (o -6 dB/octava).

Este análisis muestra que la representación logarítmica de la curva de respuesta en frecuencia del factor $1/(1 + j\omega T)$ se aproxima mediante dos asíntotas (líneas rectas), una de las cuales es una recta de 0 dB para el rango de frecuencia $0 < \omega < 1/T$ y la otra es una recta con una pendiente de -20 dB/década (o -6 dB/octava) para el rango de frecuencia $1/T < \omega < \infty$. La curva de magnitud logarítmica exacta, las asíntotas y la curva de ángulo de fase exacta se muestran en la Figura 7-6.

La frecuencia en la cual las dos asíntotas se encuentran se denomina frecuencia esquina o frecuencia de corte. Para el factor $1/(1 + j\omega T)$, la frecuencia $\omega = 1/T$ es la frecuencia esquina, debido a que en $\omega = 1/T$, ambas asíntotas tienen el mismo valor. (La expresión asintótica de

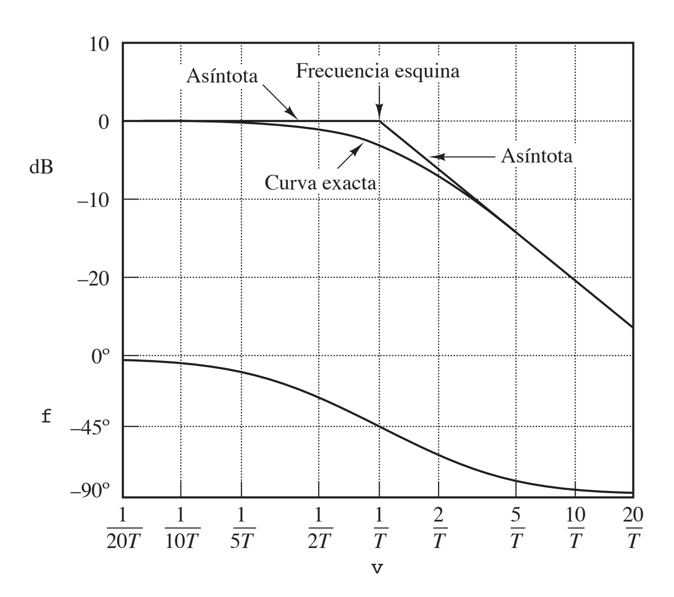


Figura 7-6. Curva de magnitud logarítmica, junto con las asíntotas y la curva de ángulo de fase de $1/(1 + j\omega T)$.

baja frecuencia en $\omega = 1/T$ es 20 log 1 dB = 0 dB, y la expresión asintótica de alta frecuencia en $\omega = 1/T$ también es 20 log 1 dB = 0 dB.) La frecuencia esquina divide la curva de respuesta en frecuencia en dos regiones: una curva para la región de baja frecuencia y una curva para la región de alta frecuencia. La frecuencia esquina es muy importante cuando se dibujan curvas logarítmicas de frecuencia en respuesta.

El ángulo de fase ϕ exacto del factor $1/(1 + j\omega T)$ es

$$\phi = -\tan^{-1} \omega T$$

En una frecuencia cero, el ángulo de fase es 0°. En la frecuencia esquina, el ángulo de fase es

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{T}{T} = -\tan^{-1} 1 = -45°$$

En el infinito, el ángulo de fase se convierte en $-90°$. Debido a que el ángulo de fase se obtiene mediante una función de tangente inversa, el ángulo de fase tiene una pendiente simétrica con respecto al punto de inflexión en $\phi = -45°$.

Se puede calcular el error en la curva de magnitud provocado por el uso de las asíntotas. El error máximo ocurre en la frecuencia esquina y es aproximadamente igual a -3 dB debido a que

$$-20 \log \sqrt{1 + 1} + 20 \log 1 = -10 \log 2 = -3.03 \text{ dB}$$

El error en la frecuencia una octava por debajo de la frecuencia esquina, es decir, en $\omega = 1/(2T)$, es

$$-20 \log \sqrt{\frac{1}{4} + 1} + 20 \log 1 = -20 \log \frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97 \text{ dB}$$

El error en la frecuencia una octava por encima de la frecuencia esquina, es decir, en $\omega = 2/T$, es

$$-20 \log \sqrt{2^2 + 1} + 20 \log 2 = -20 \log \frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97 \text{ dB}$$

Por tanto, el error en una octava por debajo o por encima de la frecuencia esquina es aproximadamente igual a -1 dB. Asimismo, el error en una década por debajo o por encima de la frecuencia esquina es aproximadamente -0.04 dB. El error en decibelios implícito al usar la expresión asintótica para la curva de respuesta en frecuencia de $1/(1 + j\omega T)$ se muestra en la Figura 7-7. El error es simétrico con respecto a la frecuencia esquina.

Debido a que las asíntotas se dibujan con facilidad y están suficientemente cerca de la curva exacta, su uso es adecuado para dibujar los diagramas de Bode con el fin de establecer con rapidez y con un mínimo de cálculos la naturaleza general de las características de la respuesta en frecuencia, y significa una ayuda en gran parte del trabajo de diseño preliminar. Si se desea obtener curvas de respuesta en frecuencia precisas, es fácil hacer correcciones como se muestra en la curva obtenida de la Figura 7-7. En la práctica, para dibujar una curva de respuesta en frecuencia precisa se introduce una corrección de 3 dB en la frecuencia esquina y una corrección de 1 dB en los puntos una octava por debajo y por encima de la frecuencia esquina, y después se conectan estos puntos mediante una curva regular.

Obsérvese que variar la constante de tiempo T mueve la frecuencia esquina a la izquierda o a la derecha, aunque las formas de las curvas de magnitud logarítmica y de ángulo de fase no cambian.

La función de transferencia $1/(1 + j\omega T)$ tiene la característica de un filtro paso-baja. Para frecuencias por encima de $\omega = 1/T$, la magnitud logarítmica disminuye rápidamente hacia $-\infty$. Esto se debe, en esencia, a la presencia de la constante de tiempo. En el filtro paso-baja, la salida sigue fielmente una entrada sinusoidal a bajas frecuencias. Pero, conforme aumenta la frecuencia de entrada, la salida no puede seguir a la entrada debido a que se necesita cierta cantidad de tiempo para que el sistema aumente en magnitud. Por tanto, para altas frecuencias, la amplitud de la salida tiende a cero y el ángulo de fase de la salida tiende a -90°. En este caso, si la función de entrada contiene muchos armónicos, las componentes de baja frecuencia se reproducen fielmente en la salida, mientras que las componentes de alta frecuencia se atenúan en amplitud y cambian en fase. Por tanto, un elemento de primer orden produce una duplicación exacta, o casi exacta, sólo para fenómenos constantes o que varían lentamente.

Una ventaja de los diagramas de Bode es que, para factores recíprocos, por ejemplo el factor $1 + j\omega T$, las curvas de magnitud logarítmica y de ángulo de fase sólo necesitan cambiar de signo, puesto que

$$20 \log |1 + j\omega T| = -20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

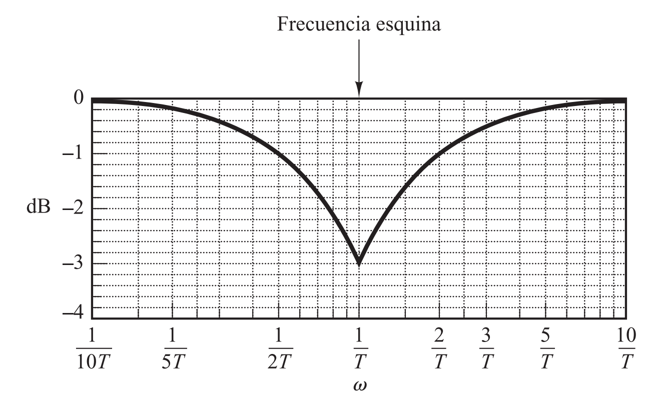


Figura 7-7. Error de magnitud logarítmica en la expresión asintótica de la curva de respuesta en frecuencia $1/(1 + j\omega T)$.

y

$$\underline{/1 + j\omega T} = \tan^{-1}\omega T = -\underline{\left/ \frac{1}{1 + j\omega T} \right.}$$

La frecuencia esquina es igual para ambos casos. La pendiente de la asíntota de alta frecuencia de $1 + j\omega T$ es 20 dB/década, y el ángulo de fase varía de 0º a 90º a medida que la frecuencia ω se incrementa de cero a infinito. La curva de magnitud logarítmica, junto con las asíntotas y la curva del ángulo de fase para el factor $1 + j\omega T$, se muestra en la Figura 7-8.

Para dibujar la curva de fase con precisión será necesario localizar varios puntos sobre la curva. Los ángulos de fase de $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$ son

$$\mp 45^{\circ} \quad \text{en} \quad \omega = \frac{1}{T}$$

$$\mp 26.6^{\circ} \quad \text{en} \quad \omega = \frac{1}{2T}$$

$$\mp 5.7^{\circ} \quad \text{en} \quad \omega = \frac{1}{10T}$$

$$\mp 63.4^{\circ} \quad \text{en} \quad \omega = \frac{2}{T}$$

$$\mp 84.3^{\circ} \quad \text{en} \quad \omega = \frac{10}{T}$$

Para el caso en el que una función de transferencia determinada contiene términos como $(1 + j\omega T)^{\mp n}$, se hace una construcción asintótica similar. La frecuencia esquina está todavía en $\omega = 1/T$ y las asíntotas son rectas. La asíntota de baja frecuencia es una recta horizontal en 0 dB,

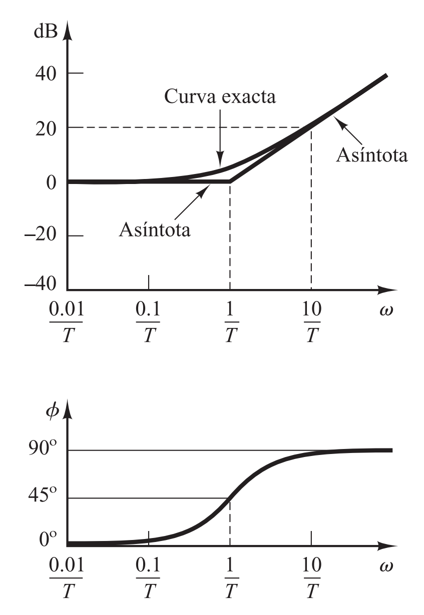


Figura 7-8. Curva de magnitud logarítmica, asíntotas y curva de ángulo de fase para $1 + j\omega T$.

mientras que la asíntota de alta frecuencia tiene una pendiente de $-20n$ dB/década o $20n$ dB/década. El error implícito en las ecuaciones asintóticas es n veces el que existe para $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$. El ángulo de fase es n veces el de $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$ en cada punto de frecuencia.

Factores cuadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\mp 1}$. Los sistemas de control suelen tener factores cuadráticos de la forma

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{7-7}$$

Si $\zeta > 1$, este factor cuadrático se expresa como un producto de dos factores de primer orden con polos reales. Si $0 < \zeta < 1$, este factor cuadrático es el producto de dos factores complejos conjugados. Las aproximaciones asintóticas para las curvas de respuesta en frecuencia no son precisas para un factor con valores bajos de ζ. Esto se debe a que la magnitud y la fase del factor cuadrático dependen de la frecuencia esquina y del factor de amortiguamiento relativo ζ.

La curva asintótica de respuesta en frecuencia se obtiene del modo siguiente. Como

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\,\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

para bajas frecuencias tales que $\omega \ll \omega_n$, la magnitud logarítmica resulta

$$-20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Por tanto, la asíntota de baja frecuencia es una recta horizontal en 0 dB. Para altas frecuencias tales que $\omega \gg \omega_n$, la magnitud logarítmica es

$$-20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB}$$

La ecuación para la asíntota de alta frecuencia es una recta con pendiente de -40 dB/década, debido a que

$$-40 \log \frac{10\omega}{\omega_n} = -40 - 40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$$

La asíntota de alta frecuencia corta a la de baja frecuencia en $\omega = \omega_n$ debido a que en esta frecuencia

$$-40 \log \frac{\omega_n}{\omega_n} = -40 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Esta frecuencia, ω_n, es la frecuencia esquina para el factor cuadrático considerado.

Las dos asíntotas recién obtenidas son independientes del valor de ζ. Cerca de la frecuencia $\omega = \omega_n$, hay un pico de resonancia, tal como se espera de la Ecuación (7-7). El factor de amortiguamiento relativo ζ determina la magnitud de este pico de resonancia. Es obvio que la aproximación mediante las asíntotas genera errores. La magnitud del error depende del valor de ζ. Para valores pequeños de este, es grande. La Figura 7-9 muestra las curvas exactas de magnitud logarítmica junto con las asíntotas y las curvas exactas de ángulo de fase para el factor cuadrático obtenido mediante la Ecuación (7-7) con varios valores de ζ. Si se desea hacer correcciones

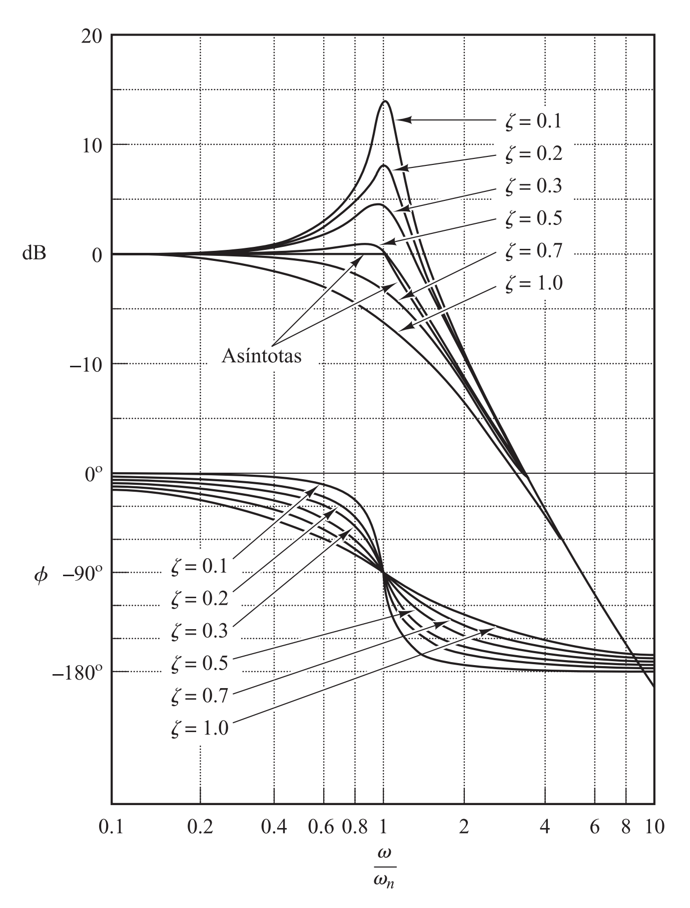


Figura 7-9. Curvas de magnitud logarítmica, asíntotas y curvas de ángulo de fase de la función de transferencia cuadrática obtenida mediante la Ecuación (7-7).

en las curvas asintóticas, las cantidades necesarias de corrección en un número suficiente de puntos de frecuencia se obtienen de la Figura 7-9.

El ángulo de fase del factor cuadrático $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ es

$$\phi = \angle \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\,\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right] \tag{7-8}$$

El ángulo de fase es una función de ω y de ζ. En $\omega = 0$, el ángulo de fase es igual a 0°. En la frecuencia esquina $\omega = \omega_n$, el ángulo de fase es $-90°$ sin considerar ζ, debido a que

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{0}\right) = -\tan^{-1}\infty = -90°$$

En $\omega = \infty$, el ángulo de fase se convierte en $-180°$. La curva del ángulo de fase tiene una pendiente simétrica respecto del punto de inflexión, punto en el que $\phi = -90°$. No existen maneras simples de dibujar tales curvas de fase. Es necesario hacer referencia a las curvas de ángulo de fase de la Figura 7-9.

Las curvas de respuesta en frecuencia para el factor

$$1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

pueden obtenerse si simplemente se invierte el signo de la magnitud logarítmica y el del ángulo de fase del factor

$$\frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Para obtener las curvas de respuesta en frecuencia de una función de transferencia cuadrática determinada, primero se deben determinar los valores de la frecuencia esquina ω_n y del factor de amortiguamiento relativo ζ. A continuación, usando la familia de curvas obtenidas en la Figura 7-9, se dibujan las curvas de respuesta en frecuencia.

Frecuencia de resonancia ω_r, y el valor del pico de resonancia M_r. La magnitud de

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

es

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \tag{7-9}$$

Si $|G(j\omega)|$ tiene un valor pico en alguna frecuencia, esta se denomina *frecuencia de resonancia*. Como el numerador de $|G(j\omega)|$ es constante, se tendrá un valor pico de $|G(j\omega)|$ cuando

$$g(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \tag{7-10}$$

sea mínima. Como la Ecuación (7-10) se puede escribir

$$g(\omega) = \left[\frac{\omega^2 - \omega_n^2(1 - 2\zeta^2)}{\omega_n^2}\right]^2 + 4\zeta^2(1 - \zeta^2) \tag{7-11}$$

el valor mínimo de $g(\omega)$ ocurre en $\omega = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$. Por tanto, la frecuencia de resonancia ω_r es

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}, \qquad \text{para } 0 \leqslant \zeta \leqslant 0.707 \tag{7-12}$$

A medida que el factor de amortiguamiento relativo ζ tiende a cero, la frecuencia de resonancia tiende a ω_n. Para $0 < \zeta \leqslant 0.707$, la frecuencia de resonancia ω_r es menor que la frecuencia natural amortiguada $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$, lo cual se observa en la respuesta transitoria. A partir de la Ecuación (7-12), se aprecia que, para $\zeta > 0.707$, no hay un pico de resonancia. La magnitud $|G(j\omega)|$ disminuye de forma monotónica con el aumento de la frecuencia ω. (La magnitud es menor que 0 dB para todos los valores de $\omega > 0$. Recuérdese que, para $0.7 < \zeta < 1$, la respuesta escalón es oscilatoria, pero las oscilaciones están bien amortiguadas y apenas son perceptibles.)

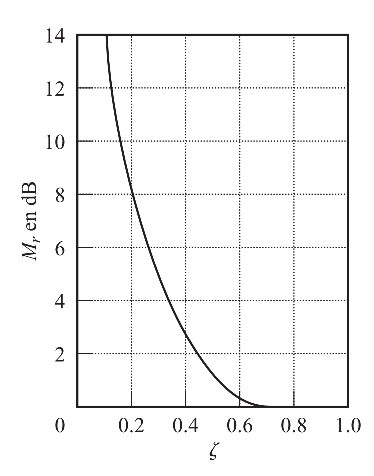


Figura 7-10. Curva M_r con respecto a ζ para el sistema de segundo orden $1/[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]$.

Para $0 \leqslant \zeta \leqslant 0.707$ la magnitud del pico de resonancia, M_r, se encuentra sustituyendo la Ecuación (7-12) en la Ecuación (7-9). Para $0 \leqslant \zeta \leqslant 0.707$,

$$M_r = |G(j\omega)|_{\text{máx}} = |G(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{7-13}$$

Para $\zeta > 0.707$,

$$M_r = 1 \tag{7-14}$$

A medida que ζ tiende a cero, M_r tiende a infinito. Esto significa que, si el sistema no amortiguado se excita en su frecuencia natural, la magnitud de $G(j\omega)$ llega a ser infinito. La relación entre M_r y ζ se muestra en la Figura 7-10.

El ángulo de fase de $G(j\omega)$ en la frecuencia en la que aparece el pico de resonancia se obtiene sustituyendo la Ecuación (7-12) en la Ecuación (7-8). Por tanto, en la frecuencia de resonancia ω_r,

$$\underline{/G(j\omega_r)} = -\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\zeta} = -90^\text{o} + \text{sen}^{-1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Procedimiento general para dibujar diagramas de Bode. MATLAB proporciona una manera sencilla de dibujar los diagramas de Bode (véase la Sección 7-3). Aquí, sin embargo, se considera el caso en que se desea dibujar los diagramas de Bode a mano sin utilizar MATLAB.

Primero se reescribe la función de transferencia sinusoidal $G(jw)H(jw)$ como un producto de los factores básicos analizados anteriormente. Después se identifican las frecuencias esquinas asociadas con estos factores básicos. Por último, se dibujan las curvas asintóticas de magnitud logarítmica con pendientes adecuadas entre las frecuencias esquinas. La curva exacta, que se encuentra cerca de la curva asintótica, se obtiene añadiendo las correcciones adecuadas.

La curva del ángulo de fase de $G(j\omega)H(j\omega)$ se dibuja añadiendo las curvas de ángulo de fase de los factores individuales.

El uso de los diagramas de Bode con aproximaciones asintóticas requiere mucho menos tiempo que otros métodos utilizados para calcular la respuesta en frecuencia de una función de transferencia. La facilidad de dibujar las curvas de respuesta en frecuencia para una función de transferencia determinada y la facilidad para modificar la curva de respuesta conforme se añade una compensación, son las principales razones por las cuales los diagramas de Bode se utilizan tanto en la práctica.

EJEMPLO 7-3 Dibuje los diagramas de Bode para la siguiente función de transferencia:

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + j\omega + 2]}$$

Haga las correcciones necesarias para que la curva de magnitud logarítmica sea precisa.

Para evitar posibles errores al dibujar la curva de magnitud logarítmica, es conveniente escribir $G(jw)$ de la siguiente forma normalizada, en la que las asíntotas de baja frecuencia para los factores de primer orden y el factor de segundo orden son la línea 0 dB.

$$G(j\omega) = \frac{7.5\left(\dfrac{j\omega}{3} + 1\right)}{(j\omega)\left(\dfrac{j\omega}{2} + 1\right)\left[\dfrac{(j\omega)^2}{2} + \dfrac{j\omega}{2} + 1\right]}$$

Esta función se compone de los factores siguientes:

$$7.5, \qquad (j\omega)^{-1}, \qquad 1 + j\frac{\omega}{3}, \qquad \left(1 + j\frac{\omega}{2}\right)^{-1}, \qquad \left[1 + j\frac{\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2}\right]^{-1}$$

Las frecuencias esquina del tercero, cuarto y quinto términos son $\omega = 3$, $\omega = 2$ y $\omega = \sqrt{2}$, respectivamente. Observe que el último término tiene el factor de amortiguamiento relativo de 0.3536.

Para dibujar los diagramas de Bode, la Figura 7-11 muestra las curvas asintóticas separadas para cada uno de los factores. A continuación se obtiene la curva compuesta añadiendo algebraicamente las curvas individuales, como también se observa en la Figura 7-11. Considere que, cuando se añaden las curvas asintóticas individuales a cada frecuencia, la pendiente de la curva compuesta es acumulativa. Debajo de $\omega = \sqrt{2}$, la gráfica tiene una pendiente de -20 dB/década. En la primera frecuencia esquina $\omega = \sqrt{2}$, la pendiente cambia a -60 dB/década y continúa a la siguiente frecuencia esquina $\omega = 2$, donde la pendiente se convierte en -80 dB/década. En la última frecuencia esquina $\omega = 3$, la pendiente cambia a -60 dB/década.

Una vez dibujada una curva aproximada de magnitud logarítmica, la curva real se obtiene añadiendo correcciones a todas las frecuencias esquina y a las frecuencias una octava por debajo y por encima de las frecuencias esquina. Para los factores de primer orden $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$, las correcciones son ± 3 dB en la frecuencia esquina y ± 1 dB en las frecuencias una octava por debajo y por encima de la frecuencia esquina. Las correcciones necesarias para el factor cuadrático se obtienen a partir de la Figura 7-9. La curva exacta de magnitud logarítmica para $G(j\omega)$ aparece con una curva punteada en la Figura 7-11.

Observe que cualquier cambio en la pendiente de la curva de magnitud sólo se hace en las frecuencias esquina de la función de transferencia $G(j\omega)$. Por tanto, en lugar de dibujar y añadir curvas de magnitud individuales, tal como aparece, es posible dibujar la curva de magnitud sin trazar las curvas individuales. Se comienza por dibujar la parte de la recta de frecuencia más baja (es decir, la recta con la pendiente de -20 dB/década para $\omega < \sqrt{2}$). A medida que la frecuencia aumenta, se obtiene el efecto de los polos complejos conjugados (el término cuadrático) en la frecuencia esquina $\omega = \sqrt{2}$. Los polos complejos conjugados provocan que las pendientes de la curva de magnitud cambien de -20 a -60 dB/década. En la siguiente frecuencia esquina, $\omega = 2$, el efecto del polo es cambiar la pendiente a -80 dB/década. Por último, en la frecuencia esquina $\omega = 3$, el efecto del cero es cambiar la pendiente de -80 a -60 dB/década.

Para dibujar la curva de ángulo de fase completa, deben dibujarse las curvas de ángulo de fase de todos los factores. La suma algebraica de todas las curvas de ángulo de fase proporciona la curva completa de ángulo de fase, como se muestra en la Figura 7-11.

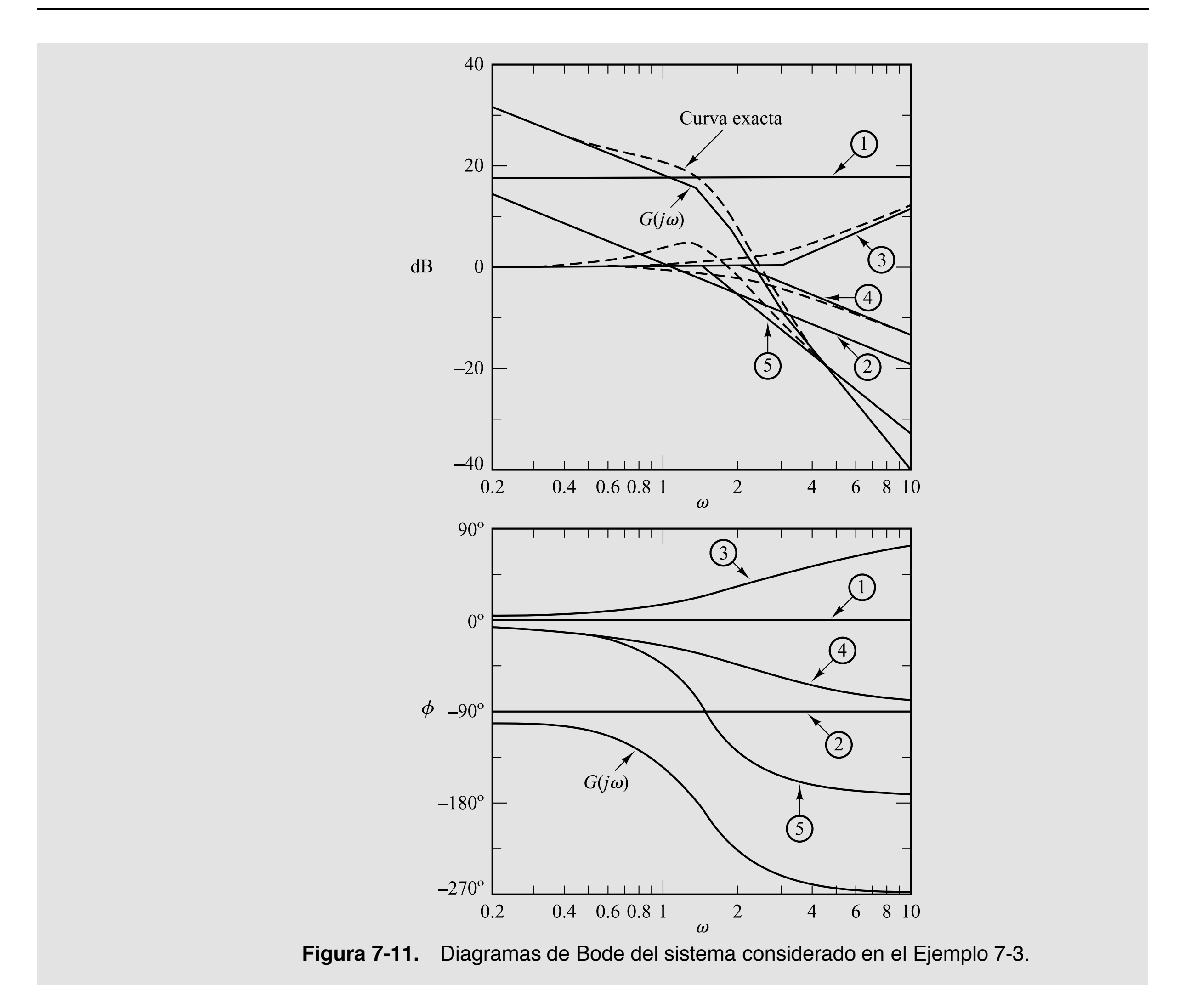


Figura 7-11. Diagramas de Bode del sistema considerado en el Ejemplo 7-3.

Sistemas de fase mínima y de fase no mínima. Las funciones de transferencia que no tienen polos ni ceros en el semiplano derecho del plano s son funciones de transferencia de fase mínima, mientras que las que tienen polos y/o ceros en el semiplano derecho del plano s son funciones de transferencia de fase no mínima. Los sistemas con funciones de transferencia de fase mínima se denominan *sistemas de fase mínima*, mientras que aquellos con funciones de transferencia con fase no mínima se denominan *sistemas de fase no mínima*.

Para los sistemas con la misma característica de magnitud, el rango del ángulo de fase de la función de transferencia de fase mínima es mínimo entre todos los sistemas de ese tipo, mientras que el rango del ángulo de fase de cualquier función de transferencia de fase no mínima es mayor que este mínimo.

Se observa que, para un sistema de fase mínima, la función de transferencia se determina de forma única sólo a partir de la curva de magnitud. Para un sistema de fase no mínima, esto no sucede. Multiplicar cualquier función de transferencia por todos los filtros paso-todo no altera la curva de magnitud, sino que modifica la curva de fase.

Considérense como ejemplo los dos sistemas cuyas funciones de transferencia sinusoidales son

$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1}, \qquad G_2(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T_1}, \qquad 0 < T < T_1$$

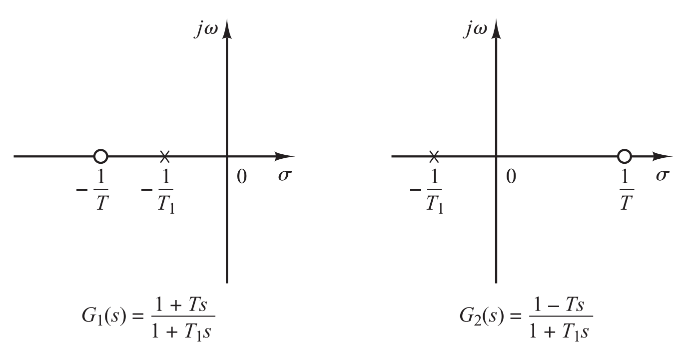


Figura 7-12. Configuraciones de polos y ceros de un sistema de fase mínima $G_1(s)$ y un sistema de fase no mínima $G_2(s)$.

Las configuraciones de polos y ceros de estos sistemas se muestran en la Figura 7-12. Las dos funciones de transferencia sinusoidales tienen la misma característica de magnitud, pero tienen diferente característica de ángulo de fase, como se aprecia en la Figura 7-13. Estos dos sistemas difieren uno del otro en el factor

$$G(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}$$

La magnitud del factor $(1 - j\omega T)/(1 + j\omega T)$ siempre es unitaria. Pero el ángulo de fase es igual a $-2\tan^{-1}\omega T$ y varía de 0° a -180° conforme ω aumenta de cero a infinito.

Como se planteó anteriormente, para un sistema de fase mínima, las características de magnitud y de ángulo de fase se relacionan de forma única. Esto significa que, si se especifica la curva de magnitud de un sistema en el rango de frecuencia completo de cero a infinito, la curva de ángulo de fase se determina de forma única, y viceversa. Sin embargo, esto no es válido para un sistema de fase no mínima.

Las situaciones de fase no mínima surgen de dos formas distintas. Una es simplemente cuando un sistema incluye uno o más elementos de fase no mínima. La otra aparece cuando un lazo interior es inestable.

Para un sistema de fase mínima, el ángulo de fase en $\omega = \infty$ se convierte en $-90^{\circ}(q - p)$, donde p y q son los grados de los polinomios del numerador y el denominador de la función de transferencia, respectivamente. Para un sistema de fase no mínima, el ángulo de fase en $\omega = \infty$ difiere de $-90^{\circ}(q - p)$. En cualquier sistema, la pendiente de la curva de magnitud logarítmica en $\omega = \infty$ es igual a $-20(q - p)$ dB/década. Por tanto, es posible detectar si el sistema es de fase mínima, si se examinan tanto la pendiente de la asíntota de alta frecuencia de la curva de magnitud logarítmica, como el ángulo de fase en $\omega = \infty$. Si la pendiente de la curva de magnitud logarítmica, a medida que ω tiende a infinito, es $-20(q - p)$ dB/década y el ángulo de fase en $\omega = \infty$ es igual a $-90^{\circ}(q - p)$, el sistema es de fase mínima.

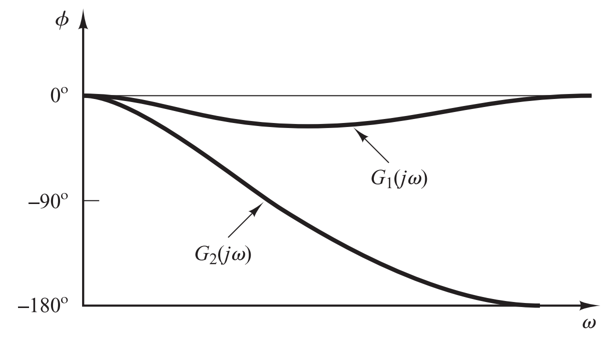


Figura 7-13. Característica de ángulo de fase de los sistemas $G_1(s)$ y $G_2(s)$ de la Figura 7-12.

Los sistemas de fase no mínima son lentos en su respuesta, debido a su comportamiento defectuoso al inicio de la respuesta. En la mayor parte de los sistemas de control, debe tenerse cuidado para evitar un retardo de fase excesivo. Al diseñar un sistema, si una velocidad de respuesta rápida es de vital importancia, no deben usarse componentes de fase no mínima. (Un ejemplo típico de elementos de fase no mínima que pueden estar presentes en un sistema de control es el retardo de transporte o el tiempo muerto.)

Es importante observar que las técnicas de análisis y diseño mediante la respuesta en frecuencia que se presentarán en este capítulo y el siguiente son válidas para los sistemas de fase mínima y los de fase no mínima.

Retardo de transporte. El retardo de transporte tiene un comportamiento de fase no mínima y tiene un retardo de fase excesivo sin atenuación en altas frecuencias. Estos retardos de transporte aparecen normalmente en los sistemas térmicos, hidráulicos y neumáticos.

Considérese el retardo de transporte obtenido mediante

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

La magnitud siempre es igual a la unidad debido a que

$$|G(j\omega)| = |\cos \omega T - j \operatorname{sen} \omega T| = 1$$

Por tanto, la magnitud logarítmica del retardo de transporte $e^{-j\omega T}$ es igual a 0 dB. El ángulo de fase del retardo de transporte es

$$\begin{aligned} \underline{/G(j\omega)} &= -\omega T \qquad \text{(radianes)} \\ &= -57.3\omega T \qquad \text{(grados)} \end{aligned}$$

El ángulo de fase varía de forma lineal con la frecuencia ω. La característica del ángulo de fase del retardo de transporte aparece en la Figura 7-14.

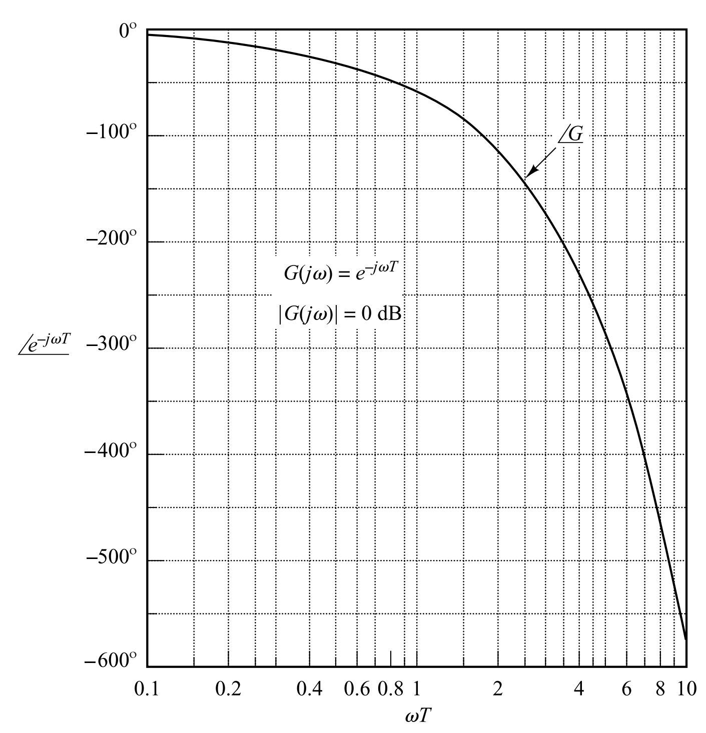


Figura 7-14. Característica del ángulo de fase del retardo de transporte.

EJEMPLO 7-4 Dibuje los diagramas de Bode de la siguiente función de transferencia:

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

La magnitud logarítmica es

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |e^{-j\omega L}| + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

$$= 0 + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

El ángulo de fase de $G(j\omega)$ es

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega L} + \angle \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$= -\omega L - \tan^{-1} \omega T$$

Las curvas de magnitud logarítmica y de ángulo de fase para esta función de transferencia con $L = 0.5$ y $T = 1$ se muestran en la Figura 7-15.

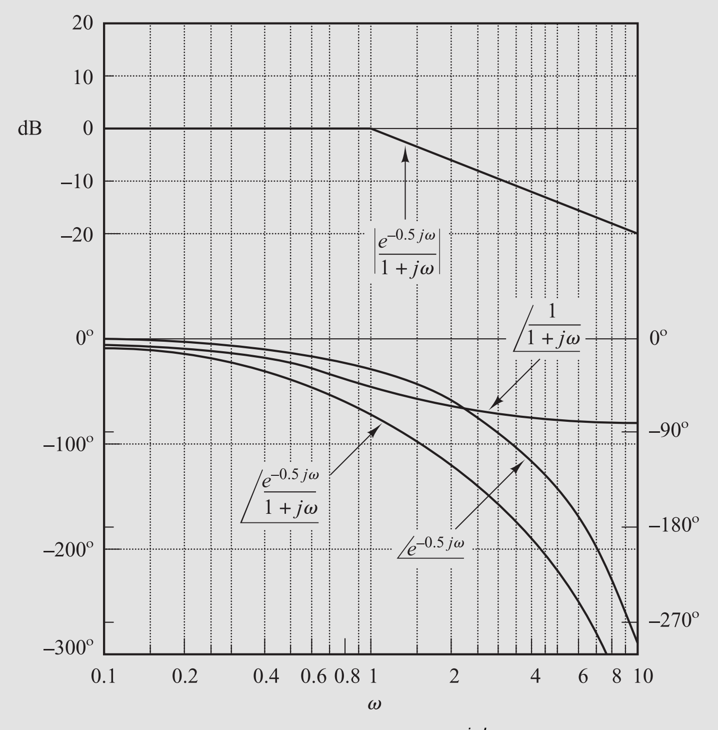


Figura 7-15. Diagramas de Bode para el sistema $e^{-j\omega L}/(1 + j\omega T)$ con $L = 0.5$ y $T = 1$.

Relación entre el tipo de sistema y la curva de magnitud logarítmica. Considérese el sistema de control con realimentación unitaria. Las constantes estáticas de error de posición, velocidad y aceleración describen el comportamiento de baja frecuencia de los sistemas de tipo 0, tipo 1 y tipo 2, respectivamente. Para un sistema definido, sólo es finita y significativa una de las constantes de error estático. (Cuanto mayor es el valor de la constante finita de error estático, más alta es la ganancia de lazo a medida que tiende a cero.)

El tipo de sistema determina la pendiente de la curva de magnitud logarítmica a bajas frecuencias. Por tanto, la información relacionada con la existencia y la magnitud del error en estado estacionario de un sistema ante una entrada definida se determina a partir de la observación de baja frecuencia de la curva de magnitud logarítmica.

Determinación de las constantes de error estático de posición. Considérese el sistema de control con realimentación unitaria de la Figura 7-16. Supóngase que la función de transferencia en lazo abierto se obtiene mediante

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

o bien

$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1) \cdots (T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^N (T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) \cdots (T_p j\omega + 1)}$$

La Figura 7-17 muestra un ejemplo de la gráfica de la magnitud logarítmica de un sistema de tipo 0. En este sistema, la magnitud de $G(j\omega)$ es igual a K_p, a bajas frecuencias, o

$$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = K = K_p$$

De esto se deduce que la asíntota a baja frecuencia es una línea horizontal en $20 \log K_p$ dB.

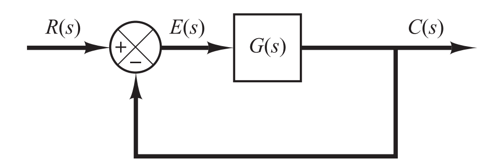


Figura 7-16. Sistema de control con realimentación unitaria.

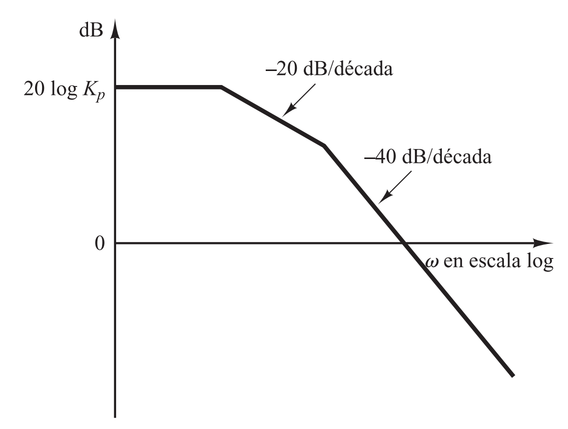


Figura 7-17. Curva de magnitud logarítmica de un sistema de tipo 0.

Determinación de las constantes de error estático de velocidad. Considérese el sistema de control con realimentación unitaria de la Figura 7-16. La Figura 7-18 muestra un ejemplo de la gráfica de la magnitud logarítmica de un sistema de tipo 1. La intersección del segmento inicial -20 dB/década (o su extensión) con la línea $\omega = 1$ tiene la magnitud de $20 \log K_v$. Esto se observa del modo siguiente. En un sistema de tipo 1

$$G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega}, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

Por tanto,

$$20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega} \right|_{\omega=1} = 20 \log K_v$$

La intersección del segmento inicial -20 dB/década (o su extensión) con la línea 0 dB tiene una frecuencia cuyo valor numérico es igual a K_v. Para ver esto, se define la frecuencia en esta intersección como ω_1; así,

$$\left| \frac{K_v}{j\omega_1} \right| = 1$$

o bien

$$K_v = \omega_1$$

Como ejemplo, considérese el sistema de tipo 1 con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{K}{s(Js + F)}$$

Si se define la frecuencia esquina como ω_2 y la frecuencia de la intersección del segmento -40 dB/década (o su extensión) con la línea 0 dB como ω_3, entonces

$$\omega_2 = \frac{F}{J}, \qquad \omega_3^2 = \frac{K}{J}$$

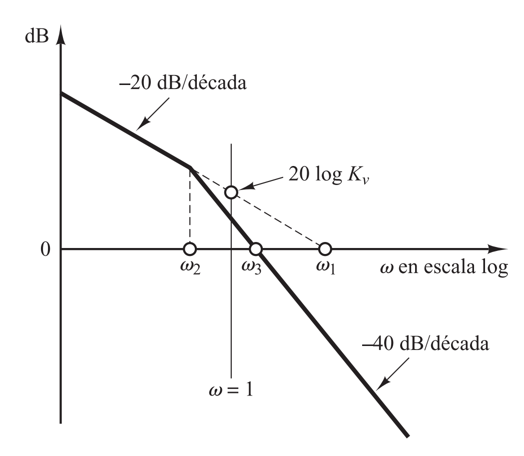


Figura 7-18. Curva de magnitud logarítmica de un sistema de tipo 1.

Como

$$\omega_1 = K_v = \frac{K}{F}$$

se deduce que

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_3^2$$

o bien

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_3}{\omega_2}$$

En el diagrama de Bode,

$$\log \omega_1 - \log \omega_3 = \log \omega_3 - \log \omega_2$$

Por tanto, el punto ω_3 está justo en la mitad entre los puntos ω_2 y ω_1. Entonces, el factor de amortiguamiento relativo ζ del sistema es

$$\zeta = \frac{F}{2\sqrt{KJ}} = \frac{\omega_2}{2\omega_3}$$

Determinación de las constantes de error estático de aceleración. Considérese el sistema de control con realimentación unitaria de la Figura 7-16. La Figura 7-19 contiene un ejemplo de la gráfica de la magnitud logarítmica de un sistema de tipo 2. La intersección del segmento inicial -40 dB/década (o su extensión) con la línea $\omega = 1$ tiene una magnitud de $20 \log K_a$. Debido a bajas frecuencias

$$G(j\omega) = \frac{K_a}{(j\omega)^2}, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

se deduce que

$$20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega)^2} \right|_{\omega=1} = 20 \log K_a$$

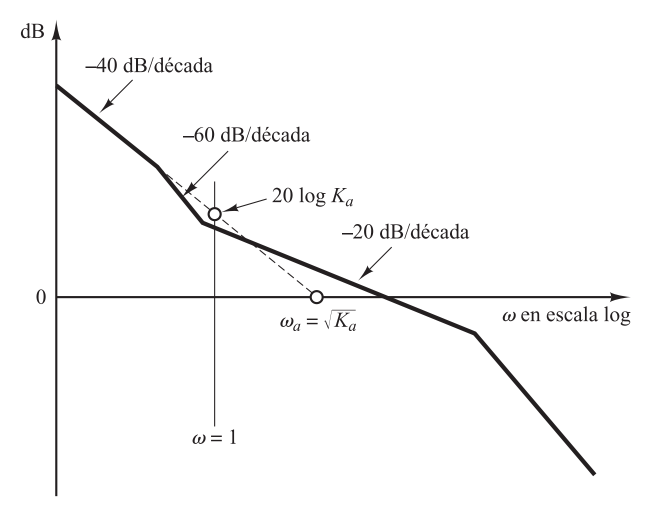


Figura 7-19. Curva de magnitud logarítmica de un sistema de tipo 2.

La frecuencia ω_a de la intersección del segmento inicial -40 dB/década (o su extensión) con la línea 0 dB proporciona numéricamente la raíz cuadrada de K_a. Esto se observa a partir de lo siguiente:

$$20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega_a)^2} \right| = 20 \log 1 = 0$$

de donde

$$\omega_a = \sqrt{K_a}$$

Representación de diagramas de Bode con MATLAB. La orden `bode` calcula las magnitudes y los ángulos de fase de la respuesta en frecuencia de un sistema en tiempo continuo, lineal e invariante en el tiempo.

Cuando se introduce la orden `bode` en la computadora (sin argumentos en el lado izquierdo), MATLAB devuelve los diagramas de Bode en la pantalla. Las órdenes `bode` más comúnmente utilizadas son

```
bode(num,den)
bode(num,den,w)
bode(A,B,C,D)
bode(A,B,C,D,w)
bode(A,B,C,D,iu,w)
bode(sys)
```

Cuando se invoca con argumentos en el lado izquierdo, como

```
[mag,phase,w] = bode(num,den,w)
```

`bode` devuelve la respuesta en frecuencia del sistema en las matrices `mag`, `phase` y `w`. No aparece una gráfica en la pantalla. Las matrices `mag` y `phase` contienen las magnitudes y los ángulos de fase de la respuesta en frecuencia del sistema evaluado en los puntos de frecuencia especificados por el usuario. El ángulo de fase se da en grados. La magnitud se convierte en decibelios con la orden

```
magdB = 20*log10(mag)
```

Otras órdenes de Bode con argumentos a la izquierda son

```
[mag,phase,w] = bode(num,den)
[mag,phase,w] = bode(num,den,w)
[mag,phase,w] = bode(A,B,C,D)
[mag,phase,w] = bode(A,B,C,D,w)
[mag,phase,w] = bode(A,B,C,D,iu,w)
[mag,phase,w] = bode(sys)
```

Para especificar el rango de frecuencia, se utiliza la orden `logspace(d1,d2)` o `logspace(d1,d2,n)`. El primero genera un vector de 50 puntos logarítmicamente espaciados de forma equitativa entre las décadas 10^{d1} y 10^{d2} (50 puntos incluidos los extremos. Hay 48 puntos entre los extremos). Para generar 50 puntos entre 0.1 rad/seg y 100 rad/seg, se introduce la orden

```
w = logspace(-1,2)
```

La orden `logspace(d1,d2,n)`, en cambio, genera logarítmicamente n puntos espaciados de forma equitativa entre las décadas 10^{d1} y 10^{d2} (n puntos incluidos los extremos). Por ejemplo, para generar 100 puntos entre 1 rad/seg y 1000 rad/seg, se introduce la orden siguiente:

```
w = logspace(0,3,100)
```

Para incorporar los puntos de frecuencia especificados por el usuario cuando se dibujan los diagramas de Bode, la orden `bode` debe incluir el vector de frecuencia `w`, como, por ejemplo, `bode(num,den,w)` o `[mag,phase,w] = bode(A,B,C,D,w)`.

EJEMPLO 7-5 Considere la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

Dibuje los diagramas de Bode para esta función de transferencia.

Cuando el sistema se define de la forma

$$G(s) = \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}$$

utilice la orden `bode(num,den)` para dibujar los diagramas de Bode. [Cuando el numerador y el denominador contienen los coeficientes del polinomio en potencias decrecientes de s, `bode(num,den)` dibuja los diagramas de Bode.] El Programa MATLAB 7-1 muestra un programa que dibuja los diagramas de Bode para este sistema. Los diagramas de Bode resultantes aparecen en la Figura 7-20.

MATLAB Programa 7-1

```
num = [25];
den = [1  4  25];
bode(num,den)
title('Diagrama de Bode de G(s) = 25/(s^2 + 4s + 25)')
```

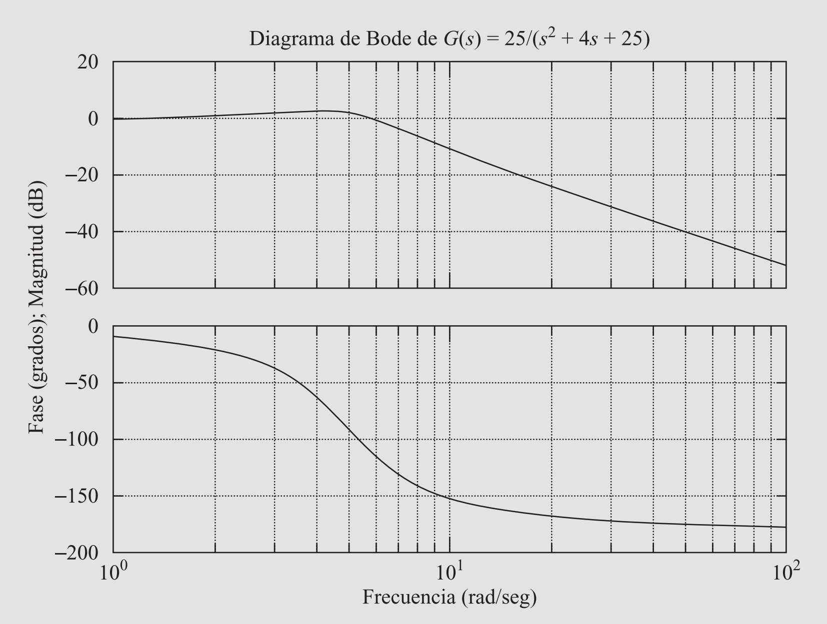


Figura 7-20. Diagrama de Bode de $G(s) = \dfrac{25}{s^2 + 4s + 25}$.

EJEMPLO 7-6 Considere el sistema de la Figura 7-21. La función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$$

Dibuje los diagramas de Bode.

El Programa MATLAB 7-2 dibuja los diagramas de Bode para el sistema. Las gráficas resultantes aparecen en la Figura 7-22. En este caso, se determina automáticamente el rango de frecuencia entre 0.1 y 10 rad/seg.

MATLAB Programa 7-2

```
num = [9  1.8  9];
den = [1  1.2  9  0];
bode(num,den)
title('Diagrama de Bode de G(s) = 9(s^2 + 0.2s + 1)/[s(s^2 + 1.2s + 9)]')
```

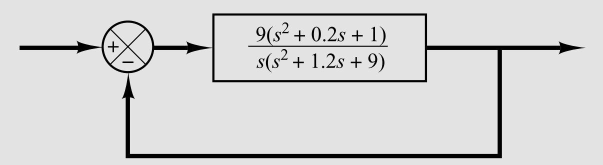


Figura 7-21. Sistema de control.

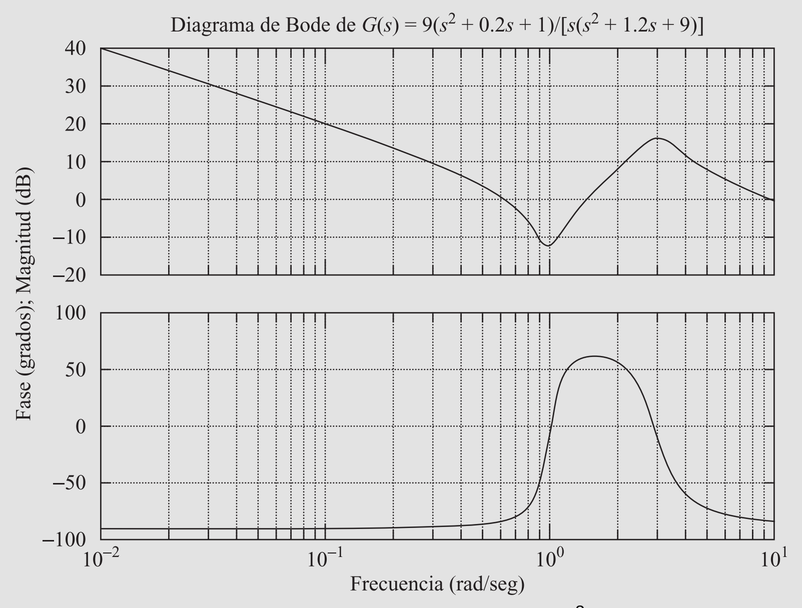


Figura 7-22. Diagrama de Bode de $G(s) = \dfrac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$.

Si se desea dibujar los diagramas de Bode de 0.01 a 1000 rad/seg, introduzca la orden siguiente:

```
w = logspace(-2,3,100)
```

Esta orden genera logarítmicamente 100 puntos espaciados de forma equitativa entre 0.01 y 100 rad/seg. (Observe que el vector `w` especifica en radianes por segundo las frecuencias en las que se calculará la respuesta en frecuencia.)

Si se utiliza la orden

```
bode(num,den,w)
```

entonces, el rango de frecuencia será el que especifique el usuario, pero el rango de magnitud y el rango del ángulo de fase se determinarán automáticamente. Véanse el Programa MATLAB 7-3 y la gráfica resultante en la Figura 7-23.

MATLAB Programa 7-3

```
num = [9  1.8  9];
den = [1  1.2  9  0];
w = logspace(-2,3,100);
bode(num,den,w)
title('Diagrama de Bode de G(s) = 9(s^2 + 0.2s + 1)/[s(s^2 + 1.2s + 9)]')
```

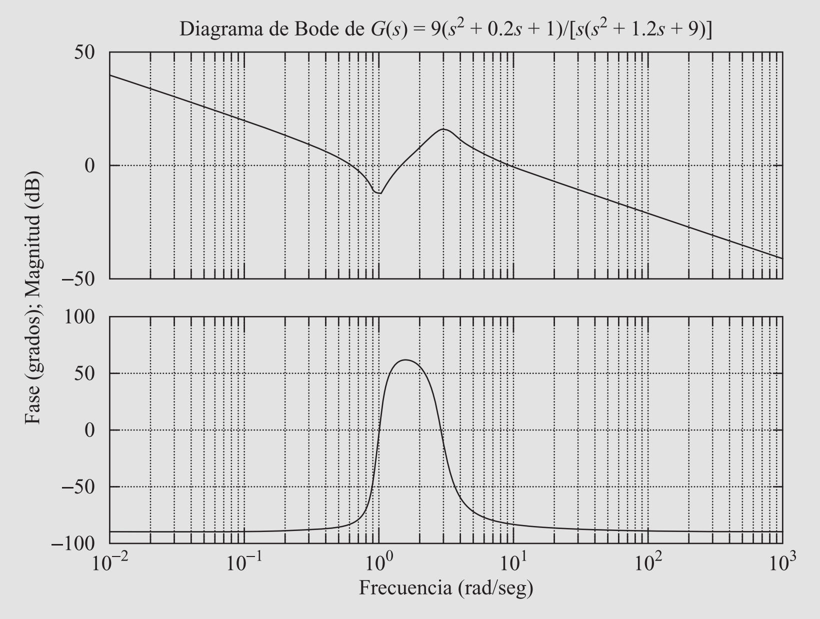


Figura 7-23. Diagrama de Bode de $G(s) = \frac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$.

Obtención de diagramas de Bode de sistemas definidos en el espacio de estados. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
$\mathbf{y}$ = vector de salida (vector de dimensión m)
$\mathbf{u}$ = vector de control (vector de dimensión r)
$\mathbf{A}$ = matriz de estado (matriz de dimensión $n \times n$)
$\mathbf{B}$ = matriz de control (matriz de dimensión $n \times r$)
$\mathbf{C}$ = matriz de salida (matriz de dimensión $m \times n$)
$\mathbf{D}$ = matriz de transmisión directa (matriz de dimensión $m \times r$)

Los diagramas de Bode para este sistema se obtienen introduciendo la orden

```
bode(A,B,C,D)
```

u otras mostradas al comienzo de esta sección.

La orden `bode(A,B,C,D)` proporciona una serie de diagramas de Bode, uno para cada entrada del sistema, con el rango de frecuencia determinado automáticamente. (Se usan más puntos cuando la respuesta cambia con rapidez.)

La orden `bode(A,B,C,D,iu)`, donde `iu` es la *i*-ésima entrada del sistema, proporciona los diagramas de Bode de la entrada `iu` para todas las salidas (y_1, y_2, ..., y_m) del sistema, con el rango de frecuencia determinado automáticamente. (El escalar `iu` es un índice dentro de las entradas del sistema y especifica qué entrada se utilizará para dibujar los diagramas de Bode.) Si el vector de control $\mathbf{u}$ tiene tres entradas, tales que

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

entonces `iu` debe ser 1, 2 o 3.

Si el sistema sólo tiene una entrada u, se utiliza cualquiera de las órdenes siguientes:

```
bode(A,B,C,D)
```

o bien

```
bode(A,B,C,D,1)
```

EJEMPLO 7-7 Considere el sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Este sistema tiene una entrada u y una salida y. Utilizando la orden

```
bode(A,B,C,D)
```

e introduciendo el Programa MATLAB 7-4 en la computadora, se obtienen los diagramas de Bode de la Figura 7-24.

MATLAB Programa 7-4

```
A = [0  1;–25  –4];
B = [0;25];
C = [1  0];
D = [0];
bode(A,B,C,D)
title('Diagrama de Bode')
```

Si se sustituye la orden `bode(A,B,C,D)` en el Programa MATLAB 7-4 por

```
bode(A,B,C,D,1)
```

MATLAB crea un diagrama de Bode idéntico al de la Figura 7-24.

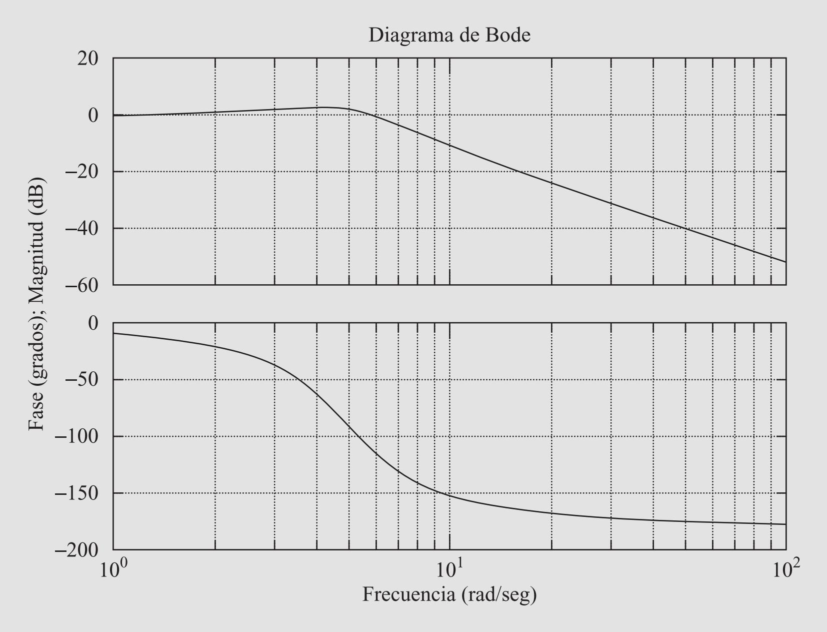


Figura 7-24. Diagrama de Bode del sistema considerado en el Ejemplo 7-7.

7-3 Diagramas polares

El diagrama polar de una función de transferencia sinusoidal $G(j\omega)$ es una gráfica de la magnitud de $G(j\omega)$ con respecto al ángulo de fase de $G(j\omega)$ en coordenadas polares, cuando ω varía de cero a infinito. Por tanto, el diagrama polar es el lugar geométrico de los vectores $|G(j\omega)|\,\underline{/G(j\omega)}$ cuando ω varía de cero a infinito. Obsérvese que, en las gráficas polares, los ángulos de fase son positivos (negativos) si se miden en el sentido contrario al de las agujas del reloj (en el sentido de las agujas) a partir del eje real positivo. El diagrama polar se denomina, a menudo, diagrama de Nyquist. La Figura 7-25 muestra un ejemplo de dicho diagrama. Cada punto en el diagrama polar de $G(j\omega)$ representa el punto terminal de un vector en un valor determinado ω. En el diagrama polar, es importante mostrar la graduación de la frecuencia del lugar geométrico. Las proyecciones de $G(j\omega)$ en los ejes real e imaginario son sus componentes real e imaginaria.

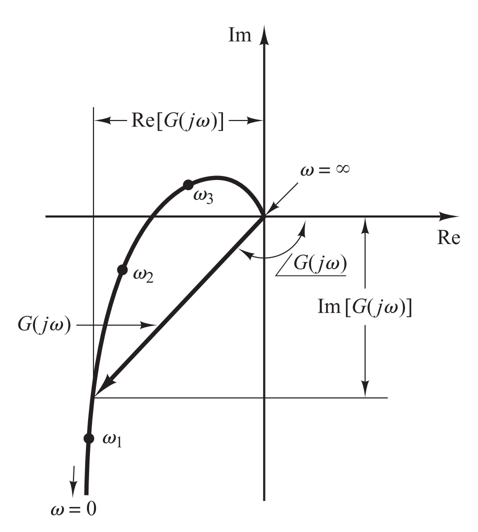


Figura 7-25. Diagrama polar.

MATLAB puede utilizarse para obtener un diagrama polar $G(j\omega)$ o para obtener $|G(j\omega)|$ y $\underline{/G(j\omega)}$ con precisión para diversos valores de ω en el rango de frecuencia que interesa. (Véase la Sección 7-5.)

Una ventaja de utilizar un diagrama polar es que representa, en una sola gráfica, las características de la respuesta en frecuencia de un sistema en el rango de frecuencia completo. Una desventaja es que el diagrama no indica en forma clara la contribución de todos los factores individuales de la función de transferencia en lazo abierto.

Factores integral y derivativo $(j\omega)^{\mp 1}$. El diagrama polar de $G(j\omega) = 1/j\omega$ es el eje imaginario negativo, puesto que

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\,\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\,\underline{/-90^{\circ}}$$

El diagrama polar de $G(j\omega) = j\omega$ es el eje imaginario positivo.

Factores de primer orden $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$. Para la función de transferencia sinusoidal

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}\,\underline{/-\tan^{-1}\omega T}$$

los valores de $G(j\omega)$ en $\omega = 0$ y $\omega = 1/T$ son, respectivamente,

$$G(j0) = 1\,\underline{/0^{\circ}} \quad \text{y} \quad G\left(j\,\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{/-45^{\circ}}$$

Si ω tiende a infinito, la magnitud de $G(j\omega)$ tiende a cero y el ángulo de fase tiende a -90°. El diagrama polar de esta función de transferencia es un semicírculo cuando la frecuencia ω varía de cero a infinito, como se aprecia en la Figura 7-26(a). El centro se localiza en 0.5 sobre el eje real y el radio es igual a 0.5.

Para probar que el diagrama polar del factor de primer orden $G(j\omega) = 1/(1 + j\omega T)$ es un semicírculo, se define

$$G(j\omega) = X + jY$$

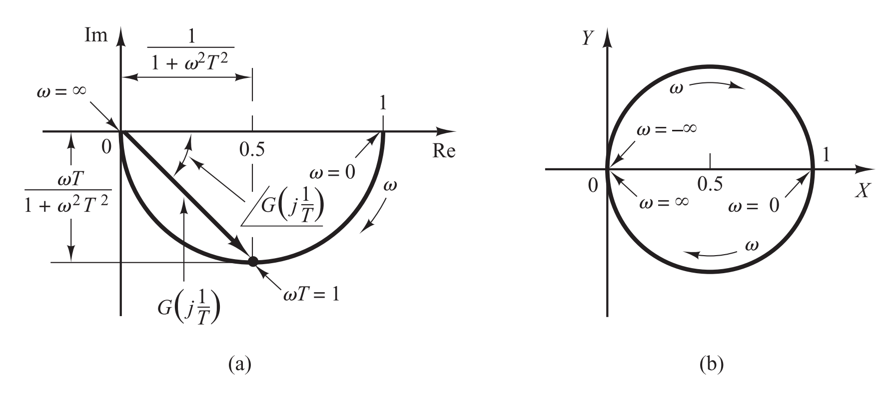


Figura 7-26. (a) Diagrama polar de $1/(1 + j\omega T)$; (b) diagrama de $G(j\omega)$ en el plano X-Y.

donde

$$X = \frac{1}{1 + \omega^2T^2} = \text{parte real de } G(j\omega)$$

$$Y = \frac{-\omega T}{1 + \omega^2T^2} = \text{parte imaginaria de } G(j\omega)$$

Así, se obtiene

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{1}{2}\,\frac{1 - \omega^2T^2}{1 + \omega^2T^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2T^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Figura 7-27. Diagrama polar de $1 + j\omega T$.

Por tanto, en el plano X-Y, $G(j\omega)$ es un círculo con centro en $X = \frac{1}{2}$, $Y = 0$ y con radio $\frac{1}{2}$, como se muestra en la Figura 7-26(b). El semicírculo inferior corresponde a $0 \leqslant \omega \leqslant \infty$ y el semicírculo superior corresponde a $-\infty \leqslant \omega \leqslant 0$.

El diagrama polar de la función de transferencia $1 + j\omega T$ es simplemente la mitad superior de la recta que pasa por el punto (1, 0) en el plano complejo y paralelo al eje imaginario, como se observa en la Figura 7-27. El diagrama polar de $1 + j\omega T$ tiene un aspecto completamente diferente del de $1/(1 + j\omega T)$.

Factores cuadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{\mp 1}$. Las partes de baja y alta frecuencia del diagrama polar de la función de transferencia sinusoidal

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \qquad \text{para } \zeta > 0$$

se obtienen, respectivamente, mediante

$$\lim_{\omega\to 0} G(j\omega) = 1\,\underline{/0^{\circ}} \quad \text{y} \quad \lim_{\omega\to 0} G(j\omega) = 0\,\underline{/-180^{\circ}}$$

El diagrama polar de esta función de transferencia sinusoidal empieza en $1\,\underline{/0^{\circ}}$ y termina en $0\,\underline{/-180^{\circ}}$ conforme ω aumenta de cero a infinito. Por tanto, la parte de alta frecuencia de $G(j\omega)$ es tangente al eje real negativo.

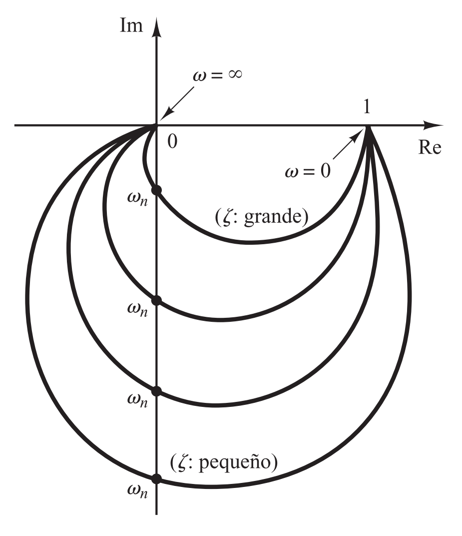


Figura 7-28. Diagramas polares de $\dfrac{1}{1 + 2\zeta\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$, para $\zeta > 0$.

La Figura 7-28 contiene ejemplos de los diagramas polares de la función de transferencia que se acaba de considerar. La forma exacta de un diagrama polar depende del valor del factor de amortiguamiento relativo ζ, pero la forma general del diagrama es igual tanto para el caso subamortiguado ($1 > \zeta > 0$) como para el caso sobreamortiguado ($\zeta > 1$).

Para el caso subamortiguado en $\omega = \omega_n$, se tiene que $G(j\omega_n) = 1/(j2\zeta)$, y el ángulo de fase en $\omega = \omega_n$ es de -90°. Por tanto, se observa que la frecuencia en la que el lugar geométrico $G(j\omega)$ corta al eje imaginario es la frecuencia natural no amortiguada ω_n. En el diagrama polar, el punto de frecuencia cuya distancia al origen es la máxima, corresponde a la frecuencia de resonancia ω_r. El valor pico de $G(j\omega)$ se obtiene como el cociente entre la magnitud del vector en la frecuencia de resonancia ω_r y la magnitud del vector en $\omega = 0$. La frecuencia de resonancia ω_r se muestra en el diagrama polar de la Figura 7-29.

Para el caso sobreamortiguado, cuando ζ aumenta mucho más allá de la unidad, el lugar geométrico $G(j\omega)$ tiende a un semicírculo. Esto se observa porque para un sistema muy amortiguado, las raíces características son reales y una es mucho más pequeña que la otra. Debido a que para un ζ suficientemente grande el efecto de la raíz mayor (mayor en su valor absoluto) sobre la respuesta se vuelve muy pequeño, el sistema se comporta como uno de primer orden.

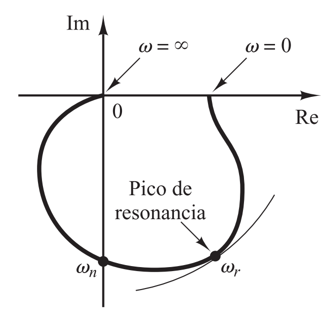


Figura 7-29. Diagrama polar que muestra el pico de resonancia y la frecuencia de resonancia ω_r.

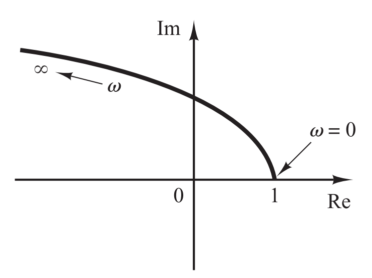


Figura 7-30. Diagrama polar de $1 + 2\zeta\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2$, para $\zeta > 0$.

A continuación, considérese la siguiente función de transferencia sinusoidal:

$$G(j\omega) = 1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$$= \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)$$

La parte de baja frecuencia de la curva es

$$\lim_{\omega\to 0} G(j\omega) = 1 \,\underline{/0^{\circ}}$$

y la parte de alta frecuencia es

$$\lim_{\omega\to\infty} G(j\omega) = \infty \,\underline{/180^{\circ}}$$

Debido a que la parte imaginaria de $G(j\omega)$ es positiva para $\omega > 0$ y aumenta de forma monótona, además de que la parte real de $G(j\omega)$ disminuye de forma monótona a partir de la unidad, la forma general del diagrama polar de $G(j\omega)$ es la que aparece en la Figura 7-30. El ángulo de fase está entre 0º y 180º.

EJEMPLO 7-8 Considere la siguiente función de transferencia de segundo orden:

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}$$

Dibuje el diagrama polar de esta función de transferencia.

Como la función de transferencia sinusoidal se escribe

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)} = -\frac{T}{1 + \omega^2T^2} - j\frac{1}{\omega(1 + \omega^2T^2)}$$

la parte de baja frecuencia del diagrama polar se convierte en

$$\lim_{\omega\to 0} G(j\omega) = -T - j\infty$$

y la parte de alta frecuencia se convierte en

$$\lim_{\omega\to\infty} G(j\omega) = 0 - j0$$

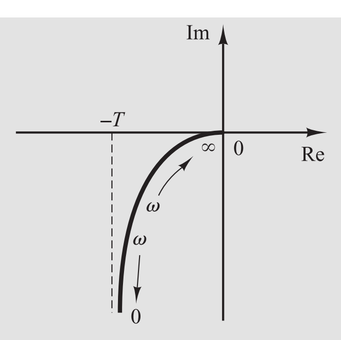


Figura 7-31. Diagrama polar de $1/[j\omega(1 + j\omega T)]$.

La forma general del diagrama polar de $G(j\omega)$ aparece en la Figura 7-31. El diagrama de $G(j\omega)$ es asintótico hacia la línea vertical que pasa por el punto $(-T, 0)$. Debido a que esta función de transferencia contiene un integrador $(1/s)$, la forma general del diagrama polar difiere sustancialmente de las funciones de transferencia de segundo orden que no poseen un integrador.

EJEMPLO 7-9 Obtenga el diagrama polar de la siguiente función de transferencia:

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

Como $G(j\omega)$ se escribe

$$G(j\omega) = (e^{-j\omega L})\left(\frac{1}{1 + j\omega T}\right)$$

la magnitud y el ángulo de fase son, respectivamente,

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega L}| \cdot \left|\frac{1}{1 + j\omega T}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

y

$$\underline{/G(j\omega)} = \underline{/e^{-j\omega L}} + \underline{\Big/\frac{1}{1 + j\omega T}} = -\omega L - \tan^{-1}\omega T$$

Como la magnitud disminuye de forma monotónica a partir de la unidad y el ángulo de fase disminuye de forma monotónica e indefinida, el diagrama polar de la función de transferencia determinada es una espiral, como se observa en la Figura 7-32.

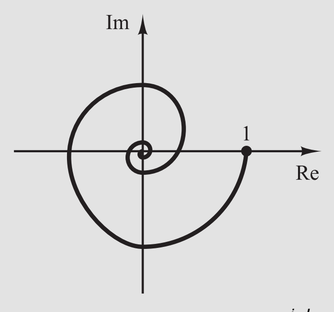


Figura 7-32. Diagrama polar de $e^{-j\omega L}/(1 + j\omega T)$.

Formas generales de los diagramas polares. Los diagramas polares de una función de transferencia de la forma

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_b) \cdots}{(j\omega)^{\lambda}(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \cdots}$$

$$= \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \cdots}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots}$$

donde $n > m$, o el grado del polinomio del denominador es mayor que el del numerador, tendrá las formas generales siguientes:

1. Para $\lambda = 0$ *o sistemas de tipo* 0: el punto inicial del diagrama polar (que corresponde a $\omega = 0$) es finito y está sobre el eje real positivo. La tangente en el diagrama polar en $\omega = 0$ es perpendicular al eje real. El punto terminal, que corresponde a $\omega = \infty$, está en el origen, y la curva es tangente a uno de los ejes.

2. Para $\lambda = 1$ *o sistemas de tipo* 1: el término $j\omega$ del denominador contribuye -90° al ángulo de fase total de $G(j\omega)$ para $0 \leqslant \omega \leqslant \infty$. En $\omega = 0$, la magnitud de $G(j\omega)$ es infinita y el ángulo de fase se convierte en -90°. En bajas frecuencias, el diagrama polar es asintótico hacia una línea paralela al eje imaginario negativo. En $\omega = \infty$, la magnitud se vuelve cero y la curva converge hacia el origen y es tangente a uno de los ejes.

3. Para $\lambda = 2$ *o sistemas de tipo* 2: el término $(j\omega)^2$ del denominador contribuye -180° al ángulo de fase total de $G(j\omega)$ para $0 \leqslant \omega \leqslant \infty$. En $\omega = 0$, la magnitud de $G(j\omega)$ es infinita y el ángulo de fase es igual a -180°. En bajas frecuencias, el diagrama polar es asintótico hacia una línea paralela al eje real negativo. En $\omega = \infty$, la magnitud se vuelve cero y la curva es tangente a uno de los ejes.

Las formas generales de las partes de baja frecuencia de los diagramas polares de los sistemas de tipo 0, tipo 1 y tipo 2 aparecen en la Figura 7-33. Se observa que, si el grado del polino-

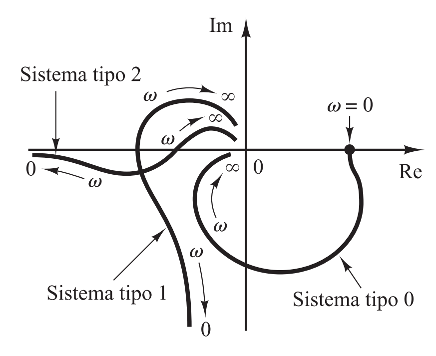


Figura 7-33. Diagramas polares de sistemas de tipo 0, tipo 1 y tipo 2.

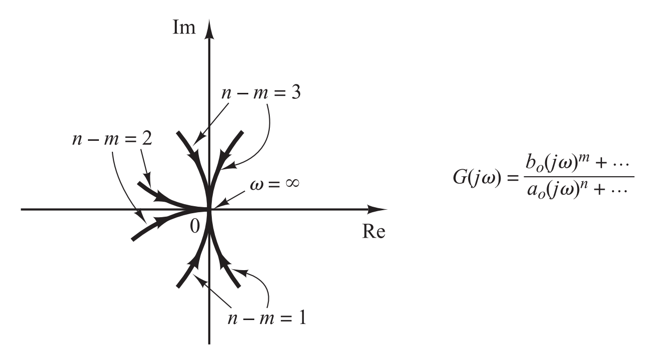


Figura 7-34. Diagramas polares en el rango de altas frecuencias.

mio del denominador de $G(j\omega)$ es mayor que el del denominador, entonces los lugares geométricos de $G(j\omega)$ convergen al origen en el sentido de las agujas del reloj. En $\omega = \infty$, los lugares geométricos son tangentes a uno u otro de los ejes, como se observa en la Figura 7-34.

Obsérvese que las formas complicadas de las curvas de diagramas polares se deben a la dinámica del numerador, es decir, a las constantes de tiempo del numerador de la función de transferencia. La Figura 7-35 muestra dos ejemplos de diagramas polares de funciones de transferencia con una dinámica del numerador. Al analizar los sistemas de control, debe determinarse con precisión el diagrama polar de $G(j\omega)$ en el rango de frecuencia que interesa.

La Tabla 7-1 muestra las gráficas de los diagramas polares de varias funciones de transferencia.

Obtención de diagramas de Nyquist con MATLAB. Los diagramas de Nyquist, al igual que los diagramas de Bode, suelen usarse en la representación de la respuesta en frecuencia

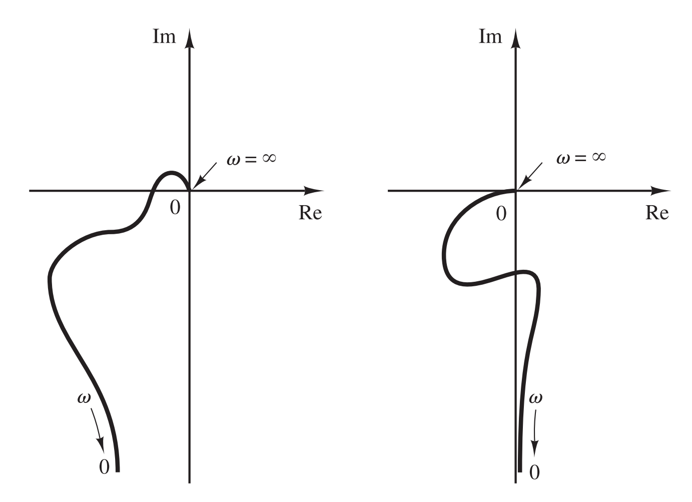
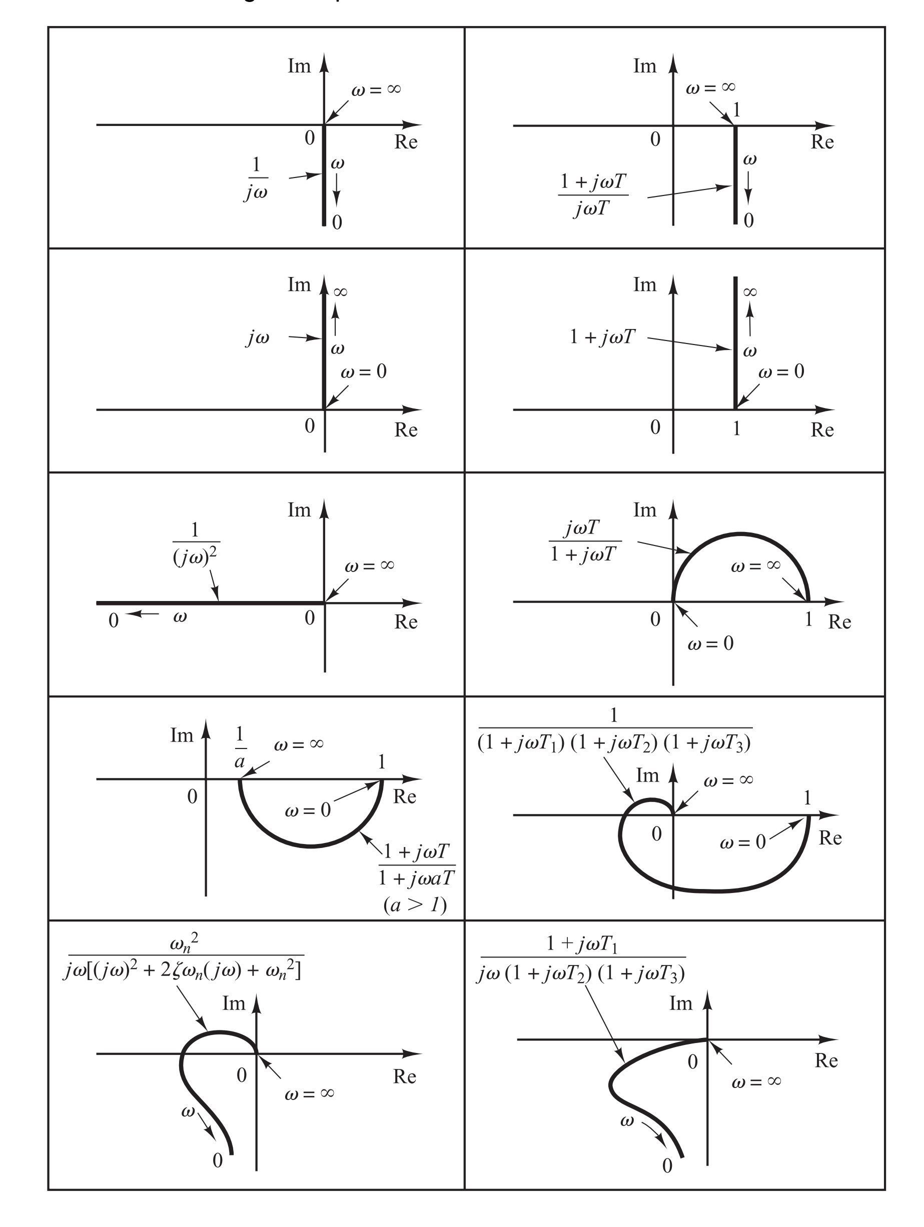


Figura 7-35. Diagramas polares de funciones de transferencia con dinámica en el numerador.

Tabla 7-1. Diagramas polares de funciones de transferencia sencillas.



de sistemas de control lineales, invariantes en el tiempo y realimentados. Los diagramas de Nyquist son gráficas polares, mientras que los diagramas de Bode son gráficas rectangulares. Uno u otro diagrama puede ser más conveniente para una operación específica, pero una determinada operación siempre puede realizarse en cualquier diagrama.

La orden `nyquist` de MATLAB calcula la respuesta en frecuencia para sistemas en tiempo continuo, lineales e invariantes en el tiempo. Cuando se invoca sin argumentos en su lado izquierdo, `nyquist` proporciona un diagrama de Nyquist en la pantalla.

La orden

```
nyquist(num,den)
```

dibuja el diagrama de Nyquist de la función de transferencia

$$G(s) = \frac{\mathtt{num}(s)}{\mathtt{den}(s)}$$

en la que `num` y `den` contienen los coeficientes del polinomio en potencias descendentes de s. Las órdenes `nyquist` más comúnmente utilizadas son

```
nyquist(num,den,w)
nyquist(A,B,C,D)
nyquist(A,B,C,D,w)
nyquist(A,B,C,D,iu,w)
nyquist(sys)
```

La orden

```
nyquist(num,den,w)
```

usa el vector de frecuencia `w` especificado por el usuario. El vector `w` determina los puntos de frecuencia, en radianes por segundo.

Cuando se invoca con los argumentos del lado izquierdo, como, por ejemplo,

```
[re,im,w] = nyquist(num,den)
[re,im,w] = nyquist(num,den,w)
[re,im,w] = nyquist(A,B,C,D)
[re,im,w] = nyquist(A,B,C,D,w)
[re,im,w] = nyquist(A,B,C,D,iu,w)
[re,im,w] = nyquist(sys)
```

MATLAB devuelve la respuesta en frecuencia del sistema en las matrices `re`, `im` y `w`. No aparece una gráfica en la pantalla. Las matrices `re` e `im` contienen las partes real e imaginaria de la respuesta en frecuencia del sistema en los puntos de frecuencia especificados en el vector `w`. Obsérvese que `re` e `im` tienen tantas columnas como salidas y una fila para cada elemento de `w`.

EJEMPLO 7-10 Considere la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$$

Dibuje un diagrama de Nyquist con MATLAB.

Debido a que el sistema se obtiene de la forma de la función de transferencia, la orden

```
nyquist(num,den)
```

puede usarse para dibujar un diagrama de Nyquist. El Programa MATLAB 7-5 proporciona el diagrama de Nyquist que aparece en la Figura 7-36. En esta gráfica, los rangos para el eje real y el eje imaginario se determinan automáticamente.

MATLAB Programa 7-5

```
num = [1];
den = [1  0.8  1];
nyquist(num,den)
grid
title('Diagrama de Nyquist de G(s) = 1/(s^2 + 0.8s + 1)')
```

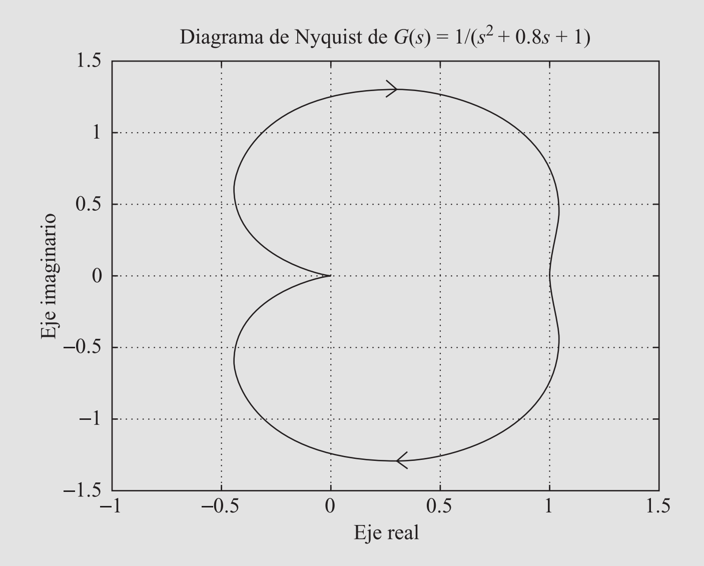


Figura 7-36. Diagrama de Nyquist de $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$.

Si se quiere dibujar el diagrama de Nyquist usando los rangos determinados de forma manual, por ejemplo de -2 a 2 en el eje real y de -2 a 2 en el eje imaginario, debe introducirse la orden siguiente en la computadora:

```
v = [-2  2  -2  2];
axis(v);
```

o, combinando estas dos líneas en una,

```
axis([-2  2  -2  2]);
```

Véanse el Programa MATLAB 7-6 y el diagrama de Nyquist resultante en la Figura 7-37.

MATLAB Programa 7-6

```
% ---------- Diagrama de Nyquist ----------

num = [1];
den = [1  0.8  1];
nyquist(num,den)
v = [-2  2  -2  2]; axis(v)
grid
title('Diagrama de Nyquist de G(s) = 1/(s^2 + 0.8s + 1)')
```

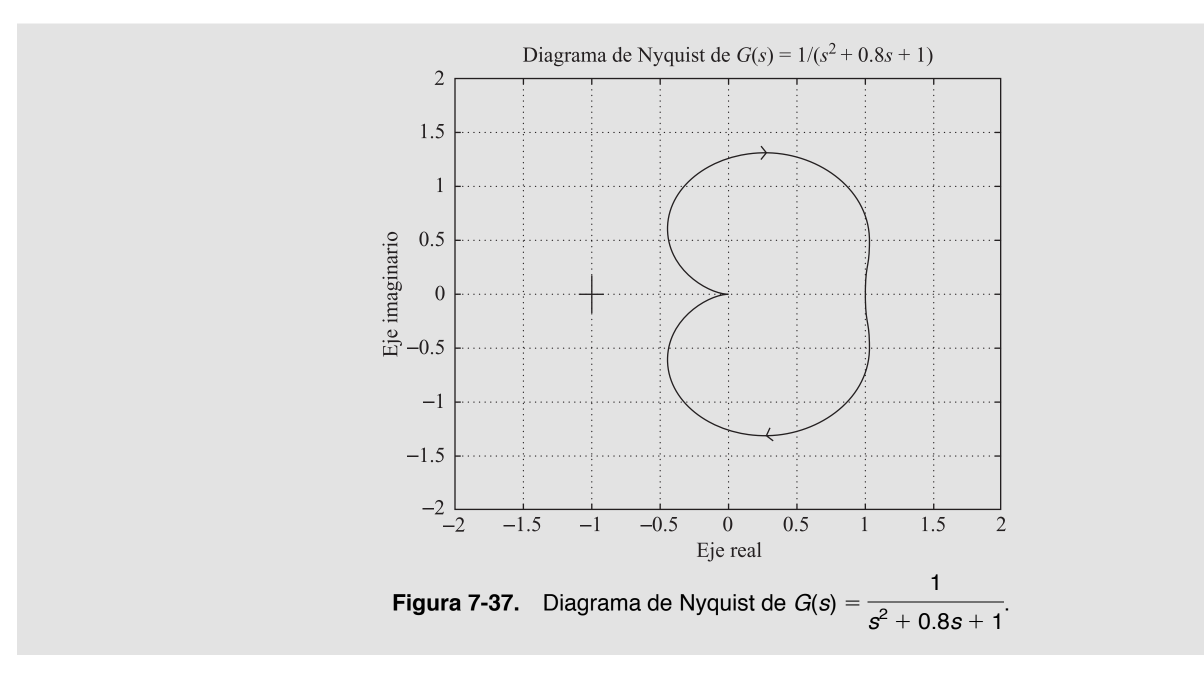


Figura 7-37. Diagrama de Nyquist de $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$.

Advertencia. Si se dibuja un diagrama de Nyquist, en el que una operación de MATLAB implica «dividir entre 0», el diagrama de Nyquist puede resultar erróneo. Por ejemplo, si la función de transferencia $G(s)$ se obtiene mediante

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

entonces, la orden MATLAB

```
num = [1];
den = [1  1  0];
nyquist(num,den)
```

proporciona un diagrama de Nyquist erróneo. Un ejemplo de un diagrama de Nyquist erróneo aparece en la Figura 7-38. Si un diagrama de Nyquist como éste aparece en la computadora,

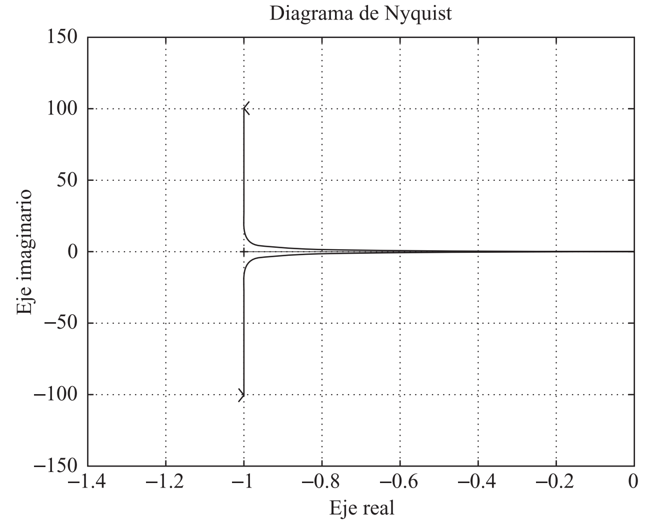


Figura 7-38. Diagrama de Nyquist erróneo.

puede corregirse especificando el `axis(v)`. Por ejemplo, si se introduce en el computador la orden de `axis`

```
v = [−2  2  −5  5]; axis(v)
```

se obtiene un diagrama de Nyquist correcto. Véase el Ejemplo 7-11.

EJEMPLO 7-11 Dibuje un diagrama de Nyquist para la siguiente $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

El Programa MATLAB 7-7 proporcionará un diagrama de Nyquist correcto en el computador aunque aparezca un mensaje de advertencia «Divide by zero» (dividir entre 0). El diagrama de Nyquist resultante aparece en la Figura 7-39.

MATLAB Programa 7-7

```
% ---------- Diagrama de Nyquist ----------
num = [1];
den = [1  1  0];
nyquist(num,den)
v = [−2  2  −5  5]; axis(v)
grid
title('Diagrama de Nyquist de G(s) = 1/[s(s + 1)]')
```

Observe que el diagrama de Nyquist de la Figura 7-39 incluye los lugares geométricos para $\omega > 0$ y $\omega < 0$. Si se desea dibujar el diagrama de Nyquist sólo para la región de frecuencia positiva ($\omega > 0$), se necesita usar la orden

```
[re,im,w] = nyquist(num,den,w)
```

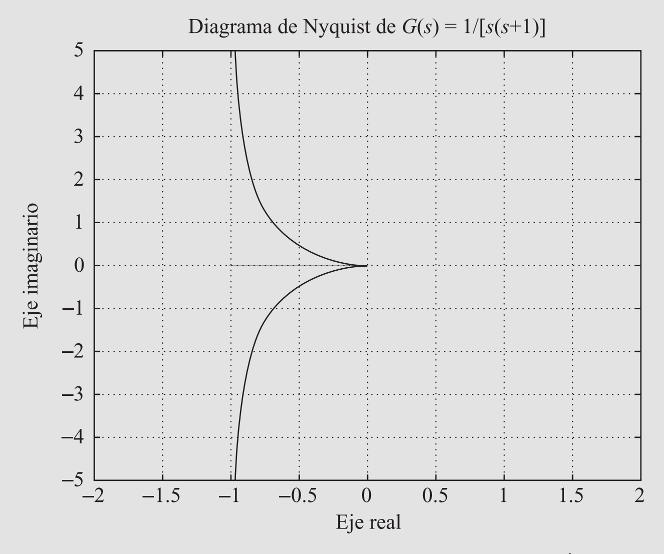


Figura 7-39. Diagrama de Nyquist de $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$.

El Programa MATLAB 7-8 usa esta orden `nyquist`. El diagrama de Nyquist resultante se presenta en la Figura 7-40.

MATLAB Programa 7-8

```
% ---------- Diagrama de Nyquist ----------
num = [1];
den = [1  1  0];
w = 0.1:0.1:100;
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
plot(re,im)
v = [-2  2  -5  5]; axis(v)
grid
title('Diagrama de Nyquist de G(s) = 1/[s(s + 1)]')
xlabel('Eje Real')
ylabel('Eje Imag')
```

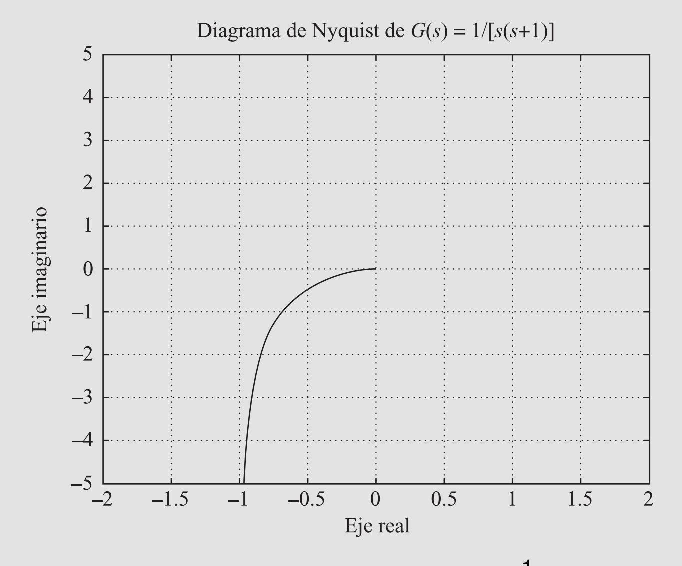


Figura 7-40. Diagrama de Nyquist de $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ para $\omega > 0$.

Obtención de diagramas de Nyquist de un sistema definido en el espacio de estados. Considérese el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
$\mathbf{y}$ = vector de salida (vector de dimensión m)
$\mathbf{u}$ = vector de control (vector de dimensión r)
$\mathbf{A}$ = matriz de estado (matriz de dimensión $n \times n$)
$\mathbf{B}$ = matriz de control (matriz de dimensión $n \times r$)
$\mathbf{C}$ = matriz de salida (matriz de dimensión $m \times n$)
$\mathbf{D}$ = matriz de transmisión directa (matriz de dimensión $m \times r$)

Los diagramas de Nyquist para este sistema se obtienen introduciendo la orden

```
nyquist(A,B,C,D)
```

Esta orden produce una serie de diagramas de Nyquist, uno para cada combinación de entrada y salida del sistema. El rango de frecuencia se determina automáticamente.

La orden

```
nyquist(A,B,C,D,iu)
```

proporciona un diagrama de Nyquist a partir de la única entrada `iu` para todas las salidas del sistema, con el rango de frecuencia determinado automáticamente. La `iu` escalar es un índice dentro de las entradas del sistema y especifica qué entrada debe usarse para la respuesta en frecuencia.

La orden

```
nyquist(A,B,C,D,iu,w)
```

usa el vector de frecuencia `w` proporcionado por el usuario. El vector `w` especifica las frecuencias, en radianes por segundo, en las cuales debe calcularse la respuesta en frecuencia.

EJEMPLO 7-12 Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u$$

Dibuje un diagrama de Nyquist.

Este sistema tiene una sola entrada u y una sola salida y. El diagrama de Nyquist se obtiene introduciendo la orden

```
nyquist(A,B,C,D)
```

o bien

```
nyquist(A, B,C, D,1)
```

El Programa MATLAB 7-9 proporcionará el diagrama de Nyquist. (Observe que con cualquiera de estas órdenes se obtiene el mismo resultado.) La Figura 7-41 muestra el diagrama de Nyquist producido por el Programa MATLAB 7-9.

MATLAB Programa 7-9

```
A = [0  1;-25  -4];
B = [0;25];
C = [1  0];
D = [0];
nyquist(A,B,C,D)
grid
title('Diagrama de Nyquist')
```

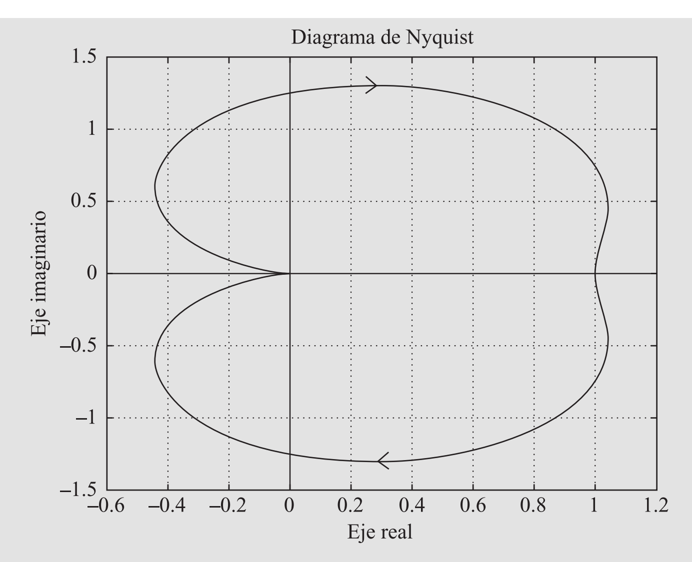


Figura 7-41. Diagrama de Nyquist del sistema considerado en el Ejemplo 7-12.

EJEMPLO 7-13 Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Este sistema contiene dos entradas y dos salidas. Hay cuatro relaciones sinusoidales salida-entrada: $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$, $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$, $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ y $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$. Dibuje los diagramas de Nyquist para el sistema. (Cuando se considera la entrada u_1 se supone que la entrada u_2 es cero, y viceversa.)

Los cuatro diagramas de Nyquist individuales se obtienen a partir de la orden

```
nyquist(A,B,C,D)
```

El Programa MATLAB 7-10 produce los cuatro diagramas de Nyquist. Estos se presentan en la Figura 7-42.

MATLAB Programa 7-10

```
A = [–1  –1;6.5  0];
B = [1  1;1  0];
C = [1  0;0  1];
D = [0  0;0  0];
nyquist(A,B,C,D)
```

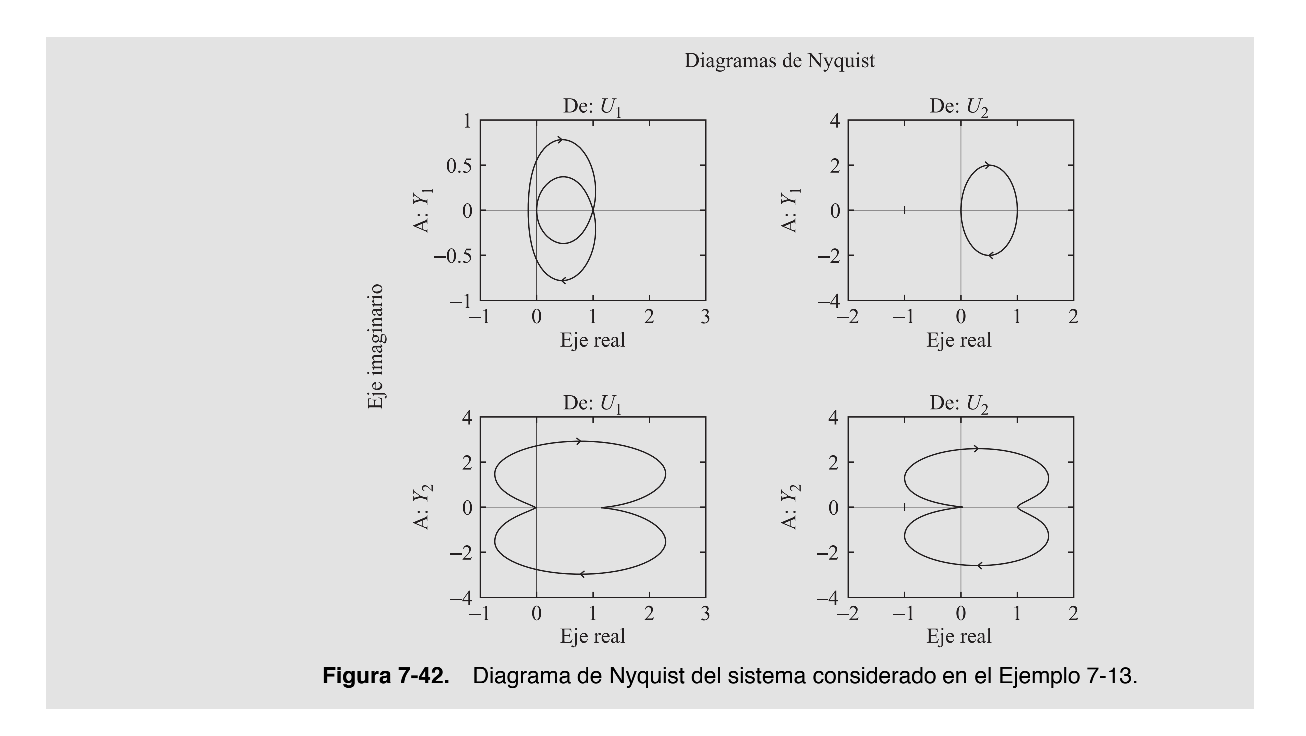


Figura 7-42. Diagrama de Nyquist del sistema considerado en el Ejemplo 7-13.

7-4 Diagramas de magnitud logarítmica respecto de la fase

Otro método para representar gráficamente la característica de la respuesta en frecuencia es utilizar el diagrama de magnitud logarítmica respecto de la fase, que es un diagrama de la magnitud logarítmica en decibelios con respecto al ángulo de fase o margen de fase para un rango de frecuencia de interés. [El margen de fase es la diferencia entre el ángulo de fase real ϕ y -180°; es decir, $\phi - (-180^{\circ}) = 180^{\circ} + \phi$.] La curva se gradúa en función de la frecuencia ω. Estos diagramas de la magnitud logarítmica con respecto a la fase se denominan diagramas de Nichols.

En los diagramas de Bode, las características de la respuesta en frecuencia de $G(j\omega)$ aparecen en papel semilogarítmico mediante dos curvas separadas, la curva de magnitud logarítmica y la curva de ángulo de fase; en el diagrama de magnitud logarítmica con respecto a la fase, en cambio, las dos curvas de los diagramas de Bode se combinan en una. El diagrama de la magnitud logarítmica con respecto a la fase se construye fácilmente si se leen los valores de la magnitud logarítmica y del ángulo de fase de los diagramas de Bode. Obsérvese que en el diagrama de magnitud logarítmica con respecto a la fase, un cambio en la constante de ganancia de $G(j\omega)$ simplemente altera la curva hacia arriba (al incrementar la ganancia) o hacia abajo (al disminuir la ganancia), pero la forma de la curva permanece igual.

Las ventajas del diagrama de magnitud logarítmica con respecto a la fase son que la estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado se determina con rapidez y que la compensación se obtiene con facilidad.

Los diagramas de magnitud logarítmica con respecto a la fase para la función de transferencia sinusoidal $G(j\omega)$ y $1/G(j\omega)$ tienen una inclinación simétrica con respecto al origen, debido a que

$$\left|\frac{1}{G(j\omega)}\right| \text{ en dB} = -|G(j\omega)| \text{ en dB}$$

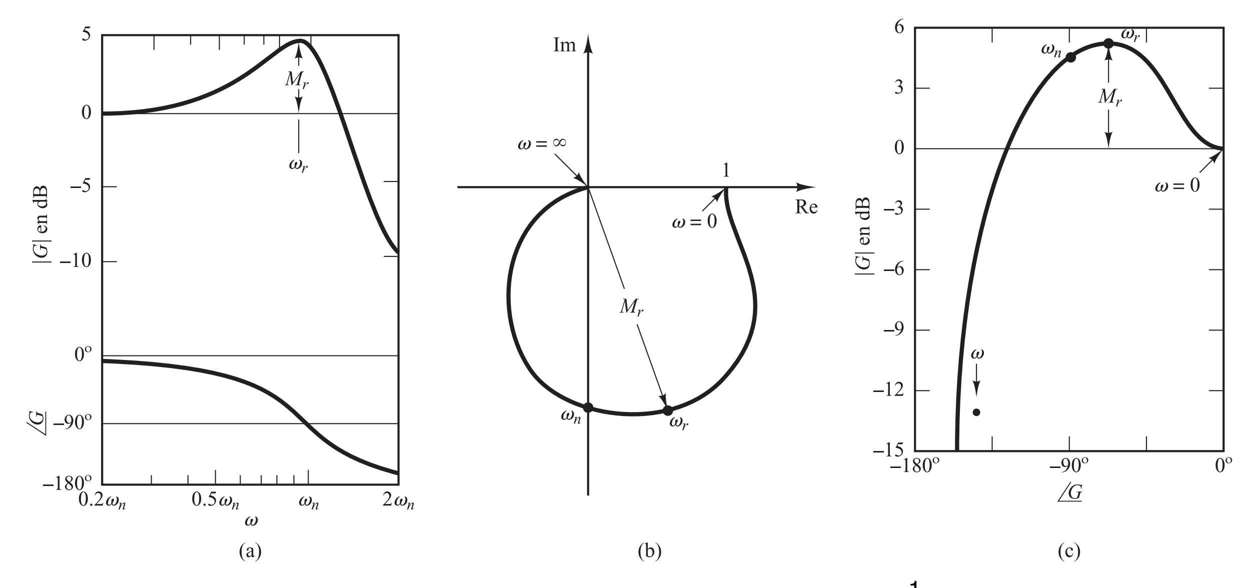


Figura 7-43. Tres representaciones de respuesta en frecuencia de $\dfrac{1}{1 + 2\zeta\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$, para $\zeta > 0$. (a) Diagramas de Bode; (b) traza polar; (c) diagrama de magnitud logarítmica con respecto a la fase.

y

$$\angle \frac{1}{G(j\omega)} = -\angle G(j\omega)$$

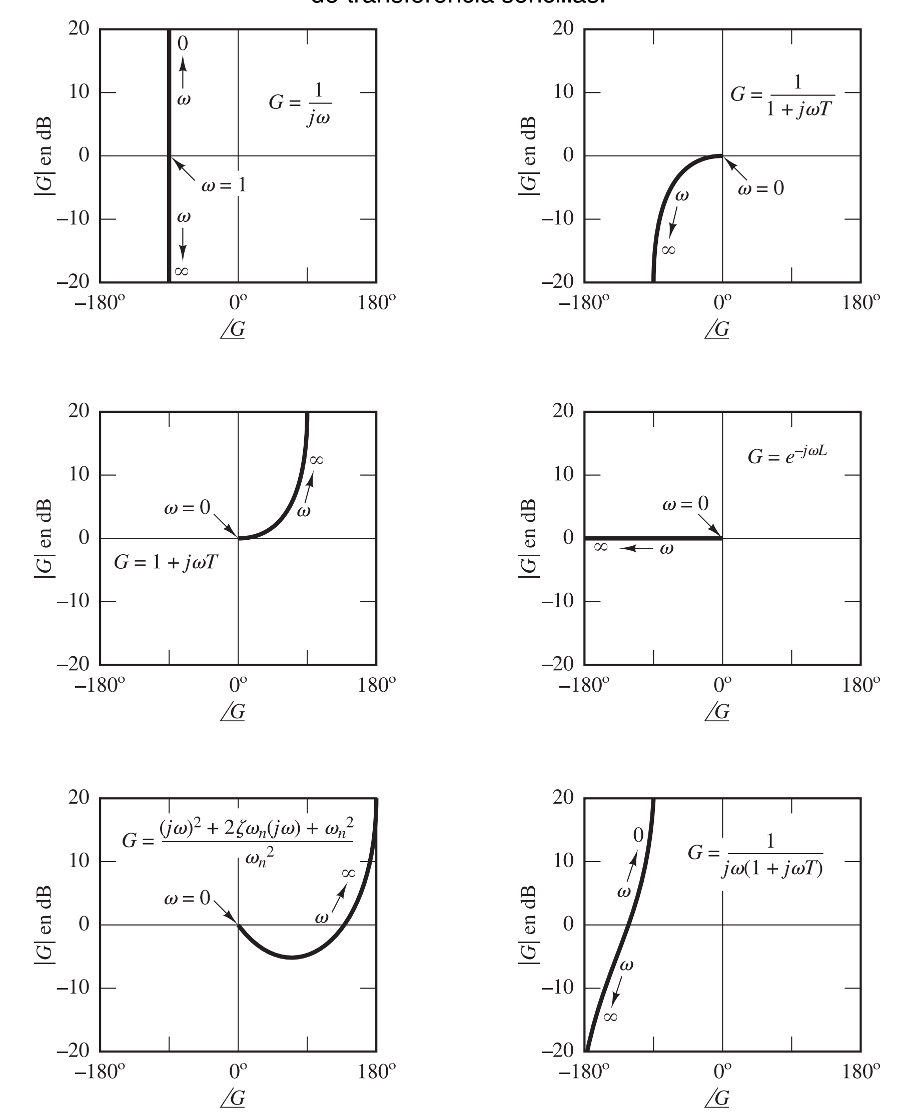
La Figura 7-43 compara las curvas de respuesta en frecuencia de

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

en tres representaciones distintas. En el diagrama de magnitud logarítmica con respecto a la fase, la distancia vertical entre los puntos $\omega = 0$ y $\omega = \omega_r$, donde ω_r es la frecuencia de resonancia, es el valor pico de $G(j\omega)$ en decibelios.

Como las características de magnitud logarítmica y de ángulo de fase de las funciones de transferencia básicas se han analizado con detalle en las Secciones 7-2 y 7-3, aquí será suficiente con proporcionar ejemplos de algunos diagramas de magnitud logarítmica con respecto a la fase. La Tabla 7-2 contiene dichos ejemplos. (Sin embargo, los diagramas de Nichols se analizarán en la Sección 7-6.)

Tabla 7-2. Diagramas de la magnitud logarítmica con respecto a la fase de funciones de transferencia sencillas.



7-5 Criterio de estabilidad de Nyquist

El criterio de estabilidad de Nyquist determina la estabilidad de un sistema en lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia en lazo abierto y los polos en lazo abierto.

Esta sección presenta el criterio de estabilidad de Nyquist y su base matemática. Considérese el sistema en lazo cerrado de la Figura 7-44. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

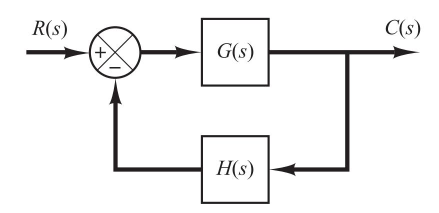


Figura 7-44. Sistema en lazo cerrado.

Para la estabilidad, todas las raíces de la ecuación característica

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

deben estar en el semiplano izquierdo del plano s. [Se debe señalar que, aunque los polos y ceros de la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ pueden estar en el semiplano derecho del plano s, el sistema sólo es estable si todos los polos de la función de transferencia en lazo cerrado (es decir, las raíces de la ecuación característica) están en el semiplano izquierdo del plano s.] El criterio de estabilidad de Nyquist relaciona la respuesta en frecuencia en lazo abierto $G(j\omega)H(j\omega)$ con el número de ceros y polos de $1 + G(s)H(s)$ que se encuentran en el semiplano derecho del plano s. Este criterio, obtenido por H. Nyquist, es útil en la ingeniería de control, debido a que permite determinar gráficamente la estabilidad absoluta del sistema en lazo cerrado a partir de las curvas de respuesta en frecuencia en lazo abierto, sin que sea necesario determinar los polos en lazo cerrado. Para el análisis de estabilidad se usan tanto las curvas de respuesta en frecuencia en lazo abierto obtenidas de forma analítica como las obtenidas de forma experimental. Esto es conveniente debido a que, al diseñar un sistema de control, a menudo se desconocen las expresiones matemáticas para algunos de los componentes y sólo se cuenta con sus datos de respuesta en frecuencia.

El criterio de estabilidad de Nyquist se basa en un teorema de la teoría de la variable compleja. Para comprenderlo, se analiza primero la transformación de los contornos en el plano complejo.

Se supone que la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ se representa como un cociente de polinomios en s. Para un sistema que puede materializarse físicamente, el grado del polinomio del denominador de la función de transferencia en lazo cerrado debe ser mayor o igual que el del polinomio del denominador. Esto significa que el límite de $G(s)H(s)$, cuando s tiende a infinito, es cero o una constante para cualquier sistema que pueda materializarse físicamente.

Estudio preliminar. La ecuación característica del sistema de la Figura 7-44 es

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

Se demostrará que para una trayectoria cerrada continua determinada en el plano s, que no pasa por ningún punto singular, le corresponde una curva cerrada en el plano $F(s)$. El número y la dirección de los rodeos del origen del plano $F(s)$ para la curva cerrada representan una función en particular importante en lo que sigue, pues después se correlacionará el número y la dirección de los encierros con la estabilidad del sistema.

Por ejemplo, considérese la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{2}{s-1}$$

La ecuación característica es

$$\begin{aligned} F(s) &= 1 + G(s)H(s) \\ &= 1 + \frac{2}{s-1} = \frac{s+1}{s-1} = 0 \end{aligned} \tag{7-15}$$

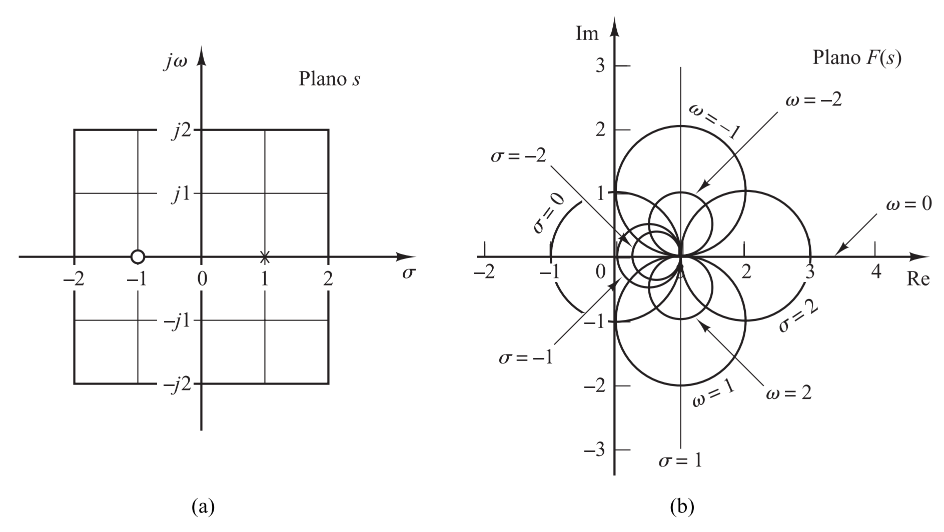


Figura 7-45. Transformación conforme de las retículas en el plano s dentro del plano $F(s)$, donde $F(s) = (s + 1)/(s - 1)$.

La función $F(s)$ es analítica[1] en todas las partes del plano s, excepto en sus puntos singulares. A cada punto de análisis en el plano s le corresponde un punto en el plano $F(s)$; por ejemplo, si $s = 2 + j1$, entonces $F(s)$ se convierte en

$$F(2 + j1) = \frac{2 + j1 + 1}{2 + j1 - 1} = 2 - j1$$

Así, el punto $s = 2 + j1$ en el plano s se transforma en el punto $2 - j1$ en el plano $F(s)$.

De esta forma, como se planteó anteriormente, para una determinada trayectoria cerrada continua en el plano s, que no pase por ningún punto singular, hay una curva cerrada en el plano $F(s)$.

Para la ecuación característica $F(s)$ de la Ecuación (7-15), la transformación conforme de las líneas $\omega = 0, \pm 1, \pm 2$ y las líneas $\sigma = 0, \pm 1, \pm 2$ [véase la Figura 7-45(a)] se convierten en círculos en el plano $F(s)$, tal y como se muestra en la Figura 7-45(b). Supóngase que el punto representativo s sigue un contorno en el plano s en el sentido de las agujas del reloj. Si el contorno en el plano s encierra el polo de $F(s)$, el lugar geométrico de $F(s)$ rodea una vez el origen del plano $F(s)$ en sentido contrario al de las agujas del reloj [véase la Figura 7-46(a)]. Si el contorno en el plano s encierra el cero de $F(s)$, el lugar geométrico de $F(s)$ rodea una vez el origen del plano $F(s)$ en el sentido de las agujas del reloj [véase la Figura 7-46(b)]. Si el contorno en el plano s encierra al cero y al polo o si no encierra ni al cero ni al polo, el lugar geométrico de $F(s)$ no rodea el origen del plano $F(s)$ [véanse las Figuras 7-46(c) y (d)].

A partir del análisis anterior, se observa que la dirección del rodeo en el origen del plano $F(s)$ depende de si el contorno en el plano s encierra un polo o un cero. Obsérvese que la localización de un polo o un cero en el plano s, ya sea en su semiplano derecho o en el semiplano izquierdo, no produce ninguna diferencia, pero el que se encierre un polo o un cero sí la genera. Si el contorno en el plano s encierra igual número de polos que de ceros, la curva cerrada correspondiente en el plano $F(s)$ no rodeará el origen del plano $F(s)$. El análisis anterior es una explicación gráfica del teorema de la transformación, que es la base del criterio de estabilidad de Nyquist.

---

[1] Se dice que una función compleja $F(s)$ es analítica en una región si $F(s)$ y todos sus derivados existen en esa región.

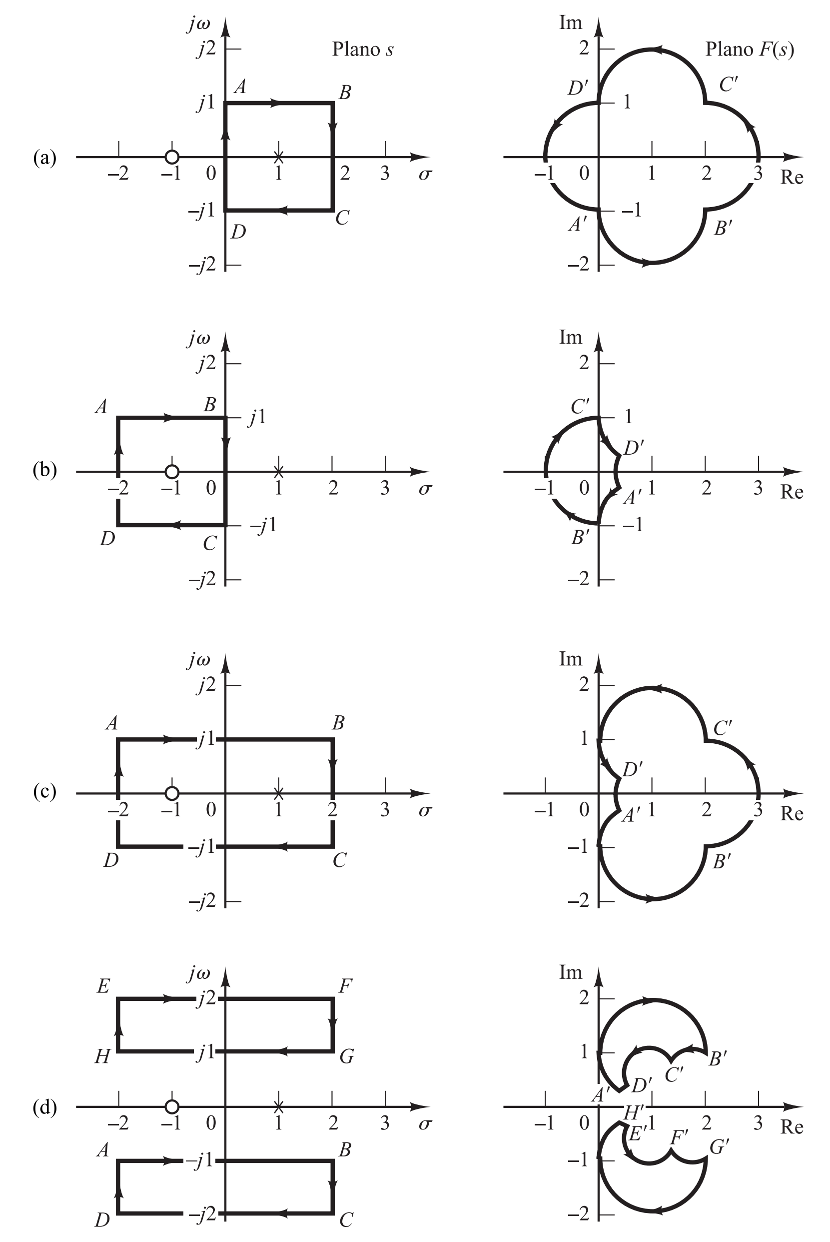


Figura 7-46. Contorno cerrado en el plano s y sus curvas cerradas correspondientes en el plano $F(s)$, donde $F(s) = (s + 1)/(s - 1)$.

Teorema de la transformación. Supóngase que $F(s)$ es el cociente de dos polinomios en s. Supóngase también que P es el número de polos y Z el número de ceros de $F(s)$ que se encuentran en cierto contorno cerrado en el plano s, considerada una multiplicidad de polos y ceros. Supóngase, por último, que este contorno es tal que no pasa a través de ningún polo ni cero de $F(s)$. Este contorno cerrado en el plano s se transforma después dentro del plano $F(s)$ como una curva cerrada. El número total N de rodeos del origen del plano $F(s)$ en el sentido de las agujas del reloj, conforme un punto representativo traza el contorno completo en el sentido de las agujas del reloj, es igual a $Z - P$. (Obsérvese que, mediante este teorema de la transformación, no se encuentra el número de ceros y de polos sino su diferencia.)

No se presentará una prueba formal de este teorema, debido a que se dejará para el Problema **A-7-6.** Obsérvese que un número positivo N indica que hay más ceros que polos en la función $F(s)$ y un número N negativo indica que hay más polos que ceros. En las aplicaciones de un sistema de control, el número P se determina con facilidad para $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ a partir de la función $G(s)H(s)$. Por tanto, si N se determina a partir de la gráfica de $F(s)$, es fácil determinar el número de ceros en el contorno cerrado en el plano s. Obsérvese que las formas exactas del contorno en el plano s y el lugar geométrico de $F(s)$ no son importantes en lo que respecta a los rodeos del origen, debido a que estos sólo dependen de que se encierren los polos y/o los ceros de $F(s)$ mediante el contorno en el plano s.

Aplicación del teorema de la transformación al análisis de la estabilidad de los sistemas en lazo cerrado. Para analizar la estabilidad de los sistemas de control lineales, se supone que el contorno cerrado en el plano s encierra todo el semiplano derecho de este. El contorno está formado por el eje $j\omega$ completo desde $\omega = -\infty$ a $+\infty$, y una trayectoria semicircular de radio infinito en el semiplano derecho del plano s. Dicho contorno se conoce como trayectoria de Nyquist. (La trayectoria se forma en el sentido de las agujas del reloj.) La trayectoria de Nyquist encierra el semiplano derecho del plano s así como todos los ceros y polos de $1 + G(s)H(s)$ que tienen partes reales positivas. [Si no hay ceros de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s, no hay polos en lazo cerrado, y el sistema es estable.] Es necesario que el contorno cerrado, o la trayectoria de Nyquist, no pase por ningún cero ni polo de $1 + G(s)H(s)$. Si $G(s)H(s)$ tiene uno o más polos en el origen del plano s, la transformación del punto $s = 0$ se vuelve indeterminada. En estos casos, se evita pasar por el origen mediante una desviación. (Más adelante se realiza un análisis detallado de este caso especial.)

Si el teorema de la transformación se aplica al caso especial en el que $F(s)$ es igual a $1 + G(s)H(s)$, se puede plantear el siguiente enunciado: si el contorno cerrado en el plano s encierra el semiplano derecho del plano s, como se muestra en la Figura 7-47, el número de ceros en el semiplano derecho del plano de la función $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ es igual al número de polos de la función $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s, más el número de rodeos del origen del plano $1 + G(s)H(s)$ en el sentido de las agujas del reloj por la curva cerrada correspondiente en este último plano.

Debido a la condición supuesta de que

$$\lim_{s \to \infty} [1 + G(s)H(s)] = \text{constante}$$

la función de $1 + G(s)H(s)$ permanece constante conforme s recorre el semicírculo de radio infinito. Por esta razón, se determina si el lugar geométrico de $1 + G(s)H(s)$ rodea el origen del plano $1 + G(s)H(s)$ considerando sólo una parte del contorno cerrado en el plano s, es decir, el eje $j\omega$.

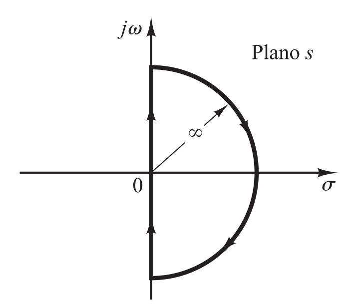


Figura 7-47. Contorno cerrado en el plano *s*.

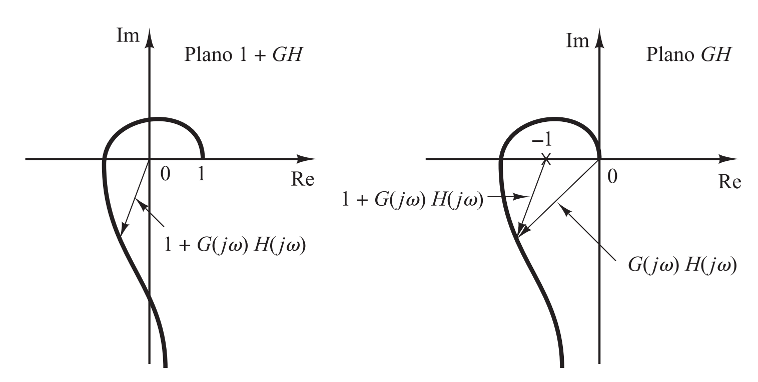


Figura 7-48. Gráficas de $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ en el plano $1 + GH$ y en el plano GH.

Rodear el origen, si llega a suceder, sólo ocurre mientras un punto representativo se mueve de $-j\infty$ a $+j\infty$ a lo largo del eje $j\omega$, siempre y cuando no se encuentren ceros ni polos sobre el eje $j\omega$.

Obsérvese que la parte del contorno $1 + G(s)H(s)$ desde $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$ es simplemente $1 + G(j\omega)H(j\omega)$. Como $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ es la suma de vectores del vector unitario y el vector $G(j\omega)H(j\omega)$, $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ es idéntico al vector dibujado del punto $-1 + j0$ al punto terminal del vector $G(j\omega)H(j\omega)$, como se muestra en la Figura 7-48. Rodear el origen mediante la gráfica de $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ equivale a rodear el punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$. Por tanto, la estabilidad del sistema en lazo cerrado se averigua examinando los rodeos del punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$. El número de rodeos en el sentido de las agujas del reloj del punto $-1 + j0$ se encuentra dibujando un vector del punto $-1 + j0$ al lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$, a partir de $\omega = -\infty$, pasando por $\omega = 0$ y hasta llegar a $\omega = +\infty$ o bien contando el número de rotaciones en el sentido de las agujas del reloj del vector.

Es sencillo dibujar $G(j\omega)H(j\omega)$ para la trayectoria de Nyquist. La transformación del eje $j\omega$ negativo es la imagen reflejada de la transformación del eje $j\omega$ positivo con respecto al eje real. Es decir, la gráfica de $G(j\omega)H(j\omega)$ y la gráfica de $G(-j\omega)H(-j\omega)$ son simétricas con respecto al eje real. El semicírculo con radio infinito se transforma en el origen del plano GH o en un punto del eje real del plano GH.

En el análisis anterior, se ha supuesto que $G(s)H(s)$ es el cociente de dos polinomios en s. Por tanto, el retardo de transporte e^{-Ts} se ha excluido del análisis. Sin embargo, obsérvese que un análisis similar es aplicable para los sistemas con un retardo de transporte, aunque aquí no se ha aportado una prueba de esto. La estabilidad de un sistema con retardo de transporte se determina a partir de las curvas de respuesta en frecuencia en lazo abierto examinando el número de rodeos en el punto $-1 + j0$, al igual que en el caso de un sistema cuya función de transferencia en lazo abierto es un cociente de dos polinomios en s.

Criterio de estabilidad de Nyquist. El análisis anterior, en el que se utilizaron los rodeos del punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$, se resume en el siguiente criterio de estabilidad de Nyquist:

Criterio de estabilidad de Nyquist [*para un caso especial cuando $G(s)H(s)$ no tiene polos ni ceros sobre el eje $j\omega$*]: en el sistema de la Figura 7-44, si la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ tiene k polos en el semiplano derecho del plano s y $\lim_{s\to\infty} G(s)H(s) =$ constante, para la estabilidad, el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$, conforme ω varía de $-\infty$ a ∞, debe rodear k veces el punto $-1 + j0$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Observaciones sobre el criterio de estabilidad de Nyquist

1. Este criterio se expresa como

$$Z = N + P$$

donde Z = número de ceros de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s
N = número de rodeos en el sentido de las agujas del reloj del punto $-1 + j0$
P = número de polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s

Si P no es cero, para un sistema de control estable, se debe tener $Z = 0$ o $N = -P$, lo cual significa que se deben tener P rodeos del punto $-1 + j0$ en el sentido de las agujas del reloj.

Si $G(s)H(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho del plano s, entonces $Z = N$. Por tanto, para la estabilidad no se debe rodear el punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$. En este caso, no es necesario considerar el lugar geométrico para el eje $j\omega$ completo, sino sólo para la parte de frecuencia positiva. La estabilidad de este sistema se determina observando si el punto $-1 + j0$ se rodea mediante el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)H(j\omega)$. La región encerrada mediante el diagrama de Nyquist aparece en la Figura 7-49. Para la estabilidad, el punto $-1 + j0$ debe encontrarse fuera de la región sombreada.

2. Debe tenerse cuidado en el momento de probar la estabilidad de sistemas multilazo, debido a que pueden incluir polos en el semiplano derecho del plano s. (Obsérvese que, aunque un lazo interno puede ser inestable, el sistema en lazo cerrado completo se estabiliza mediante un diseño adecuado.) Una simple revisión de los rodeos del punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$ no es suficiente para detectar la inestabilidad en los sistemas multilazo. Sin embargo, en tales casos, si un polo de $1 + G(s)H(s)$ está en el semiplano derecho del plano s, se determina con facilidad aplicando el criterio de estabilidad de Routh al denominador de $G(s)H(s)$.

Si se incluyen en $G(s)H(s)$ funciones trascendentes, tales como el retardo de transporte e^{-Ts}, deben aproximarse mediante una expansión en serie antes de aplicar el criterio de estabilidad de Routh.

3. Si el lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$ pasa por el punto $-1 + j0$, entonces los ceros de la ecuación característica, o los polos en lazo cerrado, se localizan sobre el eje $j\omega$. Esto no es conveniente para sistemas de control prácticos. Para un sistema en lazo cerrado bien diseñado, ninguna de las raíces de la ecuación característica debe encontrarse sobre el eje $j\omega$.

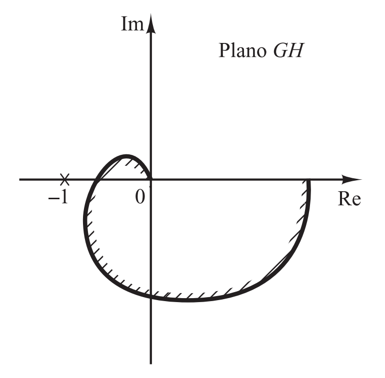


Figura 7-49. Región encerrada mediante un diagrama de Nyquist.

Caso especial cuando $G(s)H(s)$ tiene polos y/o ceros sobre el eje $j\omega$. En el análisis anterior, se supuso que la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ no tenía polos ni ceros en el origen. Ahora se considera el caso en el que $G(s)H(s)$ contiene polos y/o ceros sobre el eje $j\omega$.

Debido a que el diagrama de Nyquist no debe pasar por polos o ceros de $G(s)H(s)$, si la función $G(s)H(s)$ tiene polos o ceros en el origen (o sobre el eje $j\omega$ para puntos diferentes del origen), debe modificarse el contorno en el plano s. La forma usual de modificar el contorno cerca del origen es mediante un semicírculo de radio infinitesimal ε, como se aprecia en la Figura 7-50. [Obsérvese que este semicírculo puede encontrarse en el semiplano derecho o en el semiplano izquierdo del plano s. Aquí se considera el semicírculo del semiplano derecho del plano s.] Un punto representativo se mueve a lo largo del eje $j\omega$ negativo desde $-j\infty$ a $j0-$. Desde $s = j0-$ a $s = j0+$, el punto se mueve a lo largo del semicírculo de radio ε (donde $\varepsilon \ll 1$), y después se mueve a lo largo del eje $j\omega$ positivo desde $j0+$ a $j\infty$. A partir de $s = j\infty$, el contorno sigue un semicírculo con radio infinito y el punto representativo regresa al punto inicial, $s = -j\infty$. El área que evita el contorno cerrado modificado es muy pequeña y tiende a cero conforme el radio ε tiende a cero. Por tanto, todos los polos y ceros en el semiplano derecho del plano s, si existen, están rodeados por este contorno.

Considérese, por ejemplo, un sistema en lazo cerrado cuya función de transferencia en lazo abierto se obtiene mediante

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

Los puntos correspondientes a $s = j0+$ y $s = j0-$ en el lugar geométrico de $G(s)H(s)$ en el plano $G(s)H(s)$ son $-j\infty$ y $j\infty$, respectivamente. En la trayectoria semicircular con radio ε (donde $\varepsilon \ll 1$), la variable compleja s se escribe

$$s = \varepsilon e^{j\theta}$$

donde θ varía de -90° a $+90^{\circ}$. A continuación, $G(s)H(s)$ se convierte en

$$G(\varepsilon e^{j\theta})H(\varepsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta}} = \frac{K}{\varepsilon}\, e^{-j\theta}$$

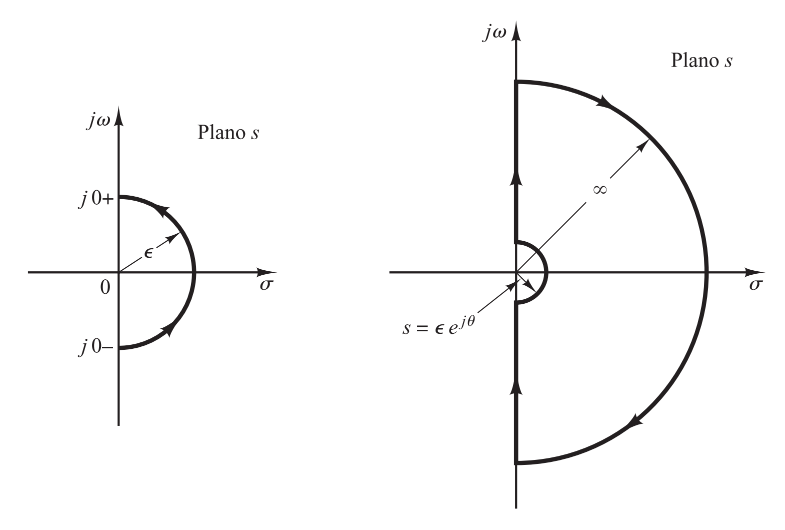


Figura 7-50. Contorno cerrado en el plano s y contorno cerrado en el plano s evitando los polos y los ceros en el origen.

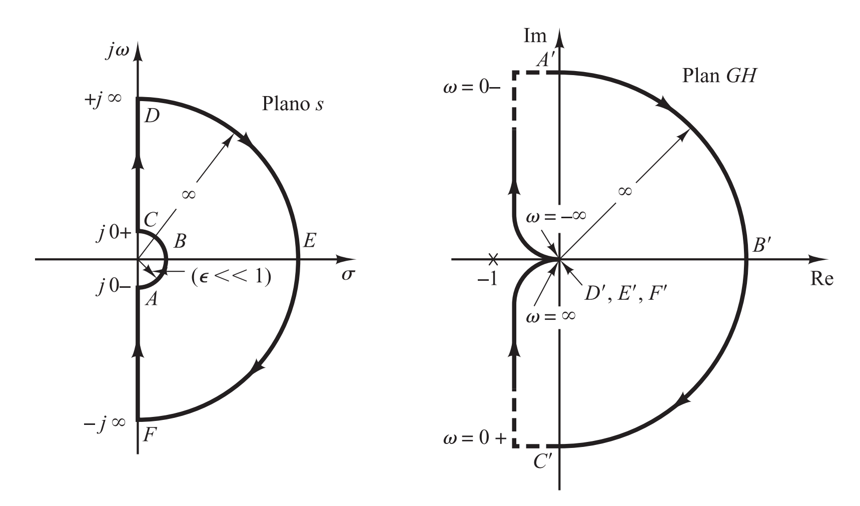


Figura 7-51. Contorno en el plano *s* y lugar geométrico $G(s)H(s)$ en el plano *GH*, donde $G(s)H(s) = K/[s(Ts + 1)]$.

El valor K/ε tiende a infinito conforme ε tiende a cero, y $-\theta$ varía de 90º a -90º cuando un punto representativo *s* se mueve a lo largo del semicírculo. Por tanto, los puntos $G(j0-)H(j0-) = j\infty$ y $G(j0+)H(j0+) = -j\infty$ se unen mediante un semicírculo de radio infinito en el semiplano derecho del plano *GH*. La desviación semicircular infinitesimal alrededor del origen se transforma dentro del plano *GH* como un semicírculo de radio infinito. La Figura 7-51 muestra el contorno en el plano *s* y el lugar geométrico $G(s)H(s)$ en el plano *GH*. Los puntos *A*, *B* y *C* en el contorno del plano *s* se transforman en los puntos respectivos A', B' y C' en el lugar geométrico $G(s)H(s)$. Como se observa en la Figura 7-51, los puntos *D*, *E* y *F* en el semicírculo de radio infinito en el plano *s* se transforman dentro del origen del plano *GH*. Debido a que no hay un polo en el semiplano derecho del plano *s* y el lugar geométrico $G(s)H(s)$ no rodea el punto $-1 + j0$, no hay ceros de la función $1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano *s*. Por tanto, el sistema es estable.

Para una función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ que contiene un factor $1/s^n$ (donde $n = 2, 3, ...$), la gráfica de $G(s)H(s)$ tiene *n* semicírculos en el sentido de las agujas del reloj de radio infinito con respecto al origen, conforme un punto representativo *s* se mueve a lo largo del semicírculo de radio ε (donde $\varepsilon \ll 1$). Por ejemplo, considérese la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(Ts + 1)}$$

Así,

$$\lim_{s \to \varepsilon e^{j\theta}} G(s)H(s) = \frac{K}{\varepsilon^2 e^{2j\theta}} = \frac{K}{\varepsilon^2} e^{-2j\theta}$$

Conforme θ varía de -90º a 90º en el plano *s*, el ángulo de $G(s)H(s)$ varía de 180º a -180º, como muestra la Figura 7-52. Como no hay un polo en el semiplano derecho del plano *s* y el lugar geométrico rodea el punto $-1 + j0$ dos veces en el sentido de las agujas del reloj para cualquier valor positivo de *K*, hay dos ceros de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano *s*. Por tanto, este sistema siempre es inestable.

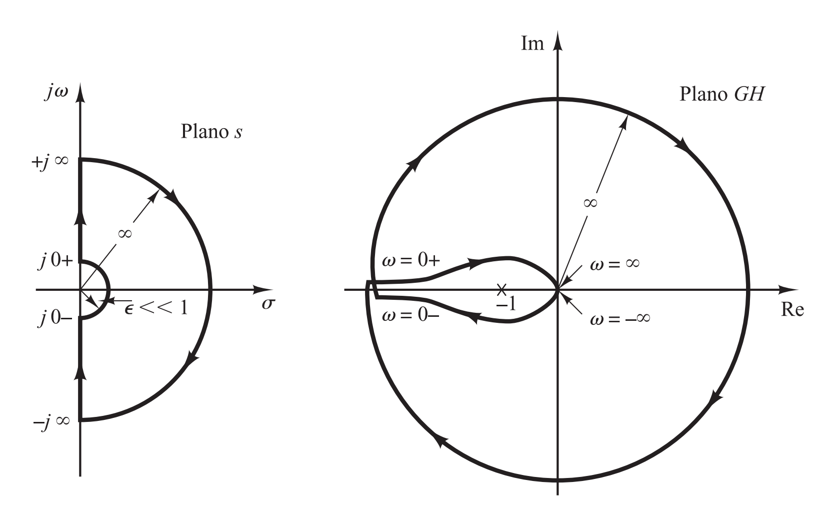


Figura 7-52. Contorno en el plano s y lugar geométrico $G(s)H(s)$ en el plano GH, donde $G(s)H(s) = K/[s^2(Ts + 1)]$.

Obsérvese que puede hacerse un análisis similar si $G(s)H(s)$ contiene polos y/o ceros sobre el eje $j\omega$. El criterio de estabilidad de Nyquist se generaliza ahora del modo siguiente:

Criterio de estabilidad de Nyquist [*para un caso general cuando $G(s)H(s)$ tiene polos y/o ceros sobre el eje $j\omega$*]: en el sistema de la Figura 7-44, si la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ tiene k polos en el semiplano derecho del plano s, para ser estable, el lugar geométrico $G(s)H(s)$ debe rodear k veces el punto $-1 + j0$ en sentido contrario al de las agujas del reloj, conforme un punto representativo s se traza en la trayectoria de Nyquist modificada en el sentido de las agujas del reloj.

7-6 Análisis de estabilidad

En esta sección se presentan varios ejemplos del análisis de estabilidad de los sistemas de control mediante el criterio de estabilidad de Nyquist.

Si la trayectoria de Nyquist en el plano s encierra Z ceros y P polos de $1 + G(s)H(s)$ y no pasa por los polos ni los ceros de $1 + G(s)H(s)$ conforme un punto representativo s se mueve en el sentido de las agujas del reloj a lo largo de la trayectoria de Nyquist, el contorno correspondiente en el plano $G(s)H(s)$ rodea en un círculo $N = Z - P$ veces el punto $-1 + j0$ en el sentido de las agujas del reloj. (Los valores negativos de N implican rodeos en sentido contrario al de las agujas del reloj.)

Al examinar la estabilidad de los sistemas de control lineales mediante el criterio de estabilidad de Nyquist, se observa que se pueden presentar tres casos.

1. El punto $-1 + j0$ no está rodeado. Esto implica que el sistema es estable si no hay polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s; de lo contrario, el sistema es inestable.
2. El punto $-1 + j0$ queda rodeado una o varias veces en sentido contrario al de las agujas del reloj. En este caso, el sistema es estable si el número de rodeos en sentido contrario al de las agujas del reloj es igual al número de polos $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s; de lo contrario, el sistema es inestable.
3. El punto $-1 + j0$ queda rodeado una o varias veces en el sentido de las agujas del reloj. En este caso el sistema es inestable.

En los ejemplos siguientes, se supone que todos los valores de la ganancia K y las constantes de tiempo (tales como T, T_1 y T_2) son positivos.

EJEMPLO 7-14 Considere un sistema en lazo cerrado cuya función de transferencia en lazo abierto se obtiene mediante

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Examine la estabilidad del sistema.

La Figura 7-53 contiene un diagrama de $G(j\omega)H(j\omega)$. Debido a que $G(s)H(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho del plano s y el punto $-1 + j0$ no está rodeado por el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$, este sistema es estable para cualquier valor positivo de K, T_1 y T_2.

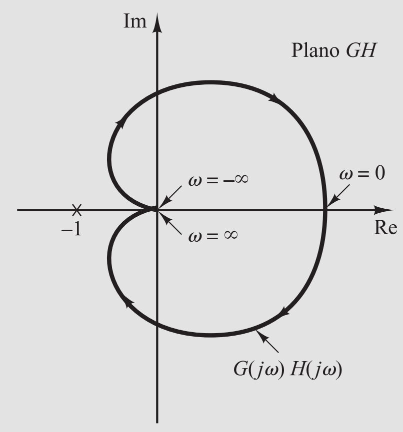


Figura 7-53. Diagrama polar de $G(j\omega)H(j\omega)$ considerado en el Ejemplo 7-14.

EJEMPLO 7-15 Considere el sistema con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Determine la estabilidad del sistema para dos casos: (1) la ganancia K es pequeña, y (2) K es grande.

Los diagramas de Nyquist de la función de transferencia en lazo abierto para un valor pequeño de K y un valor grande de K se muestran en la Figura 7-54. El número de polos de $G(s)H(s)$ en

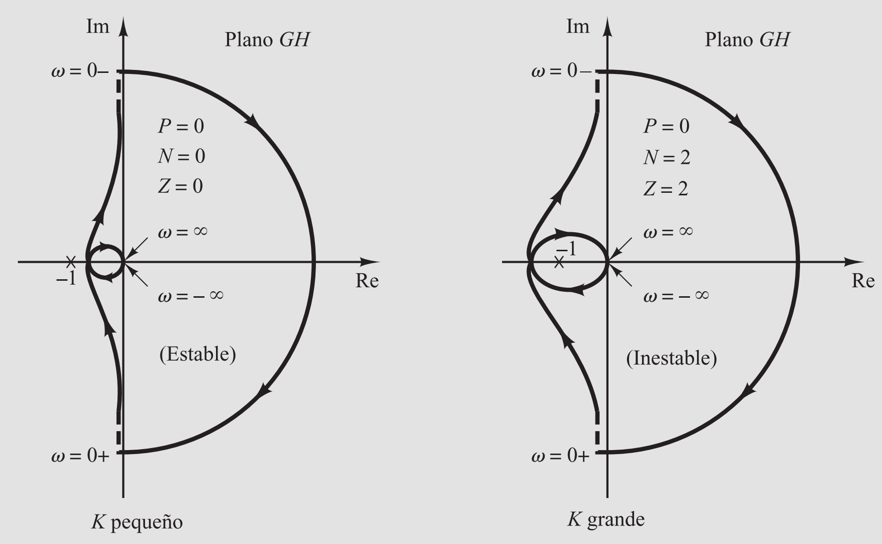


Figura 7-54. Diagramas polares del sistema considerado en el Ejemplo 7-15.

el semiplano derecho del plano s es cero. Por tanto, para que este sistema sea estable, es necesario que $N = Z = 0$ o que el lugar geométrico $G(s)H(s)$ no rodee al punto $-1 + j0$.

Para valores pequeños de K, el punto $-1 + j0$ no queda rodeado. Por tanto, este sistema es estable para valores pequeños de K. Para valores grandes de K, el lugar geométrico de $G(s)H(s)$ rodea el punto $-1 + j0$ dos veces en el sentido de las agujas del reloj, lo que indica que hay dos polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s y que el sistema es inestable. (Para lograr una buena precisión, K debe ser grande. Sin embargo, desde el punto de vista de la estabilidad, un valor grande de K provoca una estabilidad deficiente o incluso la inestabilidad. Para obtener un equilibrio entre la precisión y la estabilidad, es necesario incluir una red de compensación en el sistema. Las técnicas de compensación en el dominio de la frecuencia se analizan en las Secciones 7-11 a 7-13.)

EJEMPLO 7-16 La estabilidad de un sistema en lazo cerrado con la siguiente función de transferencia en lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$$

depende de las magnitudes relativas de T_1 y T_2. Dibuje los diagramas de Nyquist y determine la estabilidad del sistema.

La Figura 7-55 contiene las gráficas del lugar geométrico $G(s)H(s)$ para tres casos, $T_1 < T_2$, $T_1 = T_2$ y $T_1 > T_2$. Para $T_1 < T_2$, el lugar geométrico de $G(s)H(s)$ no rodea el punto $-1 + j0$ y el sistema en lazo cerrado es estable. Para $T_1 = T_2$, el lugar geométrico $G(s)H(s)$ pasa por el punto $-1 + j0$, lo cual indica que hay polos de lazo cerrado sobre el eje $j\omega$. Para $T_1 > T_2$, el lugar geométrico de $G(s)H(s)$ rodea en un círculo al punto $-1 + j0$ dos veces en el sentido de las agujas del reloj. Por tanto, el sistema en lazo cerrado tiene dos polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s y el sistema es inestable.

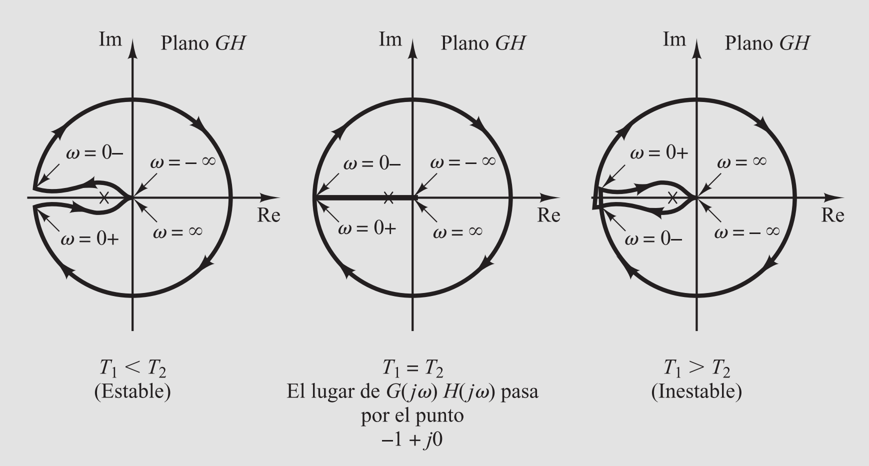


Figura 7-55. Diagramas polares del sistema considerado en el Ejemplo 7-16.

EJEMPLO 7-17 Considere el sistema en lazo cerrado que tiene la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts - 1)}$$

Determine la estabilidad del sistema.

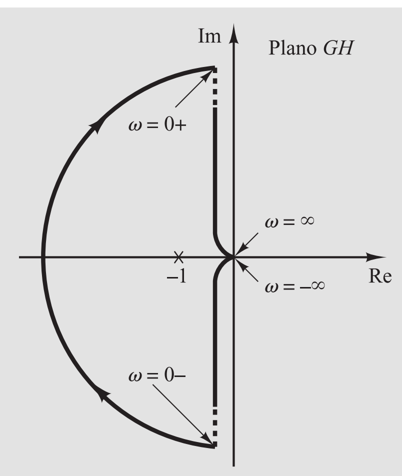


Figura 7-56. Diagrama polar del sistema considerado en el Ejemplo 7-17.

La función $G(s)H(s)$ tiene un polo ($s = 1/T$) un el semiplano derecho del plano s. Por tanto, $P = 1$. El diagrama de Nyquist de la Figura 7-56 indica que el diagrama $G(s)H(s)$ rodea al punto $-1 + j0$ una vez en el sentido de las agujas del reloj. Por tanto, $N = 1$. Debido a que $Z = N + P$, se obtiene que $Z = 2$. Esto significa que el sistema en lazo cerrado tiene dos polos en lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s y que es inestable.

EJEMPLO 7-18 Investigue la estabilidad de un sistema en lazo cerrado con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)} \qquad (K > 1)$$

La función de transferencia en lazo abierto tiene un polo ($s = 1$) en el semiplano derecho del plano s, o P = 1. El sistema en lazo abierto es inestable. El diagrama de Nyquist de la Figura 7-57 indica que el lugar geométrico $G(s)H(s)$ rodea al punto $-1 + j0$ una vez en sentido contrario al de las agujas del reloj. Por tanto, $N = -1$. Así, se obtiene que Z es cero a partir de que $Z = N + P$, lo cual indica que no hay un cero de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s y que el sistema en lazo cerrado es estable. Este es uno de los ejemplos para los cuales un sistema en lazo abierto se vuelve estable cuando se cierra el lazo.

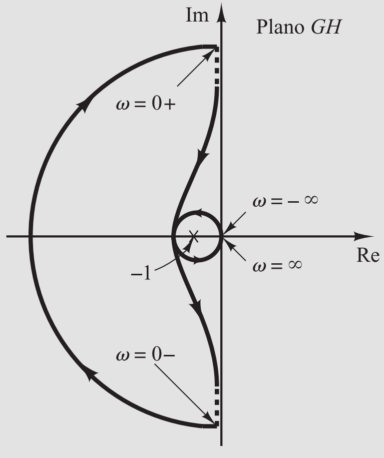


Figura 7-57. Diagrama polar del sistema considerado en el Ejemplo 7-18.

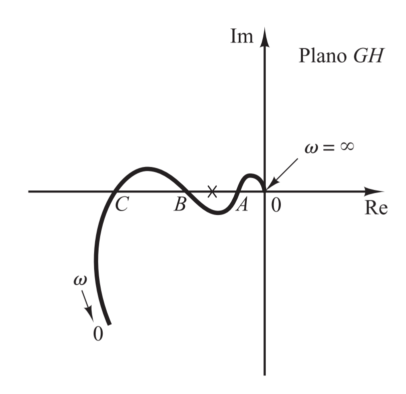


Figura 7-58. Diagrama polar de un sistema condicionalmente estable.

Sistemas condicionalmente estables. La Figura 7-58 muestra un ejemplo de un lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$ para el cual el sistema en lazo cerrado se vuelve inestable cuando se varía la ganancia en lazo abierto. Si el incremento de la ganancia en lazo abierto es suficiente, el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$ rodea al punto $-1 + j0$ dos veces, y el sistema se vuelve inestable. Si la ganancia en lazo abierto disminuye lo suficiente, una vez más el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$ rodea al punto $-1 + j0$ dos veces. Para una operación estable del sistema considerado aquí, el punto crítico $-1 + j0$ no debe aparecer en las regiones comprendidas entre *OA* y *BC* en la Figura 7-58. Un sistema que sólo es estable para rangos limitados del valor de la ganancia en lazo abierto tales que el punto $-1 + j0$ está completamente fuera del lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$ es condicionalmente estable.

Un sistema condicionalmente estable es estable para el valor de la ganancia en lazo abierto que se encuentra entre valores críticos, y es inestable si la ganancia en lazo abierto se incrementa o disminuye de forma suficiente. Un sistema semejante se vuelve inestable cuando las señales de entrada son grandes, debido a que una señal grande puede provocar una saturación, y esta, a su vez, reduce la ganancia en lazo abierto del sistema. Es aconsejable evitar una situación como esta.

Sistema multilazo. Considérese el sistema de la Figura 7-59. Se trata de un sistema multilazo. El lazo interno tiene la función de transferencia

$$G(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)H_2(s)}$$

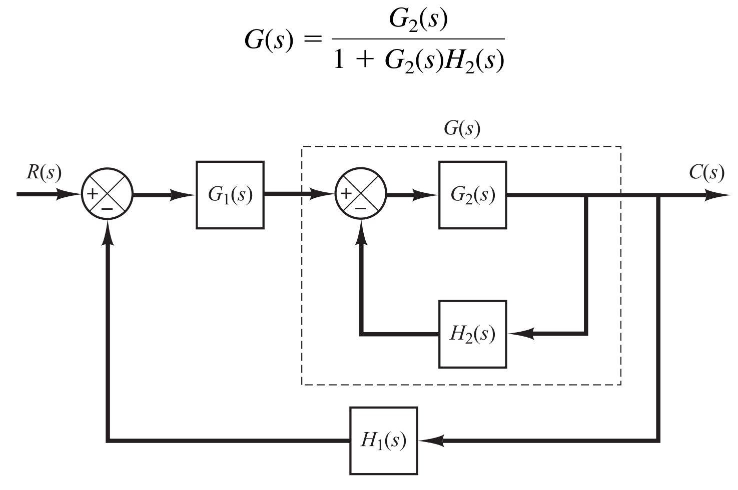


Figura 7-59. Sistema multilazo.

Si $G(s)$ es inestable, los efectos de la inestabilidad generan uno o más polos en el semiplano derecho del plano s. Entonces, la ecuación característica del lazo interno, $1 + G_2(s)H_2(s) = 0$, tiene uno o más ceros en esta parte del plano. Si $G_2(s)$ y $H_2(s)$ tienen P_1 polos aquí, el número Z_1 de ceros en el semiplano derecho del plano de $1 + G_2(s)H_2(s)$ se encuentra a partir de $Z_1 = N_1 + P_1$, donde N_1 es el número de rodeos en el sentido de las agujas del reloj del punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico $G_2(s)H_2(s)$. Debido a que la función de transferencia en lazo abierto de todo el sistema se obtiene mediante $G_1(s)G(s)H_1(s)$, la estabilidad de este sistema en lazo cerrado se encuentra a partir del diagrama de Nyquist de $G_1(s)G(s)H_1(s)$ y el conocimiento de los polos del semiplano derecho del plano de $G_1(s)G(s)H_1(s)$.

Obsérvese que, si se elimina un lazo de realimentación por medio de reducciones de un diagrama de bloques, existe una posibilidad de que se introduzcan polos inestables; si se elimina la rama del camino directo por medio de reducciones del diagrama de bloques, existe una posibilidad de que se introduzcan ceros en el semiplano derecho del plano. Por tanto, se deben considerar todos los polos y ceros en el semiplano derecho del plano conforme aparecen las reducciones de lazos subsidiarios. Este conocimiento es necesario para determinar la estabilidad de sistemas multilazo.

EJEMPLO 7-19 Considere el sistema de control de la Figura 7-60. El sistema contiene dos lazos. Determine el rango de la ganancia K para la estabilidad del sistema mediante el criterio de estabilidad de Nyquist. (La ganancia K es positiva.)

Para examinar la estabilidad del sistema de control, se necesita dibujar el lugar geométrico de Nyquist de $G(s)$, donde

$$G(s) = G_1(s)G_2(S)$$

Sin embargo, no se conocen los polos de $G(s)$ en este punto. Por tanto, si hay polos en el semiplano derecho del plano s es necesario examinar el lazo interior. Esto se hace fácilmente con el criterio de estabilidad de Routh. Como

$$G_2(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 1}$$

la matriz de Routh queda

$$\begin{array}{lrr} s^3 & 1 & 0 \\ s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & -1 & 0 \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

Observe que hay dos cambios de signo en la primera columna. Por tanto, existen dos polos de $G_2(s)$ en el semiplano derecho del plano s.

Una vez que se encuentra el número de polos del semiplano derecho del plano s de $G_2(s)$, se procede a dibujar el lugar geométrico de Nyquist de $G(s)$, donde

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{K(s + 0.5)}{s^3 + s^2 + 1}$$

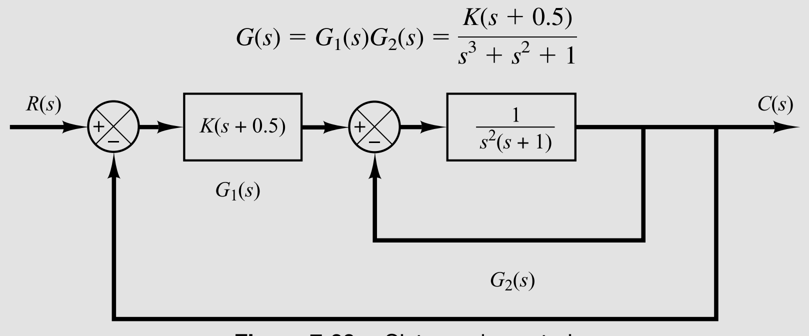


Figura 7-60. Sistema de control.

El problema es determinar el rango de la ganancia K para la estabilidad. Por tanto, no se dibujan los lugares geométricos de Nyquist de $G(j\omega)$ para diversos valores de K, sino que se dibuja el lugar geométrico de Nyquist de $G(j\omega)/K$. La Figura 7-61 muestra el diagrama de Nyquist o el diagrama polar de $G(j\omega)/K$.

Debido a que $G(s)$ tiene dos polos en el semiplano derecho del plano s, se tiene que $P = 2$. Considerando que

$$Z = N + P$$

para la estabilidad se requiere que $Z = 0$ o que $N = -2$. Es decir, el lugar geométrico de Nyquist de $G(j\omega)$ debe rodear al punto $-1 + j0$ dos veces en sentido contrario al de las agujas del reloj. En la Figura 7-61 se observa que, si el punto crítico se encuentra entre 0 y -0.5, el lugar geométrico $G(j\omega)/K$ rodea el punto crítico dos veces en sentido contrario al de las agujas del reloj. Por tanto, se requiere que

$$-0.5K < -1$$

El rango de la ganancia K para la estabilidad es

$$2 < K$$

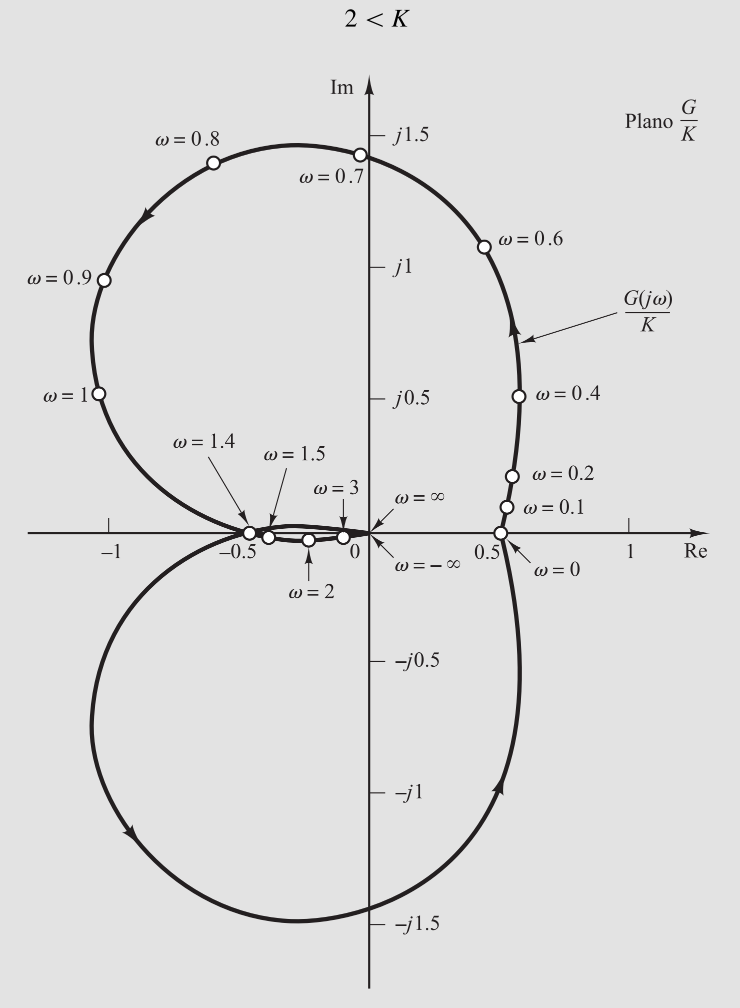


Figura 7-61. Diagrama polar de $G(j\omega)/K$.

El criterio de estabilidad de Nyquist aplicado a los diagramas polares inversos. En los análisis anteriores, se aplicó el criterio de estabilidad de Nyquist a los diagramas polares de la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$.

Al analizar los sistemas multilazo, en ocasiones se usa la función de transferencia inversa para permitir análisis gráficos; esto evita gran parte del cálculo numérico. (El criterio de estabilidad de Nyquist también es adecuado para los diagramas polares inversos, para los cuales la obtención matemática del criterio de estabilidad de Nyquist es igual al que se hace para los diagramas polares directos.)

El diagrama polar inverso de $G(j\omega)H(j\omega)$ es un diagrama de $1/[G(j\omega)H(j\omega)]$ como una función de ω. Por ejemplo, si $G(j\omega)H(j\omega)$ es

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}$$

entonces,

$$\frac{1}{G(j\omega)H(j\omega)} = \frac{1}{j\omega T} + 1$$

El diagrama polar inverso para $\omega \geqslant 0$ es la mitad inferior de la línea vertical que empieza en el punto (1, 0) sobre el eje real.

El criterio de estabilidad de Nyquist aplicado a los diagramas inversos se plantea del modo siguiente. Para que un sistema en lazo cerrado sea estable, el rodeo, si existe, del punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico $1/[G(s)H(s)]$ (conforme s se mueve a lo largo de la trayectoria de Nyquist) debe ser en sentido contrario al de las agujas del reloj y el número de veces que queda rodeado debe ser igual al número de polos de $1/[G(s)H(s)]$ [es decir, de ceros de $G(s)H(s)$] que se encuentran en el semiplano derecho del plano s. [El número de ceros de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s se determina mediante el criterio de estabilidad de Routh.] Si la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ no tiene ceros en el semiplano derecho del plano s, y con el fin de que el sistema en lazo cerrado sea estable, el número de rodeos del punto $-1 + j0$ por el lugar geométrico $1/[G(s)H(s)]$ debe ser cero.

Obsérvese que, aunque el criterio de estabilidad de Nyquist se puede aplicar a los diagramas polares inversos, si se incorporan datos experimentales de la respuesta en frecuencia, puede ser difícil contar el número de rodeos del lugar geométrico $1/[G(s)H(s)]$, debido a que es difícil medir el cambio de fase correspondiente a la trayectoria semicircular infinita en el plano s. Por ejemplo, si la función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ implica un retardo de transporte tal que

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-j\omega L}}{s(Ts + 1)}$$

entonces la cantidad de rodeos del punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico $1/[G(s)H(s)]$ se vuelve infinita y no es posible aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist al diagrama polar inverso de tal función de transferencia en lazo abierto.

En general, si los datos experimentales de la respuesta en frecuencia no pueden expresarse de forma analítica, deben dibujarse los lugares geométricos $G(j\omega)H(j\omega)$ y $1/[G(j\omega)H(j\omega)]$, además de determinarse el número de ceros de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s. Es más difícil determinar los ceros de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s (en otras palabras, determinar si un componente específico es de fase mínima) que determinar los polos de $G(s)H(s)$ en la misma parte del plano (en otras palabras, determinar si el componente es estable).

Dependiendo de si los datos son gráficos o analíticos y de si se incluyen componentes de fase no mínima, debe usarse una prueba de estabilidad apropiada para sistemas multilazo. Si los datos se proporcionan de forma analítica, o si se conocen expresiones matemáticas para todos los componentes, la aplicación del criterio de estabilidad de Nyquist para diagramas polares inversos no presenta dificultades y es posible analizar y diseñar los sistemas multilazo en el plano *GH* inverso. (Véase el Problema **A-7-15**.)

7-7 Análisis de estabilidad relativa

Estabilidad relativa. Al diseñar un sistema de control, es necesario que sea estable. Además, es necesario que tenga una estabilidad relativa adecuada. En esta sección se demostrará que el diagrama de Nyquist no sólo indica si un sistema es estable, sino también el grado de estabilidad de un sistema estable. El diagrama de Nyquist también proporciona información acerca de cómo mejorar la estabilidad, si se necesita.

En el análisis siguiente se supone que los sistemas considerados tienen realimentación unitaria. Obsérvese que siempre es posible reducir un sistema con elementos de realimentación a un sistema con realimentación unitaria, como se aprecia en la Figura 7-62. Por tanto, el análisis de la estabilidad relativa de un sistema con realimentación unitaria puede extenderse a los sistemas con realimentación no unitaria.

También se supone, a menos que se mencione lo contrario, que los sistemas son de fase mínima; es decir, que la función de transferencia de lazo abierto $G(s)$ no tiene polos ni ceros en el semiplano derecho del plano s.

Análisis de la estabilidad relativa mediante una transformación conforme. Uno de los problemas importantes al analizar un sistema de control es encontrar todos los polos en lazo cerrado, o al menos los más cercanos al eje $j\omega$ (o el par de polos dominantes en lazo cerrado). Si se conocen las características de la respuesta en frecuencia en lazo abierto de un sistema, es posible encontrar los polos en lazo cerrado más cercanos al eje $j\omega$. Obsérvese que el lugar geométrico de Nyquist $G(j\omega)$ no necesita ser una función de ω analíticamente conocida. El lugar geométrico de Nyquist completo se obtiene experimentalmente. La técnica que se va a presentar aquí es esencialmente gráfica y se basa en una transformación conforme del plano s dentro del plano $G(s)$.

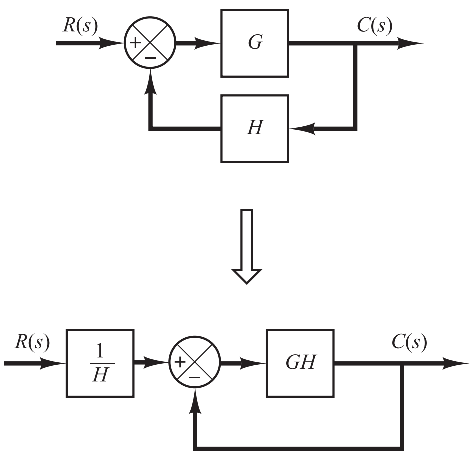


Figura 7-62. Modificación de un sistema con elementos de realimentación a un sistema con realimentación unitaria.

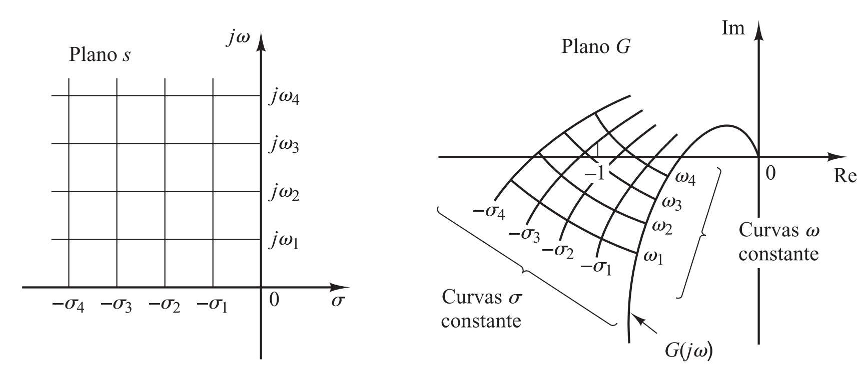


Figura 7-63. Transformación conforme de las retículas del plano s dentro del plano $G(s)$.

Considérese la transformación conforme de las líneas con σ constante (las líneas $s = \sigma + j\omega$, donde σ es una constante y ω varía) y las líneas de ω constante (las líneas $s = \sigma + j\omega$, donde ω es una constante y σ varía) en el plano s. La línea $\sigma = 0$ (eje $j\omega$) en el plano s se transforma dentro del diagrama de Nyquist en el plano $G(s)$. Las líneas de σ constante en el plano s se transforman en las curvas similares en el diagrama de Nyquist y son en un sentido paralelas al diagrama de Nyquist, como se observa en la Figura 7-63. Las líneas de ω constante en el plano s se transforman en las curvas, como se muestra también en la citada figura.

Aunque la forma de los lugares geométricos de σ constante y de ω constante en el plano $G(s)$ y la proximidad del lugar geométrico $G(j\omega)$ al punto $-1 + j0$ depende de un $G(s)$ específico, la proximidad del lugar geométrico $G(j\omega)$ al punto $-1 + j0$ es un indicio de la estabilidad relativa de un sistema estable. En general, se puede esperar que, cuanto más cerca esté el lugar geométrico $G(j\omega)$ del punto $-1 + j0$, más grande será la sobreelongación máxima en la respuesta transitoria a un escalón y más tiempo necesitará esta para amortiguarse.

Considérense los dos sistemas de las Figuras 7-64(a) y (b). (En la Figura 7-64, las $\times$ indican los polos en lazo cerrado.) El sistema (a) es obviamente más estable que el sistema (b), porque los polos en lazo cerrado del sistema (a) se localizan más a la izquierda que los del sistema (b). Las Figuras 7-65(a) y (b) muestran la transformación conforme de las retículas del plano s dentro del plano $G(s)$. Cuanto más cerca del eje $j\omega$ estén los polos en lazo cerrado, más cerca del punto $-1 + j0$ estará el lugar geométrico $G(j\omega)$.

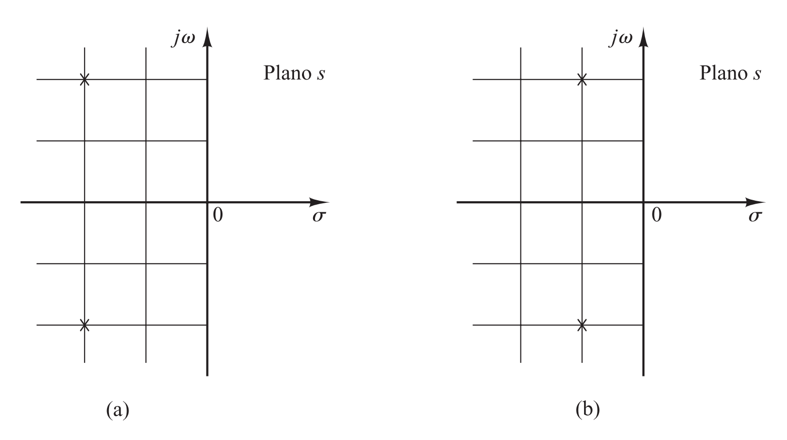


Figura 7-64. Dos sistemas con dos polos en lazo cerrado.

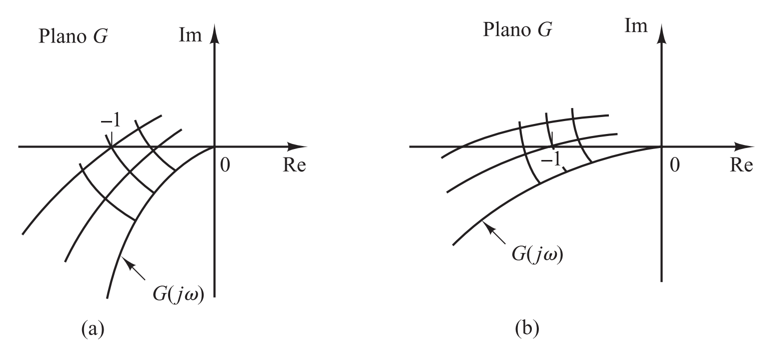


Figura 7-65. Transformaciones conformes de las retículas del plano *s* para los sistemas de la Figura 7-64 dentro del plano *G*(*s*).

Márgenes de fase y de ganancia. La Figura 7-66 muestra los diagramas polares de $G(j\omega)$ para tres valores diferentes de la ganancia K en lazo abierto. Para un valor grande de la ganancia K, el sistema es inestable. Conforme la ganancia se disminuye hacia cierto valor, el lugar geométrico $G(j\omega)$ pasa por el punto $-1 + j0$. Esto significa que, para este valor de la ganancia, el sistema está al borde de la inestabilidad y presenta oscilaciones mantenidas. Para un valor pequeño de la ganancia K, el sistema es estable.

En general, cuanto más se acerca el lugar geométrico $G(j\omega)$ a rodear el punto $-1 + j0$, más oscilatoria es la respuesta del sistema. La proximidad del lugar geométrico $G(j\omega)$ al punto $-1 + j0$ se utiliza como una medida del margen de estabilidad. (Sin embargo, esto no se aplica a los sistemas condicionalmente estables.) Es una práctica común representar la proximidad en términos del margen de fase y el margen de ganancia.

Margen de fase: el margen de fase es la cantidad de retardo de fase adicional en la frecuencia de cruce de ganancia requerida para llevar el sistema al borde de la inestabilidad. La frecuencia de cruce de ganancia es la frecuencia en la cual $|G(j\omega)|$, magnitud de la función de transferencia en lazo abierto, es unitaria. El margen de fase γ es de 180° más el ángulo de fase ϕ de la función de transferencia en lazo abierto en la frecuencia de cruce de ganancia, o

$$\gamma = 180^{\circ} + \phi$$

Plano G
Im
−1
0
Re
K : Grande
K : Pequeño
K = ganancia en lazo abierto

Figura 7-66. Diagramas polares de $\dfrac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_b)\cdots}{(j\omega)(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)\cdots}$.

Las Figuras 7-67(a), (b) y (c) ilustran el margen de fase de un sistema estable y de un sistema inestable en diagramas de Bode, diagramas polares y diagramas de magnitud logarítmica con respecto a la fase. En el diagrama polar, se dibuja una línea del origen al punto en el que el círculo cruza el lugar geométrico $G(j\omega)$. El ángulo del eje real negativo para esta línea es el

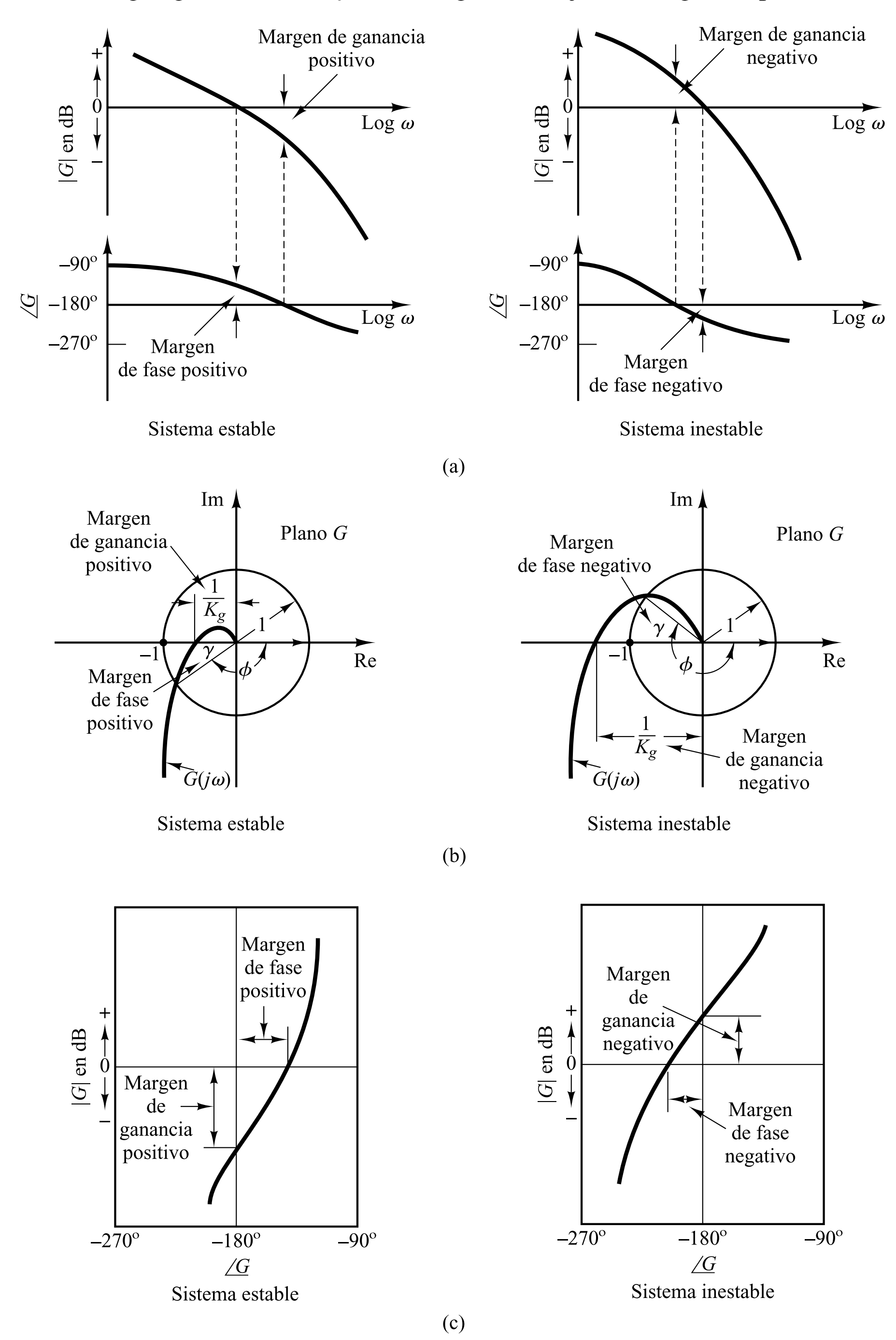


Figura 7-67. Márgenes de fase y de ganancia de sistemas estables e inestables. (a) Diagramas de Bode; (b) diagramas polares; (c) diagramas de magnitud logarítmica con respecto a la fase.

margen de fase. Este es positivo para $\gamma > 0$ y negativo para $\gamma < 0$. Con el fin de que un sistema de fase mínima sea estable, el margen de fase debe ser positivo. En los diagramas logarítmicos, el punto crítico en el plano complejo corresponde a las líneas 0 dB y -180°.

Margen de ganancia: el margen de ganancia es el recíproco de la magnitud $|G(j\omega)|$ en la frecuencia a la cual el ángulo de fase es -180°. Si se define la frecuencia de cruce de fase ω_1 como la frecuencia a la cual el ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto es igual a -180°, se produce el margen de ganancia K_g:

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_1)|}$$

En términos de decibelios,

$$K_g \text{ dB} = 20 \log K_g = -20 \log |G(j\omega_1)|$$

El margen de ganancia expresado en decibelios es positivo si K_g es mayor que la unidad y negativo si K_g es menor que la unidad. Por tanto, un margen de ganancia positivo (en decibelios) significa que el sistema es estable, y un margen de ganancia negativo (en decibelios) quiere decir que el sistema es inestable. El margen de ganancia se aprecia en las Figuras 7-67(a), (b) y (c).

Para un sistema estable de fase mínima, el margen de ganancia indica cuánto puede incrementarse la ganancia antes de que el sistema se vuelva inestable. Para un sistema inestable, el margen de ganancia indica cuánto se debe disminuir la ganancia para que el sistema se vuelva estable.

El margen de ganancia de un sistema de primer o segundo orden es infinito, debido a que los diagramas polares para tales sistemas no cruzan el eje real negativo. Por tanto, los sistemas de primer y segundo orden en teoría no pueden ser inestables. (Sin embargo, obsérvese que los denominados sistemas de primer y segundo orden son sólo aproximaciones, en el sentido de que, al obtener las ecuaciones del sistema, no se consideran los pequeños retardos de tiempo, y, por tanto, no se trata, en realidad, de sistemas de primer o segundo orden. Si se consideran estos retardos pequeños, los supuestos sistemas de primer o segundo orden se vuelven inestables.)

Obsérvese que, para un sistema de fase no mínima con un lazo abierto inestable, la condición de estabilidad no se satisface a menos que la gráfica $G(j\omega)$ rodee al punto $-1 + j0$. Por tanto, un sistema estable de fase no mínima tendrá márgenes de fase y de ganancia negativos.

También es importante señalar que los sistemas condicionalmente estables tienen dos o más frecuencias de cruce de fase y que algunos sistemas de orden superior con una dinámica complicada en el numerador también pueden tener dos o más frecuencias de cruce de ganancia, como se observa en la Figura 7-68. Para los sistemas estables que tengan dos o más frecuencias de cruce de ganancia, el margen de fase se mide en la frecuencia de cruce de ganancia más alta.

Algunos comentarios sobre los márgenes de fase y de ganancia. Los márgenes de fase y de ganancia de un sistema de control son una medida de la proximidad del diagrama polar al punto $-1 + j0$. Por tanto, pueden utilizarse como criterio de diseño.

Debe señalarse que el margen de ganancia o el margen de fase por sí solos no aportan un indicio suficiente de la estabilidad relativa. Deben considerarse ambos en la determinación de la estabilidad relativa.

Para un sistema de fase mínima, los márgenes de fase y de ganancia deben ser positivos con el fin de que el sistema sea estable. Los márgenes negativos indican inestabilidad.

Los márgenes adecuados de fase y de ganancia protegen contra las variaciones de los componentes del sistema y se especifican para valores de frecuencia definidos. Los dos valores delimitan el comportamiento del sistema en lazo cerrado cerca de la frecuencia de resonancia. Para

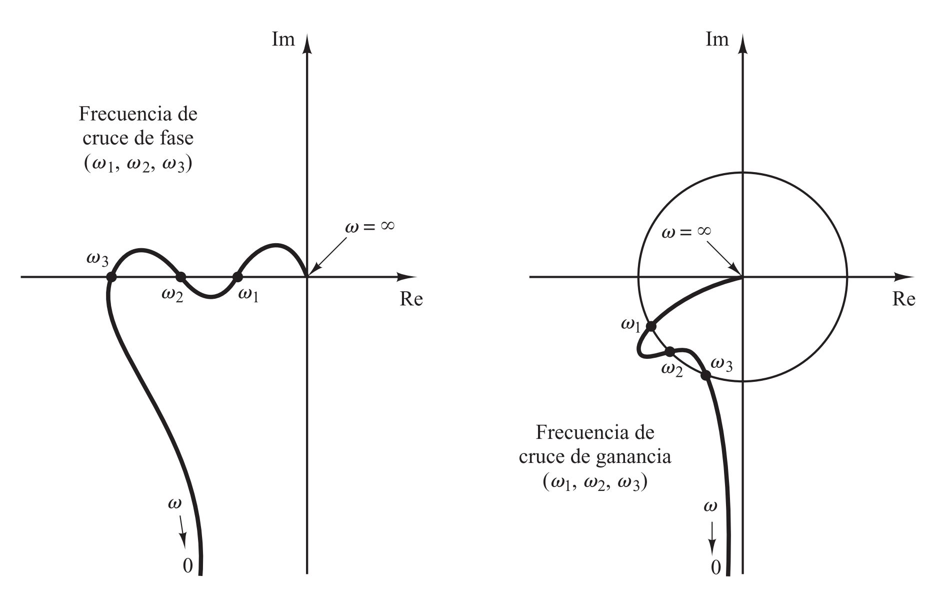


Figura 7-68. Diagramas polares que muestran más de dos frecuencias de cruce de fase o de ganancia.

obtener un rendimiento satisfactorio, el margen de fase debe estar entre 30° y 60°, y el margen de ganancia debe ser mayor que 6 dB. Con estos valores, un sistema de fase mínima tiene una estabilidad garantizada, aun cuando la ganancia en lazo abierto y las constantes de tiempo de los componentes varíen un cierto grado. Aunque los márgenes de fase y de ganancia sólo proporcionan estimaciones globales del factor de amortiguamiento relativo efectivo del sistema en lazo cerrado, ofrecen una medida conveniente para diseñar los sistemas de control o ajustar las constantes de ganancia de los sistemas.

Para los sistemas de fase mínima, las características de magnitud y de fase de la función de transferencia en lazo abierto se relacionan de forma estrecha. El requerimiento de que el margen de fase esté entre 30° y 60° significa que, en los diagramas de Bode, la pendiente de la curva de magnitud logarítmica en la frecuencia de cruce de ganancia debe ser más gradual que −40 dB/década. En la mayor parte de los casos prácticos, es conveniente para la estabilidad una pendiente de −20 dB/década en la frecuencia de cruce de ganancia. Si es de −40 dB/década, el sistema puede ser estable o inestable. (Sin embargo, aunque el sistema sea estable, el margen de fase es pequeño.) Si la pendiente de la frecuencia de cruce de ganancia tiene una pendiente de −60 dB/década o mayor, es muy probable que el sistema sea inestable.

Para sistemas de fase no mínima, la interpretación correcta de los márgenes de estabilidad requiere un estudio cuidadoso. La mejor forma de determinar la estabilidad de sistemas de fase no mínima es utilizar el diagrama de Nyquist en lugar del diagrama de Bode.

EJEMPLO 7-20 Obtenga los márgenes de fase y de ganancia del sistema de la Figura 7-69 para los casos en los que $K = 10$ y $K = 100$.

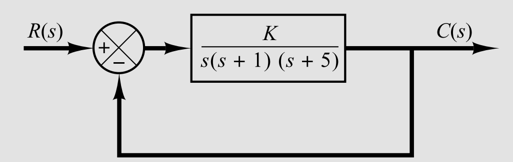


Figura 7-69. Sistema de control.

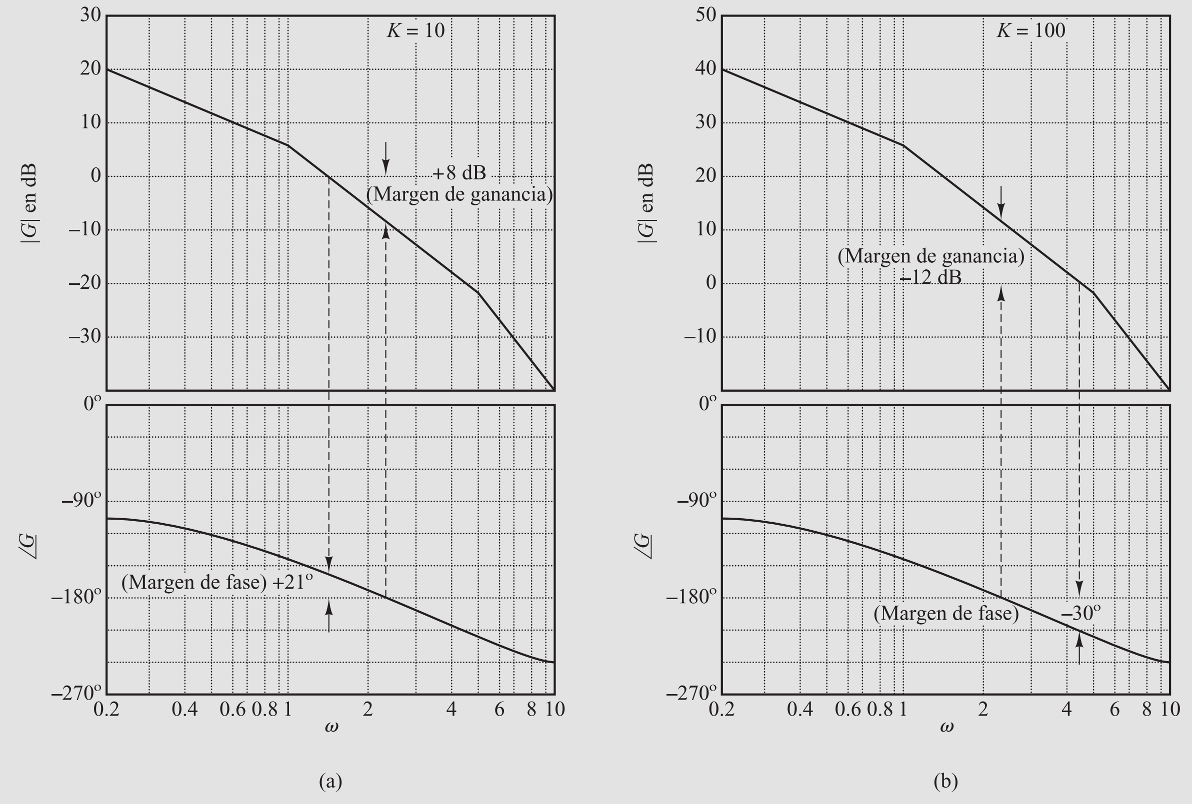


Figura 7-70. Diagramas de Bode del sistema de la Figura 7-69; (a) con $K = 10$ y (b) con $K = 100$.

Los márgenes de fase y de ganancia se obtienen con facilidad de los diagramas de Bode. La Figura 7-70(a) contiene los diagramas de Bode de la función de transferencia en lazo abierto con $K = 10$. Los márgenes de fase y de ganancia para $K = 10$ son

$$\text{Margen de fase} = 21^{\circ}, \qquad \text{Margen de ganancia} = 8 \text{ dB}$$

Por tanto, la ganancia del sistema puede aumentarse en 8 dB antes de que se produzca la inestabilidad. Incrementar la ganancia de $K = 10$ a $K = 100$ mueve el eje de 0 dB hacia abajo 20 dB, como se muestra en la Figura 7-70(b). Los márgenes de fase y de ganancia son

$$\text{Margen de fase} = -30^{\circ}, \qquad \text{Margen de ganancia} = -12 \text{ dB}$$

Par tanto, el sistema es estable para $K = 10$, pero inestable para $K = 100$.

Observe que uno de los aspectos más importantes del método de los diagramas de Bode es la facilidad con la que se evalúan los efectos de los cambios de ganancia. Observe que, para obtener un comportamiento satisfactorio, se debe incrementar el margen de fase a $30^{\circ} \sim 60^{\circ}$. Para ello se disminuye la ganancia K. Sin embargo, no es conveniente disminuir K, debido a que un valor pequeño de K producirá un error grande para la rampa de entrada. Esto sugiere que puede ser necesario volver a dar forma a la curva de respuesta en frecuencia en lazo abierto añadiendo una compensación. Las técnicas de compensación se analizan con detalle en las Secciones 7-11 a 7-13.

Obtención del margen de ganancia, margen de fase, frecuencia de cruce de fase y frecuencia de cruce de ganancia con MATLAB. El margen de ganancia, margen de fase, frecuencia de cruce de fase y frecuencia de cruce de ganancia se pueden obtener fácilmente con MATLAB. La orden que se debe de utilizar es

```
[Gm,pm,wcp,wcg]=margin(sys)
```

donde `Gm` es el margen de ganancia, `pm` es el margen de fase, `wcp` es la frecuencia de cruce de fase y `wcg` es la frecuencia de cruce de ganancia. Para más detalles de cómo utilizar esta orden véase el Ejemplo 7-21.

EJEMPLO 7-21 Dibuje el diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo abierto $G(s)$ del sistema en lazo cerrado de la Figura 7-71. Determine el margen de ganancia, el margen de fase, la frecuencia de cruce de fase y la frecuencia de cruce de ganancia con MATLAB.

El Programa MATLAB 7-11 muestra cómo se calcula el margen de ganancia, el margen de fase, la frecuencia de cruce de fase y la frecuencia de cruce de ganancia con MATLAB. El diagrama de Bode de $G(s)$ se muestra en la Figura 7-72.

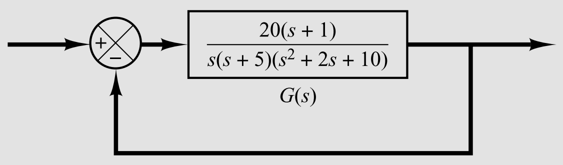


Figura 7-71. Sistema en lazo cerrado.

MATLAB Programa 7-11

```
num = [20  20];
den = conv([1  5  0],[1  2  10]);
sys = tf(num,den);
w = logspace(-1,2,100);
bode(sys,w)
[Gm,pm,wcp,wcg] = margin(sys);
GmdB = 20*log10(Gm);
[GmdB pm wcp wcg]

ans =

  9.9293  103.6573  4.0131  0.4426
```

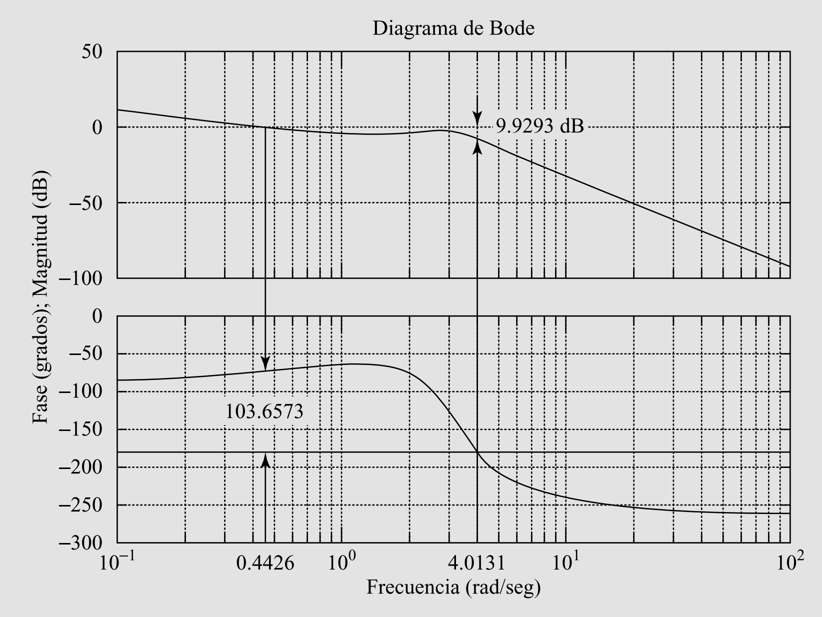


Figura 7-72. Diagrama de Bode de $G(s)$ de la Figura 7-71.

Magnitud del pico de resonancia M_r y frecuencia de pico de resonancia ω_r. Considérese el sistema estándar de segundo orden de la Figura 7-73. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{7-16}$$

donde ζ y ω_n son el factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural no amortiguada, respectivamente. La respuesta en frecuencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\zeta\,\dfrac{\omega}{\omega_n}} = Me^{j\alpha}$$

donde

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \qquad \alpha = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\,\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Según lo obtenido mediante la Ecuación (7-12), para $0 \leqslant \zeta \leqslant 0.707$, el valor máximo de M ocurre en la frecuencia ω_r, donde

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{7-17}$$

La frecuencia ω_r es la frecuencia de resonancia. En la frecuencia de resonancia, el valor de M es máximo y se obtiene a partir la Ecuación (7-13), que se reescribe como

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{7-18}$$

donde M_r se define como la *magnitud del pico de resonancia*. El valor de la magnitud del pico de resonancia está relacionado con el amortiguamiento del sistema.

La magnitud del pico de resonancia proporciona un indicio de la estabilidad relativa del sistema. Una magnitud del pico de resonancia grande indica la presencia de un par de polos dominantes en lazo cerrado con un factor de amortiguamiento pequeño, lo cual produce una respuesta transitoria poco deseable. En cambio, una magnitud del pico de resonancia pequeña indica la ausencia de un par de polos dominantes en lazo cerrado con un factor de amortiguamiento relativo pequeño, lo que significa que el sistema está bien amortiguado.

Recuérdese que ω_r es real sólo si $\zeta < 0.707$. Por tanto, no hay una resonancia en lazo cerrado si $\zeta > 0.707$. [El valor de M_r es unitario sólo si $\zeta > 0.707$. Véase la Ecuación (7-14).] Debido a que en un sistema físico es fácil medir los valores de M_r y ω_r, estos son muy útiles para verificar que los análisis teóricos y experimentales coinciden.

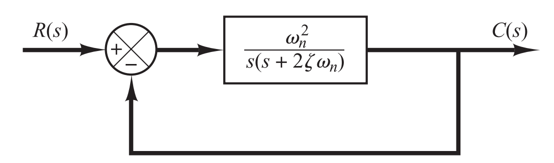


Figura 7-73. Sistema de segundo orden estándar.

Sin embargo, debe señalarse que, para problemas prácticos de diseño, es más común especificar el margen de fase y el margen de ganancia que la magnitud del pico de resonancia para indicar el grado de amortiguamiento de un sistema.

Correlación entre la respuesta transitoria a un escalón y la respuesta en frecuencia en el sistema estándar de segundo orden. La sobreelongación máxima de la respuesta a un escalón unitario del sistema estándar de segundo orden, tal como se muestra en la Figura 7-73, se correlaciona de forma exacta con la magnitud del pico de resonancia de la respuesta en frecuencia. Por tanto, la respuesta en frecuencia contiene, en esencia, la misma información de la dinámica del sistema que la respuesta transitoria.

Para una entrada escalón unitario, la salida del sistema de la Figura 7-73 se obtiene mediante la Ecuación (5-12), o bien

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d t\right), \qquad \text{para } t \geqslant 0$$

donde

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{7-19}$$

Por otra parte, la sobreelongación máxima M_p para la respuesta a un escalón unitario se obtiene mediante la Ecuación (5-21), o bien

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \tag{7-20}$$

Esta sobreelongación máxima ocurre en la respuesta transitoria que tiene la frecuencia natural amortiguada $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. La sobreelongación máxima es excesiva para valores de $\zeta < 0.4$.

Debido a que el sistema de segundo orden de la Figura 7-73 tiene la función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

para una operación sinusoidal, la magnitud de $G(j\omega)$ se vuelve unitaria cuando

$$\omega = \omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}$$

que se obtiene igualando $|G(j\omega)|$ con la unidad y despejando ω. En esta frecuencia, el ángulo de fase de $G(j\omega)$ es

$$\underline{/G(j\omega)} = -\underline{/j\omega} - \underline{/j\omega + 2\zeta\omega_n} = -90^\circ - \tan^{-1}\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}{2\zeta}$$

Por tanto, el margen de fase γ es

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ + \underline{/G(j\omega)} \\ &= 90^\circ - \tan^{-1}\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}{2\zeta} \\ &= \tan^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}\end{aligned} \tag{7-21}$$

La Ecuación (7-21) presenta la relación entre el factor de amortiguamiento relativo ζ y el margen de fase γ. (Obsérvese que el margen de fase γ es sólo una función del factor de amortiguamiento relativo ζ.)

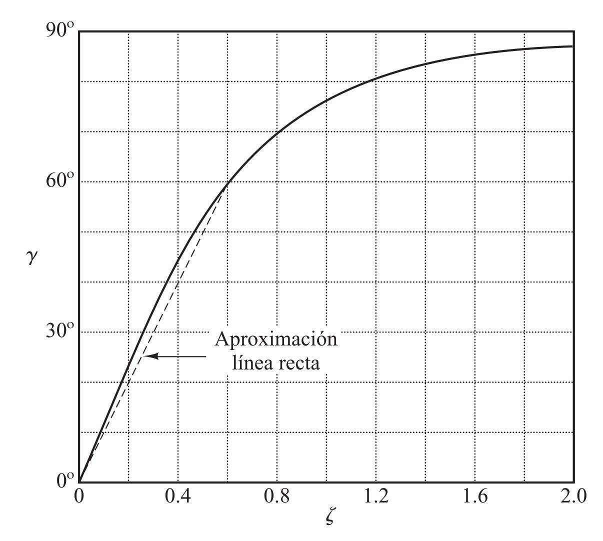


Figura 7-74. Curva γ (margen de fase) con respecto a ζ para el sistema de la Figura 7-73.

A continuación se resume la correlación entre la respuesta transitoria a un escalón y la respuesta en frecuencia del sistema de segundo orden obtenido mediante la Ecuación (7-16):

1. El margen de fase y el factor de amortiguamiento relativo se relacionan de forma directa. La Figura 7-74 muestra una gráfica del margen de fase γ como una función del factor de amortiguamiento relativo ζ. Obsérvese que, para el sistema estándar de segundo orden de la Figura 7-73, el margen de fase γ y el factor de amortiguamiento relativo ζ se relacionan aproximadamente mediante una línea recta para $0 \leqslant \zeta \leqslant 0.6$, del modo siguiente:

$$\zeta = \frac{\gamma}{100^{\circ}}$$

   Por tanto, un margen de fase de 60° corresponde a un factor de amortiguamiento relativo de 0.6. Para sistemas de orden superior que tienen un par de polos dominantes en lazo cerrado, esta relación se usa como una regla empírica para estimar la estabilidad relativa de la respuesta transitoria (es decir, el factor de amortiguamiento relativo) a partir de la respuesta en frecuencia.

2. Haciendo referencia a las Ecuaciones (7-17) y (7-19), se observa que los valores de ω_r y ω_d son casi iguales para valores pequeños de ζ. Por tanto, para valores pequeños de ζ, el valor de ω_r es indicativo de la velocidad de respuesta transitoria del sistema.

3. En las Ecuaciones (7-18) y (7-20), se observa que, cuanto más pequeño es el valor de ζ, más grandes son los valores de M_r y M_p. La correlación entre M_r y M_p como una función de ζ aparece en la Figura 7-75. Se observa una relación estrecha entre M_r y M_p para $\zeta > 0.4$. Para valores muy pequeños de ζ, M_r se vuelve muy grande ($M_r \gg 1$), mientras que el valor de M_p no excede de 1.

Correlación entre la respuesta transitoria a un escalón y la respuesta en frecuencia en sistemas generales. Es muy común que el diseño de los sistemas de control se realice a partir de la respuesta en frecuencia. La razón principal de esto es la simplicidad relativa de este método en comparación con otros. Debido a que en muchas aplicaciones el interés principal es la respuesta transitoria del sistema para entradas aperiódicas en lugar de la respuesta en estado estacionario ante entradas sinusoidales, surge la cuestión de la correlación entre la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia.

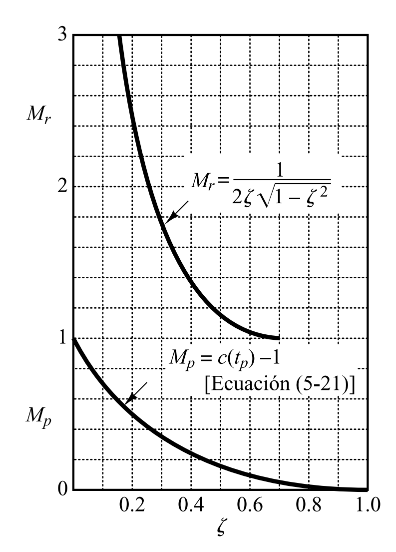


Figura 7-75. Curvas M_r con respecto a ζ y M_p con respecto a ζ para el sistema de la Figura 7-73.

Para el sistema de segundo orden de la Figura 7-73, es fácil obtener las relaciones matemáticas que correlacionan la respuesta transitoria a un escalón con la respuesta en frecuencia. El tiempo de respuesta de un sistema de segundo orden estándar se puede predecir de forma exacta a partir del conocimiento de M_r y ω_r de su respuesta en frecuencia en lazo cerrado.

Para un sistema de segundo orden de los no considerados como estándar y para sistemas de orden superior, la correlación es más compleja, y la respuesta transitoria no se puede predecir fácilmente a partir de la respuesta en frecuencia debido a que los ceros y/o polos adicionales pueden cambiar la correlación entre la respuesta transitoria a un escalón y la respuesta en frecuencia existente para un sistema de segundo orden estándar. Existen técnicas matemáticas que permiten obtener la correlación exacta, pero son muy laboriosas y de poco valor práctico.

La aplicabilidad de la correlación existente entre la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia para el sistema de segundo orden de la Figura 7-73 en sistemas de orden superior depende de la presencia de un par de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado. Es evidente que, si la respuesta en frecuencia de un sistema de orden superior es dominada por un par de polos complejos conjugados en lazo cerrado, la correlación entre la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia existente para el sistema de segundo orden se puede extender al sistema de orden superior.

Para sistemas de orden superior, lineales e invariantes en el tiempo, que tienen un par de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado, por lo general, existen las siguientes relaciones entre la respuesta transitoria a un escalón y la respuesta en frecuencia:

1. El valor de M_r indica la estabilidad relativa. Por lo general se obtiene un comportamiento transitorio satisfactorio si el valor de M_r está en el rango de $1.0 < M_r < 1.4$ (0 dB $< M_r < 3$ dB), que corresponde a un factor de amortiguamiento relativo efectivo de $0.4 < \zeta < 0.7$. Para valores de M_r mayores que 1.5, la respuesta transitoria a un escalón puede presentar varias sobreelongaciones. (Obsérvese que, en general, un valor grande de M_r corresponde a una sobreelongación grande en la respuesta transitoria a un escalón. Si el sistema está sujeto a señales de ruido cuyas frecuencias están cerca de la frecuencia de resonancia ω_r, el ruido se amplifica en la salida y presenta problemas serios.)

2. La magnitud de la frecuencia de resonancia ω_r indica la velocidad de respuesta transitoria. Cuanto más grande es el valor de ω_r más rápida es la respuesta en el tiempo. En otras palabras, el tiempo de subida varía inversamente con respecto a ω_r. En términos de respuesta en frecuencia en lazo abierto, la frecuencia natural amortiguada en la respuesta

transitoria está en algún punto entre la frecuencia de cruce de ganancia y la frecuencia de cruce de fase.

3. La frecuencia del pico de resonancia ω_r y la frecuencia natural amortiguada ω_d para la respuesta transitoria a un escalón están muy cercanas entre sí para sistemas ligeramente amortiguados.

Las tres relaciones que se acaban de mostrar son útiles para correlacionar la respuesta transitoria a un escalón con la respuesta en frecuencia de sistemas de orden superior, siempre y cuando estas se aproximen mediante un sistema de segundo orden o un par de polos complejos conjugados en lazo cerrado. Si un sistema de orden superior satisface esta condición, un conjunto de especificaciones en el dominio del tiempo se traduce en especificaciones en el dominio de la frecuencia. Esto simplifica enormemente el trabajo de diseño o de compensación de los sistemas de orden superior.

Además del margen de fase, el margen de ganancia, el pico de resonancia M_r y la frecuencia del pico de resonancia ω_r existen otras cantidades en el dominio de frecuencia que se usan a menudo en las especificaciones del comportamiento. Estas son la frecuencia de corte, el ancho de banda y la razón de corte. A continuación se definen todas ellas.

Frecuencia de corte y ancho de banda. Haciendo referencia a la Figura 7-76, la frecuencia ω_b en la cual la magnitud de respuesta en frecuencia en lazo cerrado está 3 dB por debajo de su valor de frecuencia cero se denomina *frecuencia de corte*. Por tanto,

$$\left|\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}\right| < \left|\frac{C(j0)}{R(j0)}\right| - 3\ \text{dB}, \qquad \text{para } \omega > \omega_b$$

Para los sistemas en los cuales $|C(j0)/R(j0)| = 0$ dB,

$$\left|\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}\right| < -3\ \text{dB}, \qquad \text{para } \omega > \omega_b$$

El sistema en lazo cerrado filtra las componentes de la señal cuyas frecuencias son mayores que la frecuencia de corte y permite el paso de aquellas con frecuencias menores que la frecuencia de corte.

El rango de la frecuencia $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_b$ en el cual la magnitud de $C(j\omega)/R(j\omega)$ es mayor que -3 dB se denomina *ancho de banda* del sistema. El ancho de banda indica la frecuencia a la cual la ganancia empieza a rebasar su valor de baja frecuencia. Por tanto, el ancho de banda indica cómo de bien el sistema sigue a una senoide de entrada. Obsérvese que, para una ω_n determinada, el tiempo de subida aumenta con un factor de amortiguamiento relativo ζ creciente. En cambio, el ancho de banda disminuye con el incremento de ζ. Por tanto, el tiempo de subida y el ancho de banda son inversamente proporcionales.

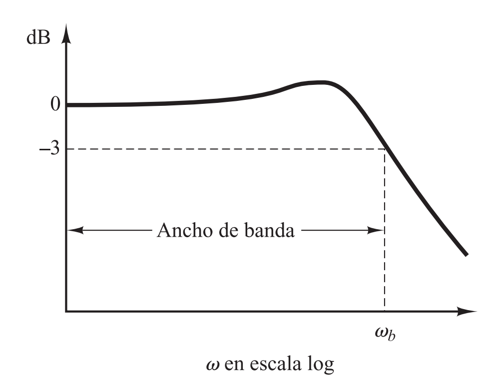


Figura 7-76. Gráfica de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado que muestra la frecuencia de corte ω_b y el ancho de banda.

La especificación del ancho de banda se determina mediante los factores siguientes:

1. La capacidad de reproducir la señal de entrada. Un ancho de banda grande corresponde a un tiempo de subida pequeño o a una respuesta rápida. En términos generales, puede decirse que el ancho de banda es proporcional a la velocidad de respuesta. (Por ejemplo, para disminuir el tiempo de subida en la respuesta a un escalón en un factor de 2, el ancho de banda debe aumentarse aproximadamente en un factor de 2.)
2. Las características de filtrado necesarias para el ruido de alta frecuencia.

Para que el sistema siga las entradas arbitrarias con precisión, es necesario que tenga un ancho de banda grande. Sin embargo, desde el punto de vista del ruido, el ancho de banda no debe ser demasiado grande. Por tanto, existen requerimientos en conflicto con respecto al ancho de banda y, por lo general, el equilibrio es necesario para un buen diseño. Obsérvese que un sistema con un ancho de banda grande requiere componentes de alto comportamiento, por lo que el costo de los componentes suele incrementarse con el ancho de banda.

Razón de corte. La razón de corte es la pendiente de la curva de magnitud logarítmica cercana a la frecuencia de corte. La razón de corte indica la capacidad de un sistema para distinguir la señal del ruido.

Obsérvese que una curva de respuesta en frecuencia en lazo cerrado con una característica de corte muy marcada tiene una magnitud grande del pico de resonancia, lo cual implica que el sistema tiene un margen de estabilidad relativamente pequeño.

EJEMPLO 7-22 Considere los dos sistemas siguientes:

$$\text{Sistema I: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1}, \qquad \text{Sistema II: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{3s+1}$$

Compare sus anchos de banda. Demuestre que el sistema con el ancho de banda mayor tiene una mayor velocidad de respuesta y puede seguir la entrada mucho mejor que el que tiene un ancho de banda menor.

La Figura 7-77(a) muestra las curvas de respuesta en frecuencia en lazo cerrado para los dos sistemas. (Las curvas asintóticas se indican con líneas discontinuas.) Se observa que el ancho de banda del sistema I es $0 \leqslant \omega \leqslant 1$ rad/seg y que el del sistema II es $0 \leqslant \omega \leqslant 0.33$ rad/seg. Las Figuras 7-77(b) y (c) muestran, respectivamente, las curvas de respuesta a un escalón unitario y

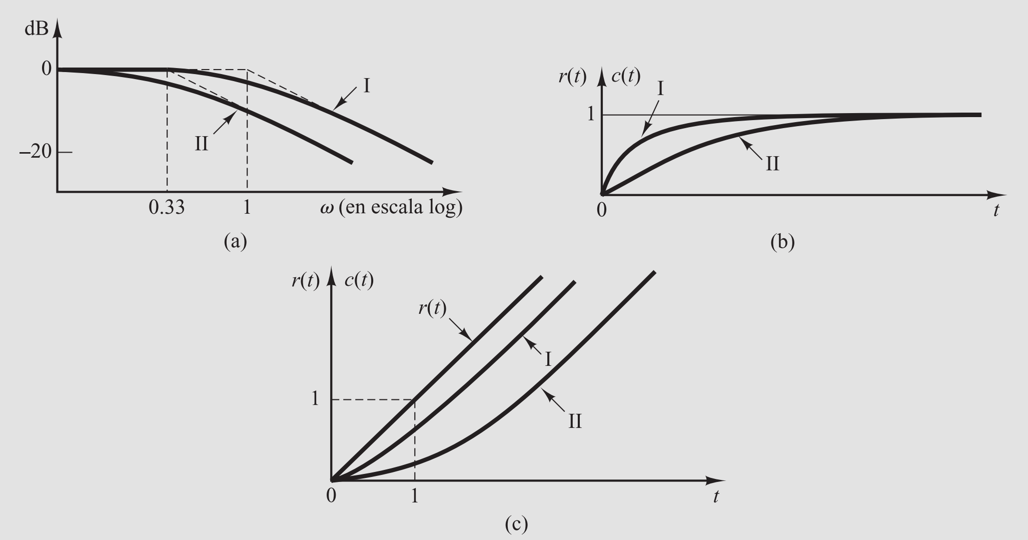


Figura 7-77. Comparación de las características dinámicas de los dos sistemas considerados en el Ejemplo 7-22. (a) Curvas de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado; (b) curvas de la respuesta a un escalón unitario; (c) curvas de la respuesta a una rampa unitaria.

de respuesta a una rampa unitaria para los dos sistemas. Es evidente que el sistema I, cuyo ancho de banda es tres veces mayor que el del sistema II, tiene una mayor velocidad de respuesta y sigue la entrada mucho mejor.

Utilización de MATLAB para obtener el pico de resonancia, la frecuencia de resonancia y el ancho de banda. El pico de resonancia es el valor máximo de la magnitud (en decibelios) de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado. La frecuencia de resonancia es la frecuencia a la cual se encuentra la máxima magnitud. Las órdenes de MATLAB que se pueden utilizar para obtener el pico de resonancia y la frecuencia de resonancia son las siguientes:

```
[mag,phase,w] = bode(num,den,w);   o   [mag,phase,w] = bode(sys,w);
[Mp,k] = max(mag);
pico_de_resonancia = 20*log10(Mp);
frecuencia_de_resonancia = w(k);
```

El ancho de banda se puede obtener introduciendo las siguientes líneas en el programa:

```
n = 1;
while 20*log10(mag(n)) > = –3; n = n+1;
end
ancho_de_banda = w(n)
```

El Ejemplo 7-23 muestra en detalle un programa en MATLAB.

EJEMPLO 7-23 Considere el sistema de la Figura 7-78. Utilice MATLAB para obtener el diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo cerrado. Obtenga también el pico de resonancia, la frecuencia de resonancia y el ancho de banda.

El Programa MATLAB 7-12 calcula el diagrama de Bode para el sistema en lazo cerrado, así como el pico de resonancia, la frecuencia de resonancia y el ancho de banda. El diagrama de

MATLAB Programa 7-12

```
nump = [1];
denp = [0.5  1.5  1  0];
sysp = tf(nump,denp);
sys = feedback(sysp,1);
w = logspace(–1,1);
bode(sys,w)
[mag,phase,w] = bode(sys,w);
[Mp,k] = max(mag);
pico_resonante = 20*log10(Mp)
pico_resonante =
  5.2388
frecuencia_resonante = w(k)
frecuencia_resonante =
  0.7906
n = 1;
while 20*log(mag(n))> = –3; n = n + 1;
end
ancho_banda = w(n)
ancho_banda =
  1.2649
```

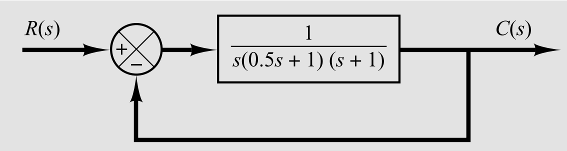


Figura 7-78. Sistema en lazo cerrado.

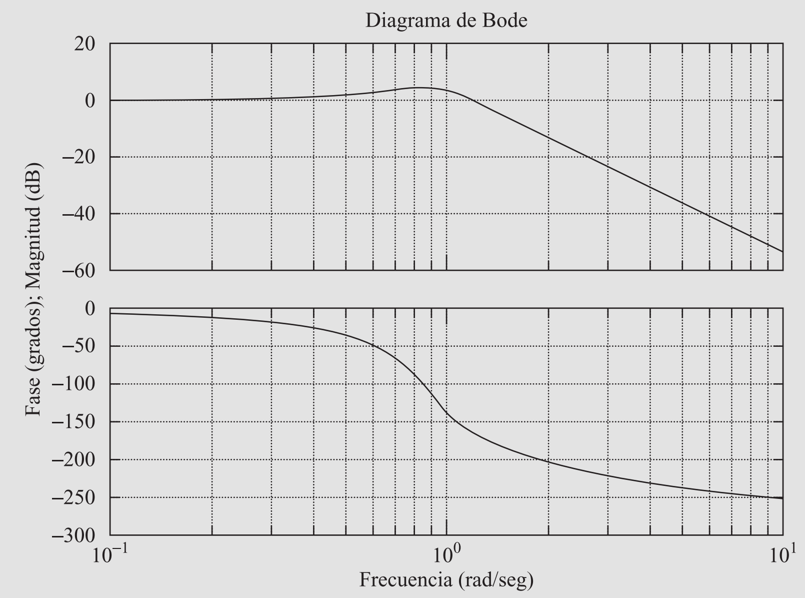


Figura 7-79. Diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo cerrado del sistema de la Figura 7-78.

Bode resultante se muestra en la Figura 7-79. El pico de resonancia que se obtiene es 5.2388 dB. La frecuencia de resonancia es 0.7906 rad/seg. El ancho de banda es 1.2649 rad/seg. Estos valores se pueden verificar en la Figura 7-78.

7-8 Respuesta en frecuencia en lazo cerrado de sistemas con realimentación unitaria

Respuesta en frecuencia en lazo cerrado. Para un sistema estable en lazo cerrado, es fácil obtener la respuesta en frecuencia a partir de la respuesta en lazo abierto. Considérese el sistema con realimentación unitaria de la Figura 7-80(a). La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

En el diagrama polar o de Nyquist que aparece en la Figura 7-80(b), el vector $\overrightarrow{OA}$ representa a $G(j\omega_1)$, donde ω_1 es la frecuencia en el punto A. La longitud del vector $\overrightarrow{OA}$ es $|G(j\omega_1)|$ y el ángulo del vector $\overrightarrow{OA}$ es $\angle G(j\omega_1)$. El vector $\overrightarrow{PA}$, que va del punto $-1 + j0$ al lugar geométrico de Nyquist, representa a $1 + G(j\omega_1)$. Por tanto, la razón entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{PA}$ representa la respuesta en frecuencia en lazo cerrado, o

$$\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{PA}} = \frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} = \frac{C(j\omega_1)}{R(j\omega_1)}$$

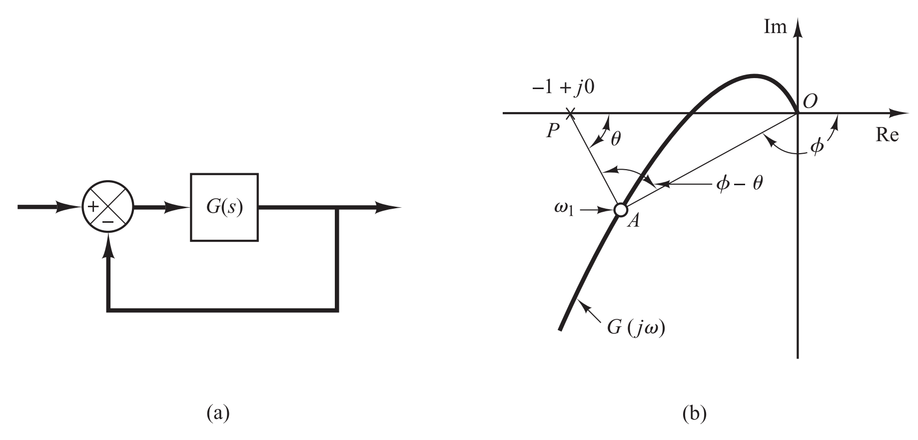


Figura 7-80. (a) Sistema con realimentación unitaria; (b) determinación de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia en lazo abierto.

La magnitud de la función de transferencia en lazo cerrado en $\omega = \omega_1$ es el cociente entre las magnitudes de $\overrightarrow{OA}$ y de $\overrightarrow{PA}$. El ángulo de fase de la función de transferencia en lazo cerrado en $\omega = \omega_1$ es el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{OA}$ a $\overrightarrow{PA}$, que es $\phi - \theta$, y que aparece en la Figura 7-80(b). Midiendo la magnitud y el ángulo de fase en diferentes puntos de frecuencia, se obtiene la curva de respuesta en frecuencia en lazo cerrado.

Se define la magnitud de respuesta en frecuencia en lazo cerrado como M y el ángulo de fase como α, o

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = Me^{j\alpha}$$

A continuación, se buscan los lugares geométricos de magnitud constante y los lugares geométricos de ángulo de fase constante. Tales lugares geométricos son adecuados para determinar la respuesta en frecuencia en lazo cerrado a partir del diagrama polar o de Nyquist.

Lugares geométricos de magnitud constante (círculos *M*). Para obtener los lugares geométricos de magnitud constante, primero se considera que $G(j\omega)$ es una cantidad compleja que se escribe del modo siguiente:

$$G(j\omega) = X + jY$$

donde X y Y son cantidades reales. A continuación se obtiene M mediante

$$M = \frac{|X + jY|}{|1 + X + jY|}$$

y M^2 es

$$M^2 = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}$$

Por tanto,

$$X^2(1 - M^2) - 2M^2X - M^2 + (1 - M^2)Y^2 = 0 \tag{7-22}$$

Si $M = 1$, entonces, a partir de la Ecuación (7-22), se obtiene $X = -\frac{1}{2}$. Esta es la ecuación de una recta paralela al eje Y y que pasa por el punto $(-\frac{1}{2}, 0)$.

Si $M \neq 1$, la Ecuación (7-22) se escribe

$$X^2 + \frac{2M^2}{M^2 - 1} X + \frac{M^2}{M^2 - 1} + Y^2 = 0$$

Si se añade el término $M^2/(M^2 - 1)^2$ a ambos lados de esta última ecuación, se obtiene

$$\left(X + \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} \tag{7-23}$$

La Ecuación (7-23) es la de un círculo con centro en $X = -M^2/(M^2 - 1)$, $Y = 0$ y con radio $|M/(M^2 - 1)|$.

Por tanto, los lugares geométricos de M constante sobre el plano $G(s)$ forman una familia de círculos. El centro y el radio del círculo para un valor determinado de M se calculan con facilidad. Por ejemplo, para $M = 1.3$, el centro está en $(-2.45, 0)$ y el radio es 1.88. La Figura 7-81 muestra una familia de círculos de M constante. Se observa que, conforme M aumenta con respecto a 1, los círculos M se reducen y convergen al punto $-1 + j0$. Para $M > 1$, los centros de los círculos M se encuentran a la izquierda del punto $-1 + j0$. Asimismo, conforme M disminuye con respecto a 1, el círculo M se vuelve más pequeño y converge al origen. Para $0 < M < 1$, los centros de los círculos M se encuentran a la derecha del origen. $M = 1$ corresponde al lugar geométrico de los puntos equidistantes del origen y del punto $-1 + j0$. Como se planteó anteriormente, se trata de una recta que pasa por el punto $(-\frac{1}{2}, 0)$ y es paralela al eje imaginario. (Los círculos de M constante que corresponden a $M > 1$ se encuentran a la izquierda de la recta $M = 1$, y los que corresponden a $0 < M < 1$ se encuentran a la derecha de la misma.) Los círculos M son simétricos con respecto a la recta correspondiente a $M = 1$ y al eje real.

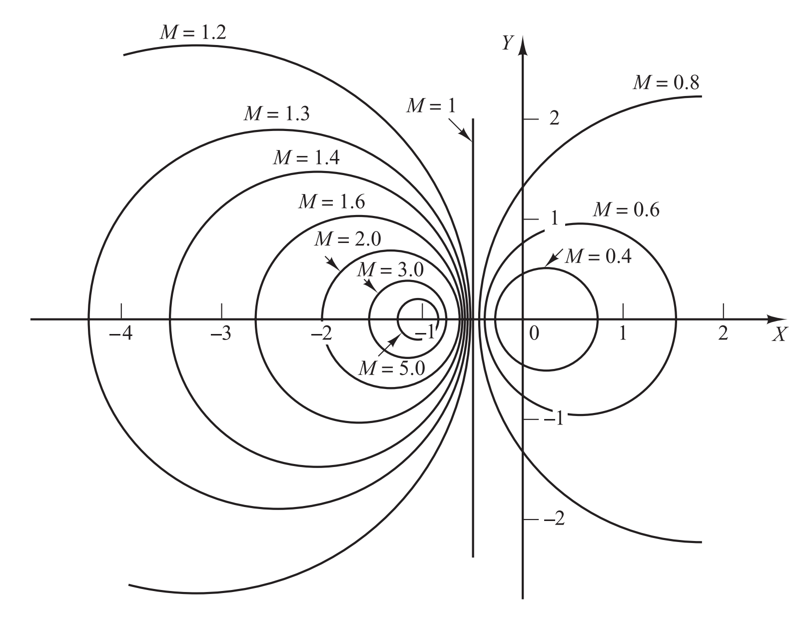


Figura 7-81. Una familia de círculos de M constante.

Lugares geométricos de ángulo de fase constante (círculos *N*). Se obtiene el ángulo de fase α en términos de X e Y. Como

$$\underline{/e^{j\alpha}} = \underline{\Big/ \frac{X + jY}{1 + X + jY}}$$

el ángulo de fase α es

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{Y}{1 + X}\right)$$

Si se define

$$\tan \alpha = N$$

entonces,

$$N = \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{Y}{1 + X}\right)\right]$$

Como

$$\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

se obtiene

$$N = \frac{\dfrac{Y}{X} - \dfrac{Y}{1 + X}}{1 + \dfrac{Y}{X}\left(\dfrac{Y}{1 + X}\right)} = \frac{Y}{X^2 + X + Y^2}$$

o bien

$$X^2 + X + Y^2 - \frac{1}{N} Y = 0$$

La suma de $(\frac{1}{4}) + 1/(2N)^2$ a ambos lados de esta última ecuación queda

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2 \qquad (7\text{-}24)$$

Esta es la ecuación de un círculo con centro en $X = -\frac{1}{2}$, $Y = 1/(2N)$ y radio de $\sqrt{\frac{1}{4} + 1/(2N)^2}$. Por ejemplo, si $\alpha = 30^\circ$, entonces $N = \tan \alpha = 0.577$, y el centro y el radio del círculo correspondiente a $\alpha = 30^\circ$ son $(-0.5, 0.866)$ y la unidad, respectivamente. Como la Ecuación (7-24) se satisface para $X = Y = 0$ y $X = -1$, $Y = 0$ sin considerar el valor de N, cada círculo pasa por el origen y el punto $-1 + j0$. Los lugares geométricos de α constantes se dibujan con facilidad una vez obtenido el valor de N. La Figura 7-82 contiene una familia de círculos de N constantes con α como parámetro.

Debe señalarse que el lugar geométrico de N constante para un valor determinado de α no es en realidad el círculo completo, sino sólo un arco. En otras palabras, los arcos $\alpha = 30^\circ$ y $\alpha = -150^\circ$ son partes de un mismo círculo. Esto es así porque la tangente de un ángulo no cambia si se añaden al ángulo $\pm 180^\circ$ (o múltiplos del mismo).

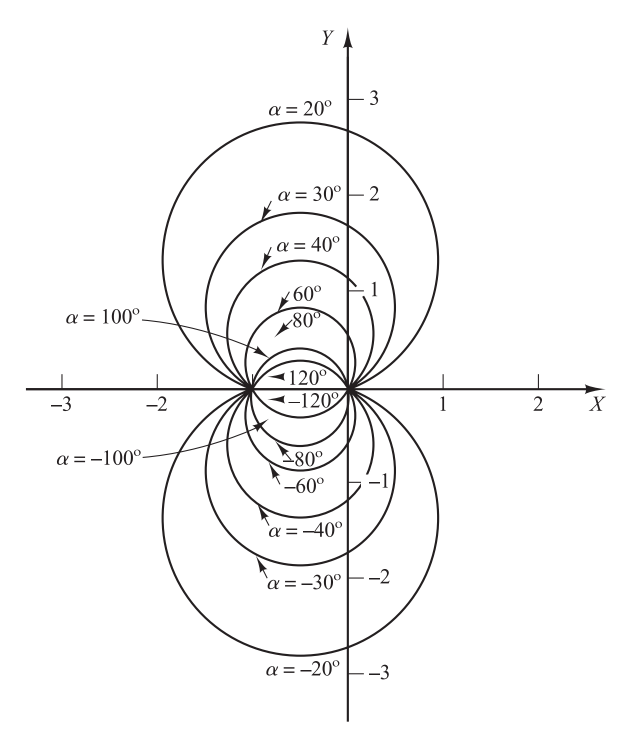


Figura 7-82. Una familia de círculos de N constante.

El uso de las círculos M y N permite encontrar toda la respuesta en frecuencia en lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia en lazo abierto $G(j\omega)$ sin necesidad de calcular la magnitud y la fase de la función de transferencia en lazo cerrado en todas las frecuencias. Las intersecciones del lugar geométrico $G(j\omega)$ y los círculos M y N proporciona los valores de M y N en los puntos de frecuencia sobre el lugar geométrico $G(j\omega)$.

Los círculos N tienen valores múltiples en el sentido de que el círculo para $\alpha = \alpha_1$ y para $\alpha = \alpha_1 \pm 180^\circ n$ ($n = 1, 2, \ldots$) son iguales. Al usar los círculos N para la determinación del ángulo de fase de los sistemas en lazo cerrado se debe interpretar el valor correcto de α. Para evitar un error, empiece en la frecuencia cero, que corresponde a $\alpha = 0^\circ$, y avance a frecuencias más altas. La curva del ángulo de fase debe ser continua.

Gráficamente, las intersecciones del lugar geométrico $G(j\omega)$ y los círculos M proporcionan los valores de M para las frecuencias representadas en el lugar geométrico $G(j\omega)$. Por tanto, el círculo de M constante con el radio más pequeño tangente al lugar geométrico $G(j\omega)$ proporciona el valor de la magnitud del pico de resonancia M_r. Si se quiere conservar el valor del pico de resonancia menor que un cierto valor, el sistema no debe rodear al punto crítico $(-1 + j0)$, ni debe haber intersecciones con el círculo M determinado y el lugar geométrico $G(j\omega)$.

La Figura 7-83(a) muestra el lugar geométrico $G(j\omega)$ superpuesto a una familia de círculos M. La Figura 7-83(b) muestra el mismo lugar geométrico $G(j\omega)$ superpuesto a una familia de círculos N. A partir de estas gráficas, es posible obtener, mediante observación, la respuesta en frecuencia en lazo cerrado. Obsérvese que el círculo $M = 1.1$ corta al lugar geométrico $G(j\omega)$ en el punto de frecuencia $\omega = \omega_1$. Esto significa que, en esta frecuencia, la magnitud de la función de transferencia en lazo cerrado es 1.1. En la Figura 7-83(a), el círculo $M = 2$ es tangente al lugar geométrico $G(j\omega)$. Por tanto, sólo hay un punto en el lugar geométrico de $G(j\omega)$ para el cual $|C(j\omega)/R(j\omega)|$ es igual a 2. La Figura 7-83(c) muestra la curva de respuesta en frecuencia en lazo cerrado para el sistema. La curva superior es la curva M con respecto a la frecuencia ω y la curva inferior es el ángulo de fase α con respecto a la curva de frecuencia ω.

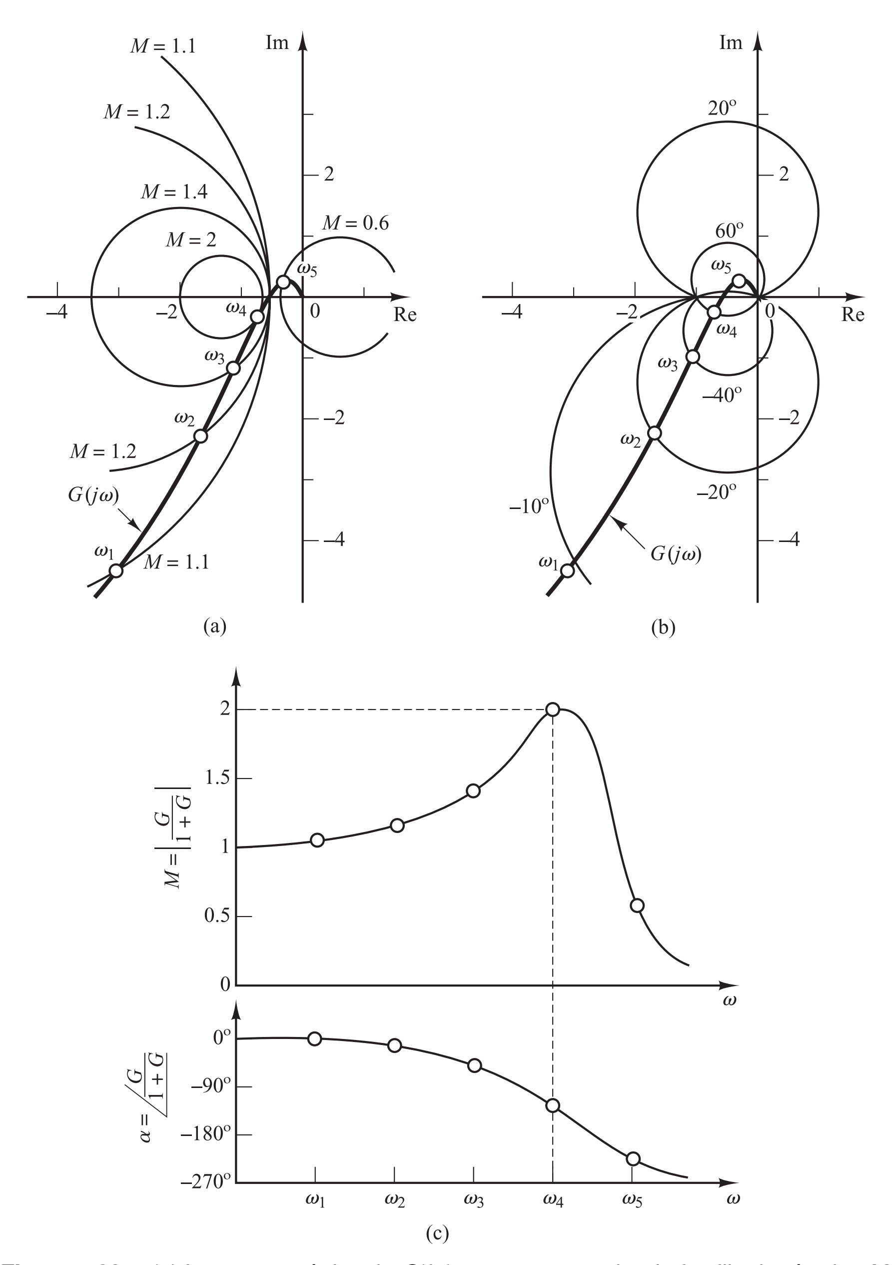


Figura 7-83. (a) Lugar geométrico de $G(j\omega)$ superpuesto sobre la familia de círculos M; (b) lugar geométrico de $G(j\omega)$ superpuesto sobre la familia de círculos N; (c) curvas de respuesta en frecuencia en lazo cerrado.

El valor del pico de resonancia es el valor de M correspondiente al círculo M de radio más pequeño tangente al lugar geométrico $G(j\omega)$. Por tanto, en el diagrama de Nyquist, el valor del pico de resonancia M_r y la frecuencia de resonancia ω_r se encuentran a partir de la tangencia entre el círculo M y el lugar geométrico $G(j\omega)$. (En el ejemplo actual, $M_r = 2$ y $\omega_r = \omega_4$.)

Carta de Nichols. Al abordar problemas de diseño, es conveniente construir los lugares geométricos M y N en el plano de la magnitud logarítmica con respecto a la fase. El diagrama formado por estos lugares geométricos se denomina carta de Nichols. El lugar geométrico de

$G(j\omega)$ dibujado sobre la carta de Nichols proporciona tanto las características de ganancia como las de fase de la función de transferencia en lazo cerrado al mismo tiempo. Esta carta se muestra en la Figura 7-84, para los ángulos de fase entre 0º y -240º.

Obsérvese que el punto crítico (punto $-1 + j0$) se transforma para la carta de Nichols en el punto (0 dB, -180º). La carta de Nichols contiene las curvas de magnitud y ángulo de fase en lazo cerrado constantes. El diseñador puede determinar gráficamente el margen de fase, el margen de ganancia, la magnitud del pico de resonancia, la frecuencia del pico de resonancia y el ancho de banda del sistema en lazo cerrado a partir del diagrama del lugar geométrico en lazo abierto, $G(j\omega)$.

La carta de Nichols es simétrica con respecto al eje -180º. Los lugares geométricos M y N se repiten cada 360º y presentan una simetría en cada intervalo de 180º. Los lugares geométricos M están centrados con respecto al punto crítico (0 dB, -180º). La carta de Nichols es muy útil para determinar la respuesta en frecuencia en lazo cerrado a partir de la de lazo abierto. Si la curva de la respuesta en frecuencia en lazo abierto $G(j\omega)$ se superpone a la carta de Nichols, los puntos en los que corta los lugares geométricos M y N proporcionan los valores de la magnitud M y el ángulo de fase α de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado en cada punto de frecuencia. Si el lugar geométrico $G(j\omega)$ no corta el lugar geométrico $M = M_r$ pero es tangente a él, el valor del pico de resonancia de M de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado se obtiene de M_r. La frecuencia del pico de resonancia se obtiene a partir de la frecuencia en el punto de tangencia.

Como ejemplo, considérese el sistema con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(j\omega) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}, \qquad K = 1$$

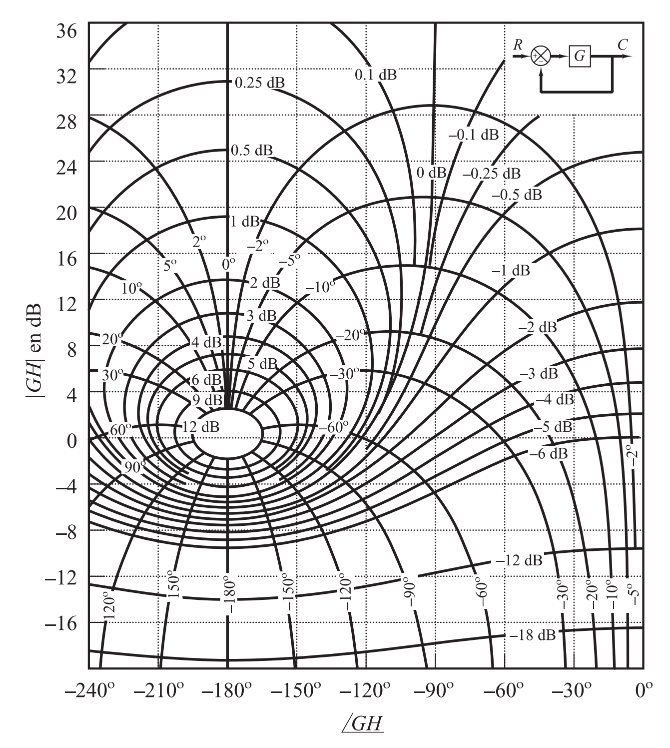


Figura 7-84. Carta de Nichols.

Para encontrar la respuesta en frecuencia en lazo cerrado mediante la carta de Nichols, se construye el lugar geométrico $G(j\omega)$ en el plano de la magnitud logarítmica con respecto a la fase utilizando MATLAB o a partir de los diagramas de Bode. La Figura 7-85(a) muestra el lugar geométrico $G(j\omega)$ junto con los lugares geométricos M y N. Para construir las curvas de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado se leen las magnitudes y los ángulos de fase en diversos puntos de la frecuencia sobre el lugar geométrico $G(j\omega)$ a partir de los lugares geométricos M y N, como se muestra en la Figura 7-85(b). Debido a que el contorno de mayor magnitud que toca el lugar geométrico $G(j\omega)$ es 5 dB, la magnitud del pico de resonancia M_r es 5 dB. La frecuencia del pico de resonancia correspondiente es de 0.8 rad/seg.

Obsérvese que el punto de cruce de fase es el punto en el cual el lugar geométrico $G(j\omega)$ corta al eje -180° (para el sistema actual, $\omega = 1.4$ rad/seg), y el punto de cruce de la ganancia es el punto en el cual el lugar geométrico corta al eje 0 dB (para el sistema actual, $\omega = 0.76$ rad/seg). El margen de fase es la distancia horizontal (medida en grados) entre el punto de cruce de ganancia y el punto crítico (0 dB, -180°). El margen de ganancia es la distancia (en decibelios) entre el punto de cruce de fase y el punto crítico.

El ancho de banda del sistema en lazo cerrado se encuentra con facilidad a partir del lugar geométrico $G(j\omega)$ en la carta de Nichols. La frecuencia en la intersección del lugar geométrico $G(j\omega)$ y el lugar geométrico $M = -3$ dB proporciona el ancho de banda.

Si la ganancia en lazo abierto K varía, la forma del lugar geométrico $G(j\omega)$ en el diagrama de la magnitud logarítmica con respecto a la fase no cambia, pero se mueve hacia arriba (al aumentar K) o hacia abajo (al disminuir K) a lo largo del eje vertical. Por tanto, el lugar geométrico

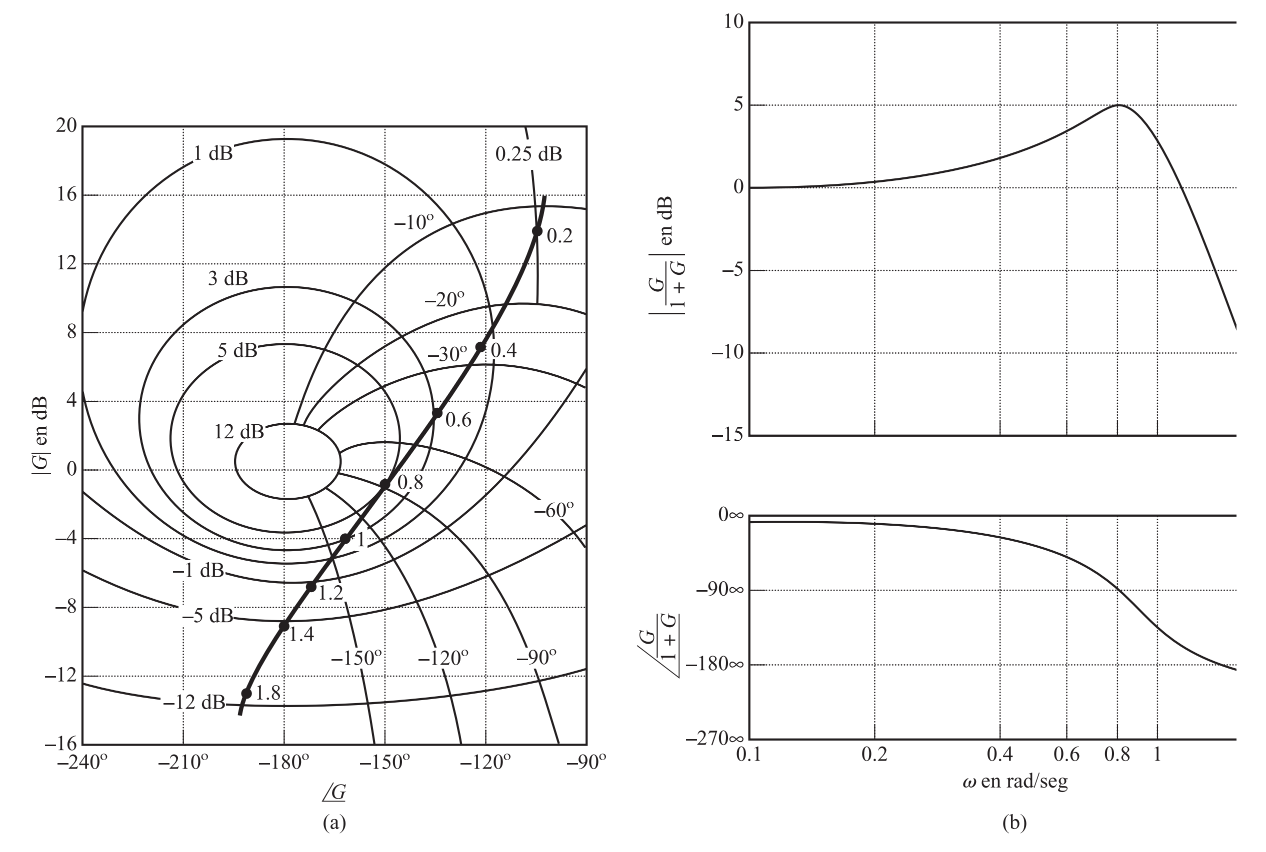


Figura 7-85. (a) Gráfica de $G(j\omega)$ superpuesta a la carta de Nichols; (b) curvas de respuesta en frecuencia en lazo cerrado.

$G(j\omega)$ corta los lugares geométricos M y N de forma diferente, y genera una curva de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado distinta. Para un valor pequeño de la ganancia K, el lugar geométrico $G(j\omega)$ no es tangente a ninguno de los lugares geométricos M, lo cual significa que no hay resonancia en la respuesta en frecuencia en lazo cerrado.

EJEMPLO 7-24 Considere el sistema de control de realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega)}$$

Determine el valor de la ganancia K tal que $M_r = 1.4$.

El primer paso para determinar el valor de la ganancia K consiste en dibujar el diagrama polar de

$$\frac{G(j\omega)}{K} = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega)}$$

La Figura 7-86 muestra el lugar de $M_r = 1.4$ y el de $G(j\omega)/K$. El cambiar la ganancia no tiene efecto sobre el ángulo de fase; simplemente mueve la curva hacia arriba para $K > 1$ y hacia a bajo para $K < 1$.

En la Figura 7-86, el lugar de $G(j\omega)/K$ debe subirse 4 dB para que sea tangente al lugar M_r deseado y para que el lugar de $G(j\omega)/K$ esté completamente fuera del lugar de $M_r = 1.4$. La cantidad de desplazamiento vertical en el que se mueve el lugar de $G(j\omega)/K$ determina la ganancia necesaria para obtener el valor deseado de M_r. Por tanto, resolviendo

$$20 \log K = 4$$

se obtiene

$$K = 1.59$$

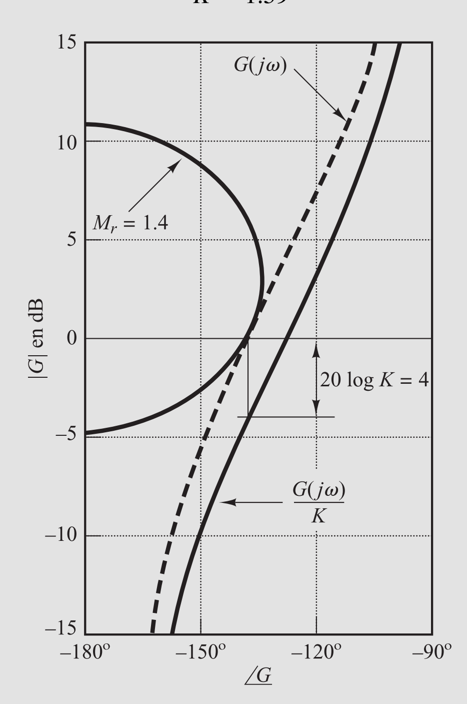


Figura 7-86. Determinación de la ganancia K utilizando la carta de Nichols.

7-9 Determinación experimental de funciones de transferencia

El primer paso en el análisis y diseño de un sistema de control es obtener un modelo matemático de la planta que se considera. La obtención analítica de un modelo resulta ser bastante difícil. Puede lograrse mediante un análisis experimental. La importancia de los métodos de la respuesta en frecuencia es que la función de transferencia de la planta, o de cualquier otro componente del sistema, se determina mediante mediciones simples de la respuesta en frecuencia.

Si se han medido la razón de amplitudes y el cambio de fase de un número suficiente de frecuencias dentro del rango de frecuencias que interesa, pueden dibujarse en los diagramas de Bode. Luego se determina la función de transferencia mediante aproximaciones asintóticas. Se construyen curvas asintóticas de magnitud logarítmica con varios segmentos. Con cierto manejo de prueba y error de las frecuencias esquinas, por lo general es posible encontrar un ajuste muy cercano para la curva. (Obsérvese que si la frecuencia está dada en ciclos por segundo, y no en radianes por segundo, las frecuencias esquinas deben convertirse en radianes por segundo antes de calcular las constantes de tiempo.)

Generadores de señales sinusoidales. Al desarrollar una prueba de la respuesta en frecuencia, debe contarse con generadores de señales sinusoidales. Es posible que la señal tenga que estar en forma mecánica, eléctrica o neumática. Los rangos de frecuencia necesarios para la prueba son, aproximadamente, de 0.001 a 10 Hz para sistemas con constantes de tiempo grandes y de 0.1 a 1000 Hz para sistemas con constantes de tiempo pequeñas. La señal sinusoidal debe estar razonablemente libre de armónicos o distorsión.

Para rangos de frecuencias muy bajas (por debajo de 0.01 Hz), tal vez se use un generador de señales mecánicas (junto con un transductor neumático o eléctrico adecuado, si es necesario). Para el rango de frecuencias de 0.01 a 1000 Hz, puede ser necesario un generador de señales eléctricas adecuado (junto con un transductor adecuado, si es necesario).

Determinación de las funciones de transferencia de fase mínima a partir de los diagramas de Bode. Como se indicó anteriormente, es posible determinar a partir de las curvas de la respuesta en frecuencia si un sistema es de fase mínima examinando las características de alta frecuencia.

Para determinar la función de transferencia, primero se dibujan las asíntotas para la curva de magnitud logarítmica obtenida de forma experimental. Las asíntotas deben tener pendientes de múltiplos de ± 20 dB/década. Si la pendiente de la curva de magnitud logarítmica obtenida experimentalmente cambia de -20 a -40 dB/década en $\omega = \omega_1$, es evidente que existe un factor $1/[1 + j(\omega/\omega_1)]$ en la función de transferencia. Si la pendiente cambia -40 dB/década en $\omega = \omega_2$, debe haber un factor cuadrático de la forma

$$\frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\,\dfrac{\omega}{\omega_2}\right) + \left(j\,\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

en la función de transferencia. La frecuencia natural no amortiguada de este factor cuadrático es igual a la frecuencia esquina ω_2. El factor de amortiguamiento relativo ζ se determina a partir de la curva de magnitud logarítmica obtenida de forma experimental de la medida de la cantidad del pico de resonancia cerca de la frecuencia esquina ω_2 y la comparación de esto con las curvas de la Figura 7-9.

Una vez determinados los factores de la función de transferencia $G(j\omega)$, la ganancia se establece a partir de la parte de la curva de la magnitud logarítmica de baja frecuencia. Debido a que

términos como $1 + (j\omega/\omega_1)$ y $1 + 2\zeta(j\omega/\omega_2) + (j\omega/\omega_2)^2$ se vuelven unitarios conforme ω tiende a cero, en frecuencias muy bajas, la función de transferencia sinusoidal $G(j\omega)$ se escribe

$$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^{\lambda}}$$

En muchos sistemas prácticos, λ es igual a 0, 1 o 2.

1. Para $\lambda = 0$, o sistemas de tipo 0,

$$G(j\omega) = K, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

o bien

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

La asíntota a baja frecuencia es una línea horizontal en $20 \log K$ dB. Por tanto, el valor de K se encuentra a partir de esta asíntota horizontal.

2. Para $\lambda = 1$, o sistemas de tipo 1,

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

o bien

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \omega, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

lo cual indica que la asíntota de baja frecuencia tiene la pendiente -20 dB/década. La frecuencia a la cual esta asíntota de baja frecuencia (o su extensión) corta la línea 0 dB es numéricamente igual a K.

3. Para $\lambda = 2$, o sistemas de tipo 2,

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2}, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

o bien

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 40 \log \omega, \qquad \text{para } \omega \ll 1$$

La pendiente de la asíntota de baja frecuencia es -40 dB/década. La frecuencia a la cual esta asíntota (o su extensión) corta a la línea 0 dB es numéricamente igual a $\sqrt{K}$.

La Figura 7-87 contiene ejemplos de las curvas de magnitud logarítmica para los sistemas de tipo 0, de tipo 1 y de tipo 2, junto con la frecuencia a la cual se relaciona la ganancia K.

La curva del ángulo de fase obtenida de forma experimental proporciona un medio de verificar la función de transferencia obtenida a partir de la curva de magnitud logarítmica. Para un sistema de fase mínima, la curva del ángulo de fase experimental debe coincidir con la curva del ángulo de fase teórico, obtenida de la función de transferencia recién determinada. Estas dos curvas del ángulo de fase deben coincidir en los rangos de frecuencia muy bajos y muy altos. Si el ángulo de fase obtenido experimentalmente en frecuencias muy altas (en comparación con las frecuencias esquinas) no es igual a $-90^{\circ}(q - p)$, donde p y q son los grados de los polinomios del numerador y del denominador de la función de transferencia, respectivamente, la función de transferencia debe ser de fase no mínima.

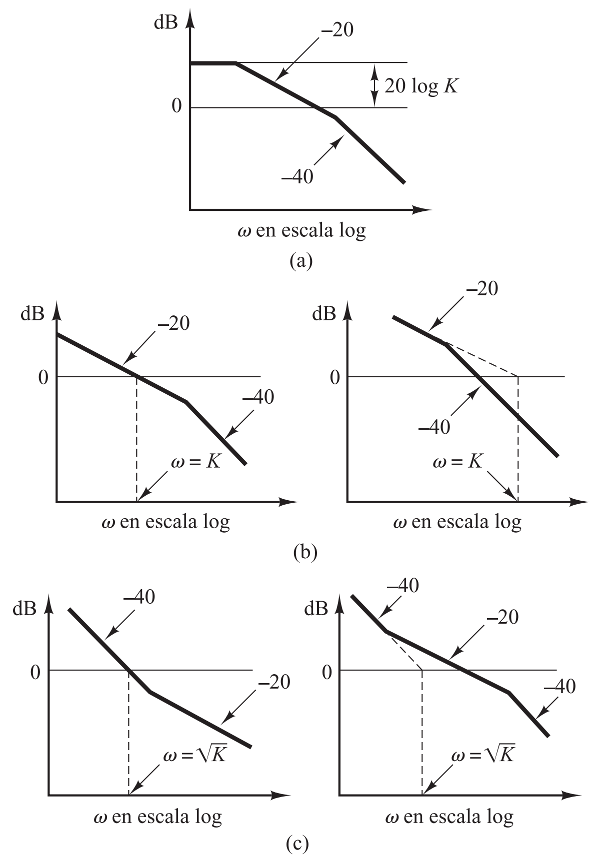


Figura 7-87. (a) Curva de magnitud logarítmica de un sistema de tipo 0; (b) curva de magnitud logarítmica de sistemas de tipo 1; (c) curvas de magnitud logarítmica de sistemas de tipo 2. (Las pendientes que se muestran están en dB/década.)

Funciones de transferencia de fase no mínima. Si en el extremo de alta frecuencia el retardo de fase calculado es 180º menor que el retardo de fase obtenido de forma experimental, uno de los ceros de la función de transferencia debe encontrarse en el semiplano derecho del plano s, y no en el semiplano izquierdo del plano s.

Si el retardo de fase calculado difiere del retardo de fase obtenido de manera experimental por una velocidad constante de cambio de fase, hay presente un retardo de transporte, o tiempo muerto. Si se supone que la función de transferencia tiene la forma

$$G(s)e^{-Ts}$$

donde $G(s)$ es un cociente de dos polinomios en s, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to\infty} \frac{d}{d\omega} \underline{/G(j\omega)e^{-j\omega T}} &= \lim_{\omega\to\infty} \frac{d}{d\omega} [\underline{/G(j\omega)} + \underline{/e^{-j\omega T}}] \\ &= \lim_{\omega\to\infty} \frac{d}{d\omega} [\underline{/G(j\omega)} - \omega T] \\ &= 0 - T = -T\end{aligned}$$

donde se utiliza el hecho de que $\lim_{\omega\to\infty} \underline{/G(j\omega)} =$ constante. Así, a partir de esta ecuación, se puede evaluar la magnitud del retardo de transporte T.

Algunos comentarios sobre la determinación experimental de las funciones de transferencia

1. Por lo general es más fácil obtener mediciones precisas de la amplitud que del desplazamiento de fase. Las mediciones del desplazamiento de fase pueden implicar errores debidos a la instrumentación o a la interpretación errónea de los registros experimentales.
2. La respuesta en frecuencia del equipo de medición usado para medir la salida del sistema debe tener una curva de magnitud con respecto a la frecuencia casi plana. Además, el ángulo de fase debe ser casi proporcional a la frecuencia.
3. Los sistemas físicos tienen varios tipos de no linealidades. Por tanto, es necesario considerar con cuidado la amplitud de las señales sinusoidales de entrada. Si la amplitud de la señal de entrada es demasiado grande, el sistema se saturará y la prueba de la respuesta en frecuencia producirá resultados imprecisos. En cambio, una señal pequeña provocará errores debidos a la zona muerta. Por tanto, debe hacerse una cuidadosa elección de la amplitud de la señal sinusoidal de entrada. Es necesario muestrear la forma de la onda de la salida del sistema para asegurarse de que sea sinusoidal y de que el sistema opera en su región lineal durante el periodo de prueba. (La forma de la onda de la salida del sistema no es sinusoidal cuando el sistema opera en su región no lineal.)
4. Si el sistema que se considera opera de forma continua durante días y semanas, no es necesario detener la operación normal para las pruebas de la respuesta en frecuencia. La señal de prueba sinusoidal se superpone a las entradas normales. Después, para los sistemas lineales, la salida provocada por la señal de prueba se superpone a la salida normal. Para la determinación de la función de transferencia mientras el sistema está en operación normal, también es común el uso de señales estocásticas (señales de ruido blanco). Mediante las funciones de correlación se determina la función de transferencia del sistema sin interrumpir la operación normal.

EJEMPLO 7-25 Determine la función de transferencia del sistema cuyas curvas de respuesta en frecuencia experimentales aparecen en la Figura 7-88.

El primer paso para determinar la función de transferencia es aproximar la curva de magnitud logarítmica mediante asíntotas con pendientes de ± 20 dB/década y múltiplos de la misma, como se aprecia en la Figura 7-88. Después, se estiman las frecuencias esquinas. Para el sistema de la Figurra 7-88, se estima la siguiente forma de la función de transferencia:

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + 0.5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega)\left[1 + 2\zeta\left(j\,\dfrac{\omega}{8}\right) + \left(j\,\dfrac{\omega}{8}\right)^2\right]}$$

El valor del factor de amortiguamiento relativo ζ se estima examinando el pico de resonancia cerca de $\omega = 6$ rad/seg. Haciendo referencia a la Figura 7-9, se determina que ζ sea 0.5. La ganancia K es numéricamente igual a la frecuencia de la intersección de la extensión de la asíntota de baja frecuencia con la línea 0 dB. Por tanto, el valor de K resulta ser 10. Así, $G(j\omega)$ se determina tentativamente como

$$G(j\omega) = \frac{10(1 + 0.5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega)\left[1 + \left(j\,\dfrac{\omega}{8}\right) + \left(j\,\dfrac{\omega}{8}\right)^2\right]}$$

o bien

$$G(s) = \frac{320(s + 2)}{s(s + 1)(s^2 + 8s + 64)}$$

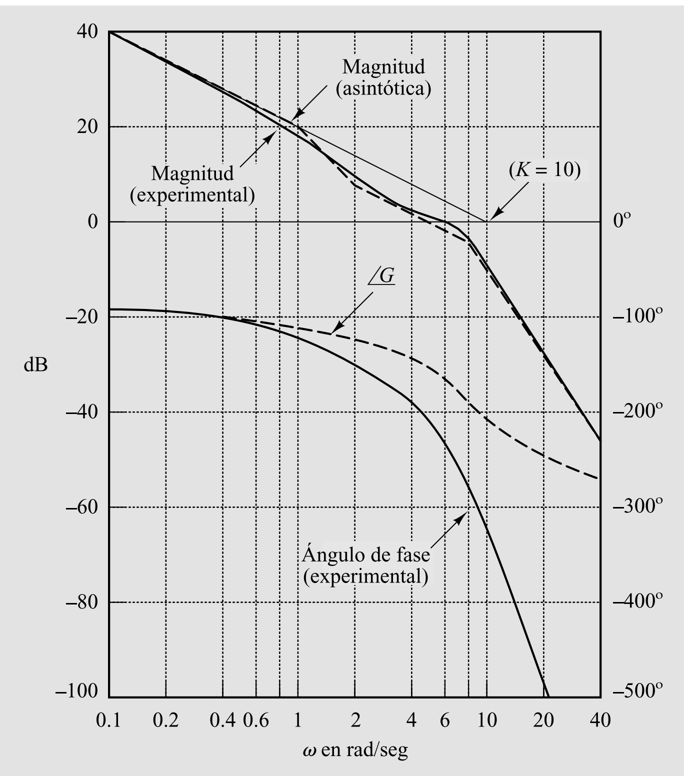


Figura 7-88. Diagramas de Bode de un sistema. (Las curvas continuas se obtuvieron experimentalmente.)

Esta función de transferencia es tentativa porque todavía no se ha examinado la curva del ángulo de fase.

Una vez que se señalan las frecuencias esquinas en la curva de magnitud logarítmica, es fácil dibujar la curva del ángulo de fase correspondiente para cada tipo de los factores que componen la función de transferencia. La suma de estas curvas de los componentes del ángulo de fase es la suma de la función de transferencia supuesta. La curva del ángulo de fase para $G(j\omega)$ se representa mediante $\angle G$ en la Figura 7-88. Así se observa claramente una discrepancia entre la curva del ángulo de fase calculada y la curva del ángulo de fase obtenida de forma experimental. La diferencia entre las dos curvas para frecuencias muy altas parece ser una razón de cambio constante. Por tanto, la discrepancia en las curvas del ángulo de fase debe ser provocada por un retardo de transporte.

De esta manera, se supone que la función de transferencia completa es $G(s)e^{-Ts}$. Como la discrepancia entre el ángulo de fase calculado y el experimental es de -0.2ω rad para frecuencias muy altas, se determina el valor de T del modo siguiente:

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{d}{d\omega} \angle G(j\omega)e^{-j\omega T} = -T = -0.2$$

o bien

$$T = 0.2 \text{ seg}$$

Por tanto, puede determinarse la presencia de un retardo de transporte, y la función de transferencia completa obtenida de las curvas experimentales es

$$G(s)e^{-Ts} = \frac{320(s+2)e^{-0.2s}}{s(s+1)(s^2+8s+64)}$$

7-10 Diseño de sistemas de control por el método de la respuesta en frecuencia

En el Capítulos 6 se presentó el análisis y el diseño por el método del lugar de las raíces. Se mostró que el lugar de las raíces era muy útil para modificar las características de respuesta transitoria de los sistemas de control en lazo cerrado. El lugar de las raíces proporciona información directa de la respuesta transitoria del sistema en lazo cerrado. Por otra parte, el método de la respuesta en frecuencia da esta información de forma indirecta. Sin embargo, como se verá en este capítulo, el método de la respuesta en frecuencia resulta muy útil en el diseño de sistemas de control.

Para cualquier problema de diseño, el diseñador hará muy bien si emplea ambos métodos y selecciona el compensador que mejor produce la respuesta en lazo cerrada deseada.

En la mayoría de los diseños de un sistema de control, el comportamiento de la respuesta transitoria es normalmente muy importante. En el método de la respuesta en frecuencia, se especifica el comportamiento de la respuesta transitoria de una forma indirecta. Es decir, el comportamiento de la respuesta transitoria se especifica en términos del margen de fase, el margen de ganancia y la magnitud del pico de resonancia (que ofrecen una estimación razonable del amortiguamiento del sistema), la frecuencia de cruce de ganancia, la frecuencia de resonancia y el ancho de banda (que dan una estimación de la velocidad de la respuesta transitoria) y las constantes de error estático (que proporcionan la precisión en estado estacionario). Aunque la correlación entre la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia es indirecta, las especificaciones en el dominio de la frecuencia se cumplen adecuadamente en el método del diagrama de Bode.

Después de diseñar el lazo abierto mediante el método de la respuesta en frecuencia, se determinan los polos y los ceros en lazo cerrado. Deben verificarse las características de la respuesta transitoria para saber si el sistema diseñado satisface los requisitos en el dominio del tiempo. De no ser así, debe modificarse el compensador y luego repetirse el análisis hasta obtener un resultado satisfactorio.

El diseño en el dominio de la frecuencia es sencillo y directo. La gráfica de la respuesta en frecuencia indica claramente la forma en la que debe modificarse el sistema, aunque no sea posible hacer una predicción cuantitativa exacta de las características de la respuesta transitoria. El método de la respuesta en frecuencia se puede aplicar a sistemas o componentes cuyas características dinámicas están dadas en forma de datos de respuesta en frecuencia. Obsérvese que, debido a la dificultad de obtener las ecuaciones que controlan ciertos componentes, tales como neumáticos o hidráulicos, por lo general las características dinámicas de dichos componentes se determinan de forma experimental a través de pruebas de respuesta en frecuencia. Las gráficas de respuesta en frecuencia obtenidas experimentalmente se pueden combinar con facilidad con otras gráficas obtenidas del mismo modo cuando se utiliza el método del diagrama de Bode. Obsérvese también que, cuando se trabaja con ruido de alta frecuencia, se comprueba que el método de la respuesta en frecuencia es más conveniente que otros.

Básicamente hay dos enfoques de diseño en el dominio de la frecuencia. Uno es el enfoque del diagrama polar y el otro es el enfoque del diagrama de Bode. Cuando se añade un compensador, el diagrama polar no conserva su forma original, por lo que es necesario dibujar un nuevo diagrama polar, lo cual lleva tiempo y, por tanto, no es conveniente. Por otra parte, el diagrama de Bode del compensador se puede añadir de forma muy simple al diagrama de Bode original, y, por tanto, representar el diagrama de Bode completo resulta sencillo. Asimismo, si varía la ganancia en lazo abierto, la curva de magnitud se desplaza hacia arriba o hacia abajo sin que se modifique la pendiente de la curva, y la curva de fase no cambia. Por tanto, para propósitos de diseño, es mejor trabajar con el diagrama de Bode.

Un enfoque común del diagrama de Bode es que primero se ajusta la ganancia en lazo abierto para cumplir el requisito sobre la precisión en estado estacionario. A continuación se representan las curvas de magnitud y fase en lazo abierto sin compensar (con la ganancia en lazo abierto recién ajustada). Si no se satisfacen las especificaciones del margen de fase y del margen de ganancia, se determina un compensador adecuado que modifica la función de transferencia en lazo abierto. Finalmente, si se deben cumplir otros requisitos, se intenta satisfacerlos, a menos que algunos de ellos sean mutuamente contradictorios.

Información que se obtiene de la respuesta en frecuencia en lazo abierto. La región de bajas frecuencias (la que está muy por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia) indica el comportamiento en estado estacionario del sistema en lazo cerrado. La región de frecuencias medias (cercana al punto $-1 + !j0$) muestra estabilidad relativa. La región de altas frecuencias (la que está muy por encima de la frecuencia de cruce de ganancia) informa sobre la complejidad del sistema.

Requisitos sobre la respuesta en frecuencia en lazo abierto. Se puede decir que, en muchos casos prácticos, la compensación es, en esencia, un compromiso entre precisión en estado estacionario y estabilidad relativa.

Para obtener un valor alto de la constante de error de velocidad, y todavía tener una estabilidad relativa satisfactoria, es necesario volver a dar forma a la curva de respuesta en frecuencia en lazo abierto.

La ganancia en la región de bajas frecuencias debe ser suficientemente grande, y, cerca de la frecuencia de cruce de ganancia, la pendiente de la curva de magnitud logarítmica en el diagrama de Bode debe ser de -20 dB/década. Esta pendiente debe extenderse sobre un rango de frecuencias suficientemente amplio para asegurar un margen de fase adecuado. Para la región de altas frecuencias, la ganancia debe atenuarse lo más rápido posible a fin de reducir los efectos del ruido. En la Figura 7-89 se muestran algunos ejemplos de curvas de respuesta en frecuencia en lazo abierto y en lazo cerrado deseables y no deseables.

En la Figura 7-90 se observa que la modificación de la curva de respuesta en frecuencia en lazo abierto se puede hacer si la región de altas frecuencias sigue al de $G_1(j\omega)$, mientras que la región de bajas frecuencias sigue al de $G_2(j\omega)$. El lugar geométrico modificado $G_c(j\omega)G(j\omega)$ debe tener márgenes de fase y de ganancia razonables, o bien ser tangente a un círculo M adecuado, tal como se muestra.

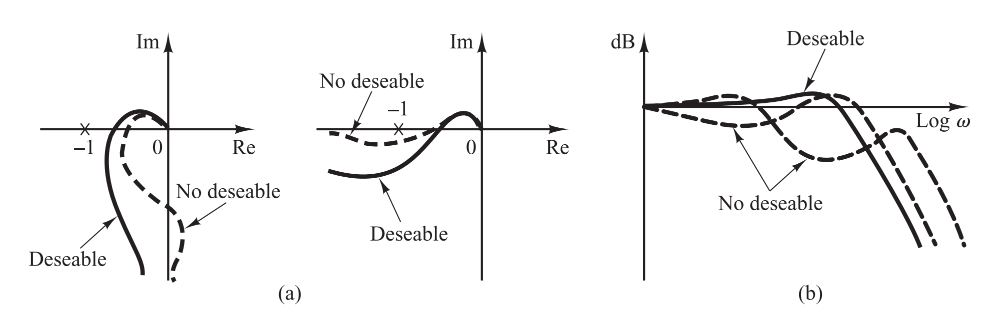


Figura 7-89. (a) Ejemplos de curvas de respuesta en frecuencia en lazo abierto deseables y no deseables; (b) ejemplos de curvas de respuesta en frecuencia en lazo cerrado deseables y no deseables.

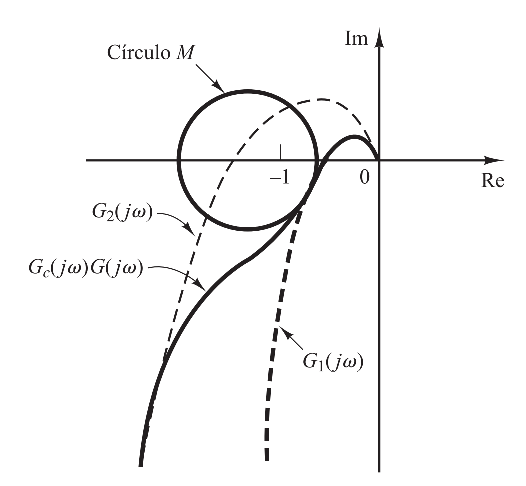


Figura 7-90. Modificación de la curva de respuesta en frecuencia en lazo abierto.

Características básicas de la compensación de adelanto, retardo y retardo-adelanto. La compensación de adelanto produce, esencialmente, una mejora apreciable en la respuesta transitoria y un cambio pequeño en la precisión en estado estacionario. Puede acentuar los efectos del ruido de alta frecuencia. Por otra parte, la compensación de retardo produce una mejora notable en la precisión en estado estacionario a costa de aumentar el tiempo de respuesta transitoria. Suprime los efectos de las señales de ruido a alta frecuencia. La compensación de retardo-adelanto combina las características de la compensación de adelanto con las de la compensación de retardo. El uso de un compensador de retardo o de adelanto aumenta el orden del sistema en 1 (a menos que se produzca una cancelación entre el cero del compensador y un polo de la función de transferencia en lazo abierto no compensada). El uso de un compensador de retardo-adelanto aumenta el orden del sistema en 2 [a menos que haya una cancelación entre el cero, o los ceros, del compensador de retardo-adelanto y el polo, o los polos, de la función de transferencia en lazo abierto no compensada], lo que significa que el sistema se hace más complejo y que es más difícil controlar el comportamiento de la respuesta transitoria. La situación en particular determina el tipo de compensación que debe usarse.

7-11 Compensación de adelanto

Primero se examinarán las características en frecuencia del compensador de adelanto. A continuación se presenta una técnica de diseño para el compensador de adelanto mediante el uso de los diagramas de Bode.

Características de los compensadores de adelanto. Sea un compensador de adelanto que tiene la función de transferencia siguiente:

$$K_c\alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\alpha T}} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

donde α se denomina factor de atenuación del compensador de adelanto. Tiene un cero en $s = -1/T$ y un polo en $s = 1/(\alpha T)$. Como $0 < \alpha < 1$, se ve que el cero siempre se localiza a la derecha del polo en el plano complejo. Obsérvese que, para un valor pequeño de α, el polo se

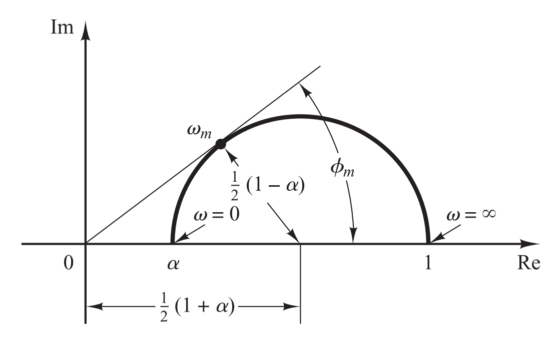


Figura 7-91. Diagrama polar de un compensador de adelanto $\alpha(j\omega T + 1)/(j\omega T + 1)$, donde $0 < \alpha < 1$.

localiza lejos hacia la izquierda. El valor mínimo de α está limitado por la construcción física del compensador de adelanto. El valor mínimo de α normalmente se toma alrededor de 0.05. (Esto significa que el adelanto de fase máxima que puede producir el compensador de adelanto es de 65°.) [Véase la Ecuación (7-25).]

La Figura 7-91 muestra el diagrama polar de

$$K_c\alpha \frac{j\omega T + 1}{j\omega\alpha T + 1} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

con $K_c = 1$. Para un valor determinado de α, el ángulo entre el eje real positivo y la línea tangente dibujada desde el origen hasta el semicírculo proporciona el ángulo de adelanto de fase máximo, ϕ_m. Se llamará ω_m a la frecuencia en el punto tangente. De la Figura 7-91, el ángulo de fase en $\omega = \omega_m$ es ϕ_m, donde

$$\operatorname{sen} \phi_m = \frac{\dfrac{1-\alpha}{2}}{\dfrac{1+\alpha}{2}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tag{7-25}$$

La Ecuación (7-25) relaciona el ángulo de adelanto de fase máximo con el valor de α.

La Figura 7-92 muestra el diagrama de Bode de un compensador de adelanto cuando $K_c = 1$ y $\alpha = 0.1$. Las frecuencias esquinas para el compensador de adelanto son $\omega = 1/T$ y $\omega = 1/(\alpha T) = 10/T$. Si se examina la Figura 7-92, se ve que ω_m es la media geométrica de las dos frecuencias esquinas, o bien

$$\log \omega_m = \frac{1}{2}\left(\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T}\right)$$

Figura 7-92. Diagrama de Bode de un compensador de adelanto $\alpha(j\omega\alpha T + 1)/(j\omega T + 1)$, donde $\alpha = 0.1$

Por tanto,

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T} \tag{7-26}$$

Como puede observarse en la Figura 7-92, el compensador de adelanto es básicamente un filtro paso alta. (Pasan las frecuencias altas, pero se atenúan las frecuencias bajas.)

Técnicas de compensación de adelanto basadas en el método de la respuesta en frecuencia. La función principal del compensador de adelanto es modificar la curva de respuesta en frecuencia para proporcionar un ángulo de adelanto de fase suficiente para compensar el excesivo retardo de fase asociado con las componentes del sistema fijo.

Sea el sistema que se muestra en la Figura 7-93. Supóngase que las especificaciones de comportamiento se dan en función del margen de fase, del margen de ganancia, de las constantes de error estático de velocidad, etc. El procedimiento para diseñar un compensador de adelanto mediante el método de respuesta en frecuencia se plantea del modo siguiente:

1. Suponga el siguiente compensador de adelanto:

$$G_c(s) = K_c\alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\alpha T}} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

Defina

$$K_c\alpha = K$$

Entonces,

$$G_c(s) = K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} G(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} KG(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} G_1(s)$$

Donde

$$G_1(s) = KG(s)$$

Determine la ganancia K que satisfaga el requisito sobre la constante estática de error dada.

2. Usando la ganancia K así determinada, dibuje el diagrama de Bode de $G_1(j\omega)$, el sistema con la ganancia ajustada pero sin compensar. Calcule el margen de fase.

3. Determine el ángulo de adelanto de fase que es necesario que se añada al sistema. Incremente un adelanto de fase adicional de 5° a 12° al ángulo de adelanto de fase requerido,

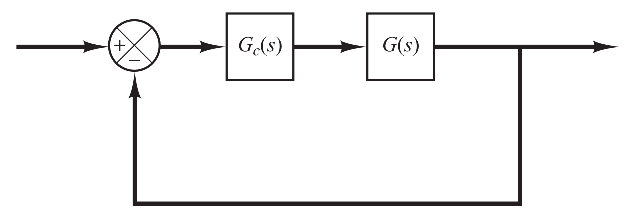


Figura 7-93. Sistema de control.

ya que la adición del compensador de adelanto desplaza la frecuencia de cruce de ganancia hacia la derecha y disminuye así el margen de fase.

4. Determine el factor de atenuación α a partir de la Ecuación (7-25). Determine la frecuencia donde la magnitud del sistema no compensado $G_1(j\omega)$ es igual a $-20 \log (1/\sqrt{\alpha})$. Seleccione esta frecuencia como la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Esta frecuencia corresponde $\omega_m = 1/(\sqrt{\alpha}T)$ y el cambio de fase máximo ϕ_m ocurre en esta frecuencia.

5. Determine las frecuencias esquinas del compensador de adelanto del modo siguiente:

$$\text{Compensador de adelanto de cero:} \quad \omega = \frac{1}{T}$$

$$\text{Compensador de adelanto del polo:} \quad \omega = \frac{1}{\alpha T}$$

6. Usando el valor de K determinado en el paso 1 y el de α determinado en el paso 4, calcule la constante K_c a partir de

$$K_c = \frac{K}{\alpha}$$

7. Verifique el margen de ganancia para asegurarse de que es satisfactorio. Si no es así, repita el proceso de diseño modificando la localización de polos-ceros del compensador hasta que se obtenga un resultado satisfactorio.

EJEMPLO 7-26 Sea el sistema que se muestra en la Figura 7-94. La función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

Se quiere diseñar un compensador para e1 sistema de modo que la constante de error estático de velocidad K_v sea de 20 seg^{-1}, el margen de fase sea al menos de 50º y el margen de ganancia sea al menos de 10 dB.

Se utilizará un compensador de adelanto de la forma

$$G_c(s) = K_c\alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s + \dfrac{1}{T}}{s + \dfrac{1}{\alpha T}}$$

El sistema compensado tendrá la función de transferencia en lazo abierto $G_c(s)G(s)$.

Defina

$$G_1(s) = KG(s) = \frac{4K}{s(s+2)}$$

donde $K = K_c\alpha$.

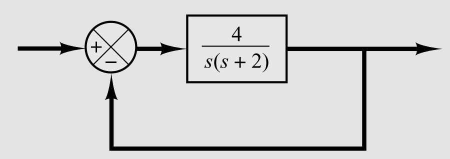


Figura 7-94. Sistema de control.

El primer paso en el diseño es ajustar la ganancia K para que cumpla la especificación de comportamiento en estado estacionario, o bien proporcionar la constante de error estático de velocidad requerida. Como esta constante es de 20 seg^{-1}, se obtiene

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}\,G_1(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s4K}{s(s+2)} = 2K = 20$$

o bien

$$K = 10$$

Con $K = 10$, el sistema compensado satisface el requisito en estado estacionario.

A continuación, se representa el diagrama de Bode de

$$G_1(j\omega) = \frac{40}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{20}{j\omega(0.5j\omega+1)}$$

La Figura 7-95 muestra las curvas de magnitud y de fase de $G_1(j\omega)$. A partir de estas curvas, se ve que los márgenes de fase y de ganancia del sistema son 17° y $+\infty$ dB, respectivamente. (Un margen de fase de 17° implica que el sistema es bastante oscilatorio. Por tanto, aunque el sistema satisface la especificación en estado estacionario presenta un comportamiento deficiente de la respuesta transitoria.) La especificación requiere un margen de fase de al menos 50°. Se encuentra así que el adelanto de fase adicional necesario para satisfacer el requisito de estabilidad relativa es de 33°. Para obtener un margen de fase de 50° sin disminuir el valor de K, el compensador de adelanto debe contribuir al ángulo de fase requerido.

Si se tiene en cuenta que la adición de un compensador de adelanto modifica la curva de magnitud en el diagrama de Bode, se ve que la frecuencia de cruce de ganancia se desplazará hacia la derecha. Se debe compensar el incremento en el retardo de fase de $G_1(j\omega)$ debido al aumento en la frecuencia de cruce de ganancia. Considerando el desplazamiento de la frecuencia de cruce de ganancia, se puede suponer que ϕ_m, el adelanto de fase máximo requerido, es de aproximadamente 38°. (Esto significa que se han añadido 5° para compensar el desplazamiento en la frecuencia de cruce de ganancia.)

Como

$$\text{sen}\,\phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

Figura 7-95. Diagrama de Bode de $G_1(j\omega) = 10G(j\omega) = 40/[j\omega(j\omega+2)]$.

$\phi_m = 38^o$ corresponde a $\alpha = 0.24$. Una vez determinado el factor de atenuación α, a partir del ángulo de adelanto de fase requerido, el paso siguiente es determinar las frecuencias esquinas $\omega = 1/T$ y $\omega = 1/\alpha T$ del compensador de adelanto. Para conseguirlo, primero se observa que el ángulo de adelanto de fase máximo ϕ_m ocurre en la media geométrica de las dos frecuencias esquinas, o bien $\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)$. [Véase la Ecuación (7-26).] La cantidad en la modificación de la curva de magnitud en $\omega = 1/\sqrt{\alpha}T)$ debida a la inclusión del término $(Ts + 1)/(\alpha Ts + 1)$ es

$$\left|\frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega\alpha T}\right|_{\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)} = \left|\frac{1 + j\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + j\alpha\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Observe que

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0.24}} = \frac{1}{0.49} = 6.2 \text{ dB}$$

y $|G_1(j\omega)| = -6.2$ dB corresponde a $\omega = 9$ rad/seg. Se selecciona esta frecuencia como la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω_c. Teniendo en cuenta que esta frecuencia corresponde a $1/(\sqrt{\alpha}T)$, o $\omega_c = 1/(\sqrt{\alpha}T)$, se obtiene que

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\omega_c = 4.41$$

y

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = 18.4$$

El compensador de adelanto así determinado es

$$G_c(s) = K_c\frac{s + 4.41}{s + 18.4} = K_c\alpha\frac{0.227s + 1}{0.054s + 1}$$

donde el valor de K_c se determina como

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{10}{0.24} = 41.7$$

Así, la función de transferencia del compensador es

$$G_c(s) = 41.7\frac{s + 4.41}{s + 18.4} = 10\frac{0.227s + 1}{0.054s + 1}$$

Observe que

$$\frac{G_c(s)}{K}G_1(s) = \frac{G_s(s)}{10}10G(s) = G_c(s)G(s)$$

En la Figura 7-96 se muestran las curvas de magnitud y fase de $G_c(j\omega)/10$. El sistema compensado tiene la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G_c(s)G(s) = 41.7\frac{s + 4.41}{s + 18.4}\frac{4}{s(s + 2)}$$

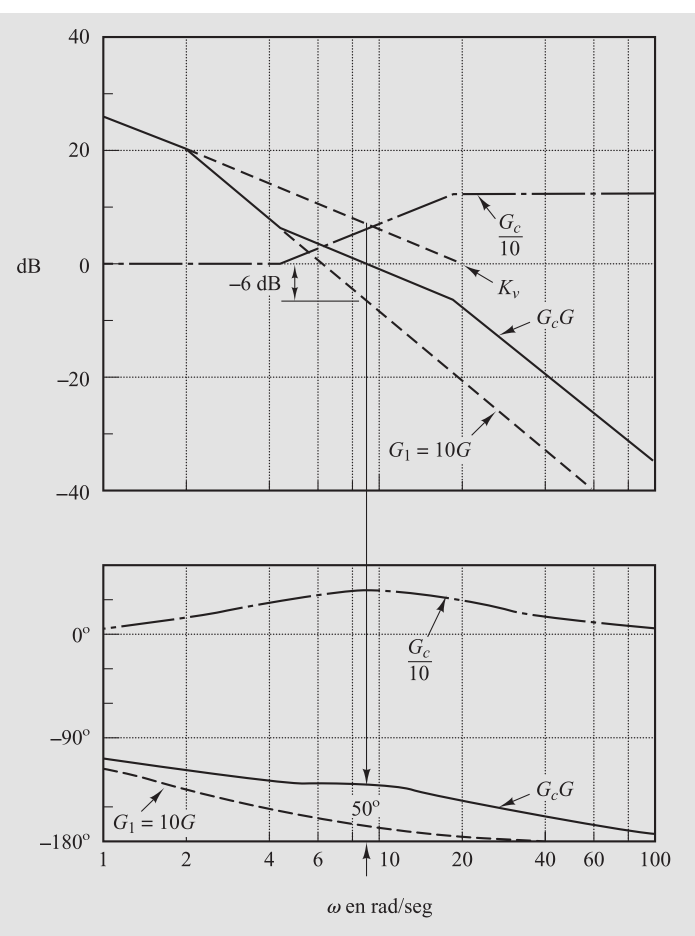


Figura 7-96. Diagrama de Bode del sistema compensado.

Las líneas de trazo continuo de la Figura 7-96 muestran la curva de magnitud y de fase del sistema compensado. Observe que el ancho de banda es aproximadamente igual a la frecuencia de cruce de ganancia. El compensador de adelanto hace que la frecuencia de cruce de ganancia aumente de 6.3 a 9 rad/seg. El incremento de esta frecuencia significa un aumento en el ancho de banda. Esto implica, a su vez, un incremento en la velocidad de respuesta. Se observa que los márgenes de fase y de ganancia son aproximadamente de 50º y $+\infty$ dB, respectivamente. Por tanto, el sistema compensado que se muestra en la Figura 7-97 cumple los requisitos de estado estacionario y de estabilidad relativa.

Observe que, para los sistemas de tipo 1, como el sistema que se acaba de considerar, el valor de la constante de error estático de velocidad K_v es simplemente el valor de la frecuencia en la intersección de la extensión de la línea de pendiente inicial -20 dB/década con la línea de 0 dB, como se muestra en la Figura 7-96. Observe también que se ha cambiado la pendiente de la curva de magnitud cerca de la frecuencia de cruce de ganancia de -40 dB/década a -20 dB/década.

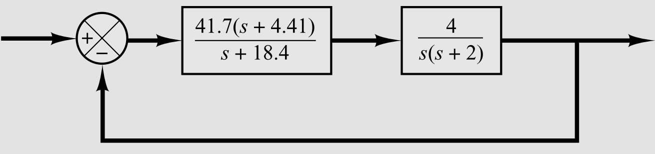


Figura 7-97. Sistema compensado.

La Figura 7-98 muestra los diagramas polares de la función de transferencia en lazo abierto no compensada pero ajustada en ganancia $G_1(j\omega) = 10\,G(j\omega)$ y de la función de transferencia en lazo abierto compensada $G_c(j\omega)G(j\omega)$. De la citada figura se observa que la frecuencia de resonancia del sistema no compensado es de alrededor de 6 rad/seg y que la del sistema compensado es de aproximadamente 7 rad/seg. (Esto también indica que se ha incrementado el ancho de banda.)

De la Figura 7-98 se encuentra que el valor del pico de resonancia M_r para el sistema no compensado con $K = 10$ es 3. El valor de M_r para el sistema compensado es 1.29. Esto muestra claramente que el sistema compensado ha mejorado su estabilidad.

Observe que, si el ángulo de fase de $G_1(j\omega)$ cerca de la frecuencia de cruce de ganancia disminuye rápidamente, la compensación de adelanto pierde su efectividad, porque el desplazamiento en la frecuencia de cruce de ganancia hacia la derecha hace difícil poder proporcionar un adelanto de fase suficiente para la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Esto significa que, con el fin de aportar el margen de fase deseado, se debe usar un valor de α muy pequeño. Sin embargo, el valor de α no debe ser demasiado pequeño (menor que 0.05), ni el adelanto de fase máximo ϕ_m debe ser demasiado grande (mayor que 65°), porque tales valores requerirán una ganancia adicional con un valor excesivo. [Si se necesitan más de 65°, se pueden utilizar dos (o más) redes de adelanto en serie, con un amplificador de aislamiento.]

Finalmente, se examinarán las características de la respuesta transitoria del sistema diseñado. Se obtendrán las curvas de respuesta escalón unitario y rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado con MATLAB. Observe que las funciones de transferencia en lazo cerrado de los sistemas no compensado y compensado vienen dadas, respectivamente, por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

y

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{166.8s + 735.588}{s^3 + 20.4s^2 + 203.6s + 735.588}$$

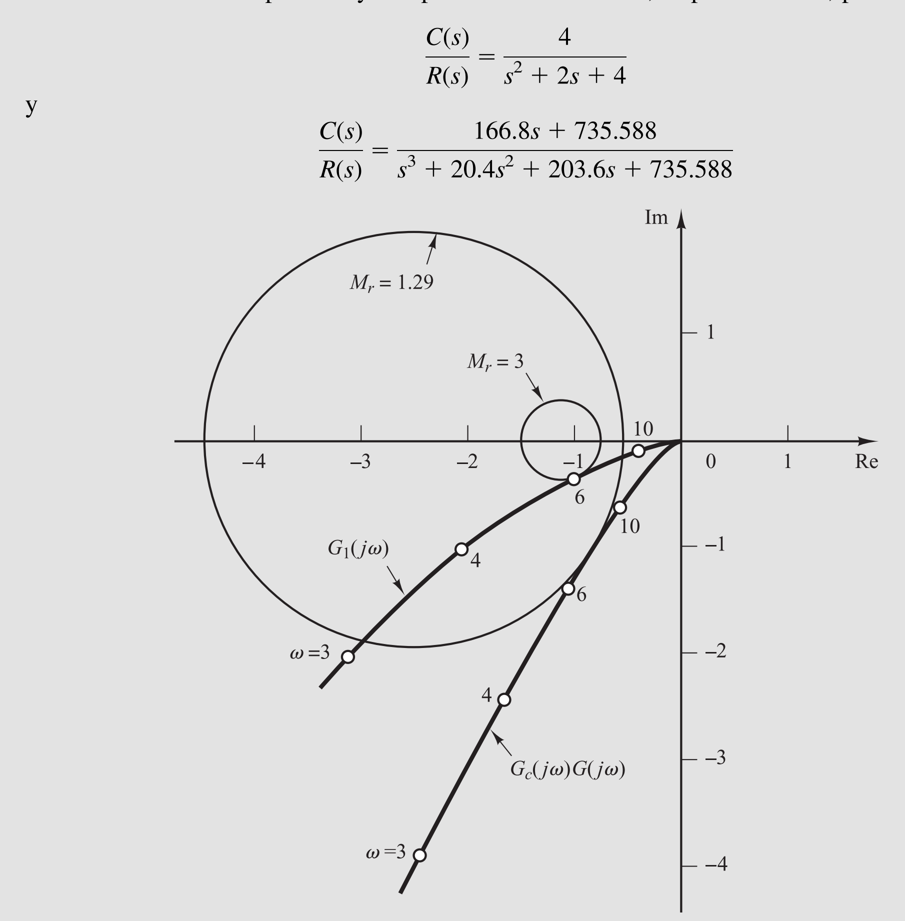


Figura 7-98. Diagramas polares de la función de transferencia en lazo abierto no compensada pero ajustada en ganancia G_1 y de la función de transferencia en lazo abierto compensada G_cC.

El Programa de MATLAB 7-13 permite obtener las curvas de respuesta escalón unitario y rampa unitaria. La Figura 7-99 muestra las curvas de la respuesta a un escalón unitario del sistema antes y después de la compensación. También la Figura 7-100 representa las curvas de respuesta a una rampa unitaria antes y después de la compensación. Estas curvas de respuesta indican que el sistema diseñado es satisfactorio.

MATLAB Programa 7-13

```
%*****Respuestas a un escalón unitario*****
num=[4];
den=[1  2  4];
numc=[166.8  735.588];
denc=[1  20.4  203.6  735.588];
t=0:0.02:6;
[c1,x1,t]=step(num,den,t);
[c2,x2,t]=step(numc,denc,t);
plot (t,c1,'.',t,c2,'-')
grid
title('Respuestas a escalón unitario de sistemas compensado y no compensado')
xlabel ('t Sec')
ylabel('Salidas')
text (0.4,1.31,'Sistema compensado')
text (1.55,0.88,'Sistema no compensado')
%*****Respuestas a una rampa unitaria*****
num1=[4];
den1=[1  2  4  0];
num1c=[166.8  735.588];
den1c=[1  20.4  203.6  735.588  0];
t=0:0.02:5;
[y1,z1,t]=step(num1,den1,t);
[y2,z2,t]=step(num1c,den1c,t);
plot (t,y1,'.',t,y2,'-',t,t,'--')
grid
title ('Respuestas a rampa unitaria de sistemas compensado y no compensado')
xlabe ('t Seg')
ylabel ('Salidas')
text (0.89,3.7,'Sistema compensado')
text (2.25,1.1,'Sistema no compensado')
```

Se observa que los polos en lazo cerrado del sistema compensado están localizados en:

$$s = -6.9541 + j8.0592$$

$$s = -6.4918$$

Como los polos dominantes en lazo cerrado se localizan lejos del eje $j\omega$, la respuesta se amortigua con rapidez.

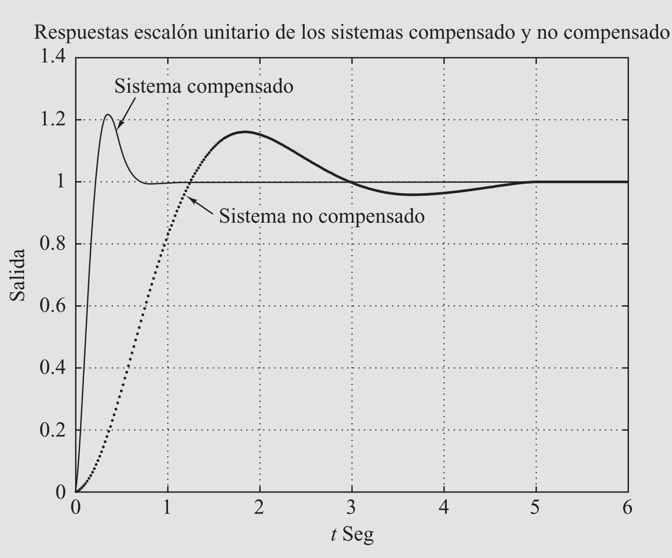


Figura 7-99. Curvas de respuesta escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado.

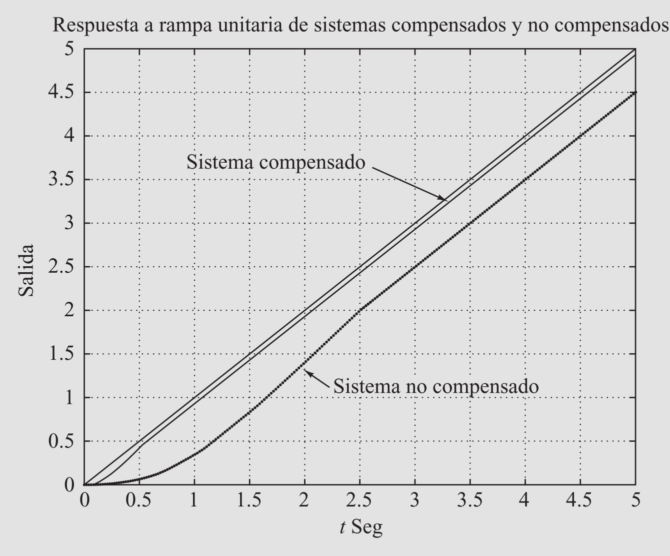


Figura 7-100. Curvas de respuesta rampa unitaria de sistemas compensado y no compensado.

7-12 Compensación de retardo

En esta sección se analizará, en primer lugar, el diagrama de Nyquist y los diagramas de Bode del compensador de retardo. A continuación se presentarán las técnicas de compensación de retardo basadas en el método de la respuesta en frecuencia.

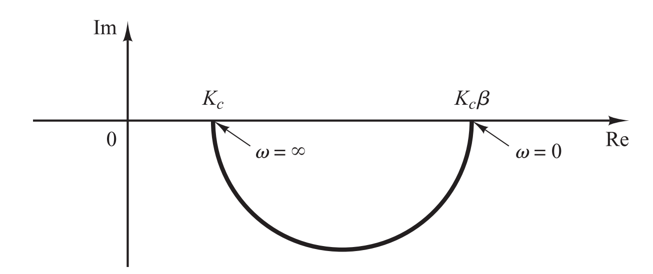


Figura 7-101. Diagrama polar de un compensador de retardo $K_c\beta(j\omega T + 1)/(j\omega\beta T + 1)$.

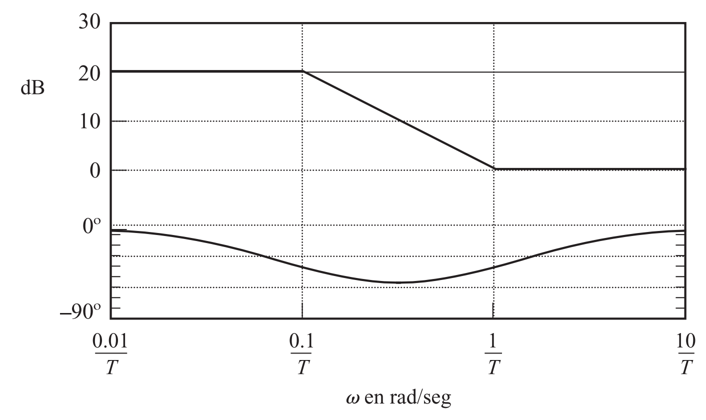


Figura 7-102. Diagrama de Bode de un compensador de retardo $\beta(j\omega T + 1)/(j\omega\beta T + 1)$ con $\beta = 10$.

Características de los compensadores de retardo. Sea un compensador de retardo que tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = K_c\beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c \frac{s + \dfrac{1}{T}}{s + \dfrac{1}{\beta T}} \qquad (\beta > 1)$$

En el plano complejo, un compensador de retardo tiene un cero en $s = -1/T$ y un polo en $s = -1/(\beta T)$. El polo está localizado a la derecha del cero.

La Figura 7-101 muestra un diagrama polar del compensador de retardo. La Figura 7-102 contiene los diagramas de Bode del compensador, donde $K_c = 1$ y $\beta = 10$. Las frecuencias esquinas del compensador de retardo están en $\omega = 1/T$ y $\omega = 1/(\beta T)$. Como se observa en la Figura 7-102, donde los valores de K_c y β se hacen igual a 1 y 10, respectivamente, la magnitud del compensador de retardo es de 10 (o 20 dB) a bajas frecuencias, y 1 (o 0 dB) a altas frecuencias. Por tanto, el compensador de retardo es esencialmente un filtro paso baja.

Técnicas de compensación de retardo basadas en el método de la respuesta en frecuencia. La función principal de un compensador de retardo es proporcionar una atenuación en el rango de las altas frecuencias a fin de aportar un margen de fase suficiente al sistema. La característica de retardo de fase no tiene importancia en la compensación por retardo.

El procedimiento para diseñar compensadores de retardo para el sistema que se muestra en la Figura 7-93, mediante el método de la respuesta en frecuencia, se puede plantear del modo siguiente:

1. Suponga el siguiente compensador de retardo:

$$G_c(s) = K_c\beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \qquad (\beta > 1)$$

Defina

$$K_c\beta = K$$

Entonces,

$$G_c(s) = K \frac{Ts+1}{\beta Ts+1}$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = K \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} G(s) = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} KG(s) = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} G_1(s)$$

donde

$$G_1(s) = KG(s)$$

Determine la ganancia K que satisfaga los requisitos sobre la constante de error estático de velocidad.

2. Si el sistema no compensado pero ajustado en ganancia $G_1(j\omega) = KG(j\omega)$ no satisface las especificaciones en los márgenes de fase y de ganancia, entonces encuentre la frecuencia en la cual el ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto sea igual a -180° más el margen de fase requerido. Este es el margen de fase especificado más 5° a 12°. (La adición de entre 5° y 12° compensa el desfase que introduce el compensador de retardo.) Seleccione esta frecuencia como la nueva frecuencia de cruce de ganancia.

3. Para evitar los efectos adversos del desfase producido por el compensador de retardo, el polo y el cero del compensador de retardo deben localizarse sustancialmente por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Por tanto, seleccione la frecuencia esquina $\omega = 1/T$ (que corresponde al cero del compensador de retardo) entre una octava y una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia. (Si las constantes de tiempo del compensador de retardo no se hacen demasiado grandes, la frecuencia esquina $\omega = 1/T$ se puede escoger una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia.)

Observe que se selecciona el polo y el cero del compensador suficientemente pequeños. Así el retardo de fase ocurre en la región de bajas frecuencias de manera que no afecta al margen de fase.

4. Determine la atenuación necesaria para llevar la curva de magnitud a 0 dB en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Si se considera que esta atenuación es de $-20 \log \beta$, determine el valor de β. A continuación se obtiene la otra frecuencia esquina (que corresponde al polo del compensador de retardo) a partir de $\omega = 1(\beta T)$.

5. Usando el valor de K determinado en el paso 1 y el de β obtenido en el paso 5, calcule la constante K_c a partir de

$$K_c = \frac{K}{\beta}$$

EJEMPLO 7-27 Sea el sistema que se muestra en la Figura 7-103. La función de transferencia en lazo abierto viene dada por

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

Se desea compensar el sistema de forma que la constante de error estático de velocidad K_v sea de 5 seg^{-1}, el margen de fase sea al menos de 40° y el margen de ganancia sea al menos de 10 dB.

Se utilizará un compensador de retardo de la forma

$$G_c(s) = K_c\beta\,\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c\,\frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\beta T}} \qquad (\beta > 1)$$

Defina

$$K_c\beta = K$$

También defina

$$G_1(s) = KG(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

El primer paso en el diseño es ajustar la ganancia K para que se cumpla la especificación sobre la constante de error estático de velocidad. Por tanto,

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0}\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}\,G_1(s) = \lim_{s\to 0} sG_1(s)$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{sK}{s(s+1)(0.5s+1)} = K = 5$$

o bien

$$K = 5$$

Con $K = 5$, el sistema compensado satisface la especificación de comportamiento en estado estacionario.

A continuación se presenta el diagrama de Bode de

$$G_1(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega+1)(0.5j\omega+1)}$$

Figura 7-103. Sistema de control.

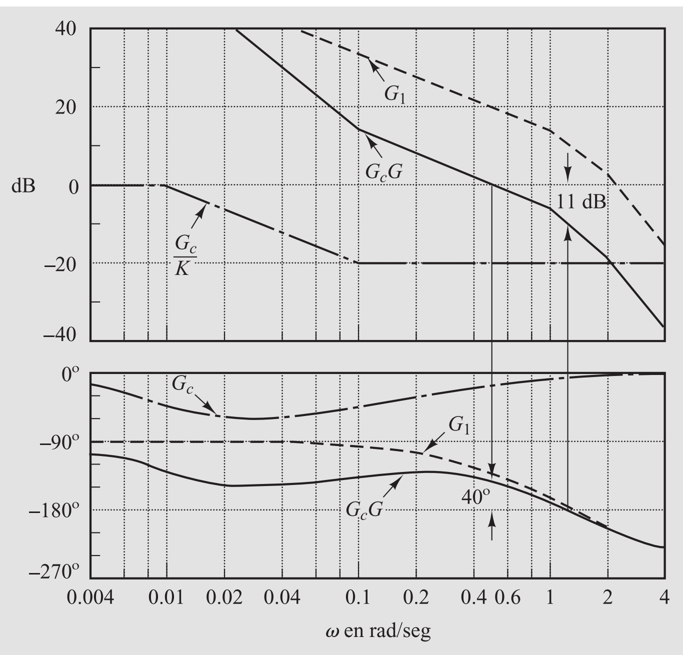


Figura 7-104. Diagramas de Bode de G_1 (función de transferencia en lazo abierto no compensada pero ajustada en ganancia), G_c (compensador) y G_cG (función de transferencia en lazo abierto compensada).

En la Figura 7-104 se muestran las curvas de magnitud y fase de $G_1(j\omega)$. A partir de estas gráficas, se observa que el margen de fase es de -20°, lo que significa que el sistema no compensado pero ajustado en ganancia es inestable.

Si se considera que la adición de un compensador de retardo modifica la curva de fase de los diagramas de Bode, se debe permitir entre 5º y 12º con el fin de que el margen de fase especificado compense la modificación de la curva de fase. Como la frecuencia correspondiente a un margen de fase de 40º es de 0.7 rad/seg, la nueva frecuencia de cruce de ganancia (del sistema compensado) debe seleccionarse cercana a este valor. Para evitar constantes de tiempo muy grandes en el compensador de retardo, se debe elegir la frecuencia esquina $\omega = 1/T$ (que corresponde al cero del compensador de retardo) como 0.1 rad/seg. Como esta frecuencia esquina no está muy por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia, la modificación de la curva de fase tal vez no sea pequeña. Por tanto, se añade alrededor de 12º al margen de fase proporcionado, como una tolerancia para tomar en consideración el ángulo de retardo introducido por el compensador de retardo. El margen de fase requerido es ahora de 52º. El ángulo de fase de la función de transferencia en lazo abierto no compensada es de -128º en la cercanía de $\omega = 0.5$ rad/seg. Por tanto, se escoge la nueva frecuencia de cruce de ganancia como 0.5 rad/seg. Para traer la curva de magnitud hasta 0 dB en esta nueva frecuencia de cruce de ganancia, el compensador de retardo debe proporcionar la atenuación necesaria, que en este caso es de -20 dB. Por tanto,

$$20 \log \frac{1}{\beta} = -20$$

o bien

$$\beta = 10$$

La otra frecuencia esquina $\omega = 1(\beta T)$, que corresponde al polo del compensador de retardo, se determina, entonces, como

$$\frac{1}{\beta T} = 0.01 \text{ rad/seg}$$

Así, la función de transferencia del compensador de retardo es

$$G_c(s) = K_c(10)\frac{10s+1}{100s+1} = K_c\frac{s+\frac{1}{10}}{s+\frac{1}{100}}$$

Como la ganancia K se determinó como 5 y β como 10, se tiene que

$$K_c = \frac{K}{\beta} = \frac{5}{10} = 0.5$$

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = \frac{5(10s+1)}{s(100s+1)(s+1)(0.5s+1)}$$

En la Figura 7-104 también se muestran las curvas de magnitud y fase de $G_c(j\omega)G(j\omega)$.

El margen de fase del sistema compensado es de alrededor de 40º, que es el valor requerido. El margen de ganancia es de aproximadamente 11 dB, valor bastante aceptable. La constante de error estático de velocidad es de 5 seg^{-1}, tal como se requiere. Por tanto, el sistema compensado satisface los requisitos en estado estacionario y de estabilidad relativa.

Observe que esta nueva frecuencia de cruce de ganancia disminuyó de aproximadamente 1 a 0.5 rad/seg. Esto significa que el ancho de banda del sistema se redujo.

Para apreciar mejor los efectos de la compensación de retardo, en la Figura 7-105 se muestran los diagramas de magnitud logarítmica respecto de la fase del sistema no compensado $G_1(j\omega)$ y del sistema compensado $G_c(j\omega)G(j\omega)$. El diagrama de $G_1(j\omega)$ muestra claramente que el sistema no compensado es inestable. Al añadir el compensador de retardo el sistema se estabiliza. El diagrama de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ es tangente al lugar geométrico $M = 3$ dB. Por tanto, el valor del pico de resonancia es de 3 dB, o 1.4, y este pico ocurre en $\omega = 0.5$ rad/seg.

Compensadores diseñados con métodos diferentes o por diseñadores distintos (incluso mediante el mismo procedimiento) pueden resultar muy diferentes. Sin embargo, cualquier sistema bien diseñado tendrá un comportamiento transitorio y en estado estacionario similar. La mejor entre muchas alternativas se elige a partir de la consideración económica de que las constantes de tiempo del compensador de retardo no deben ser demasiado grandes.

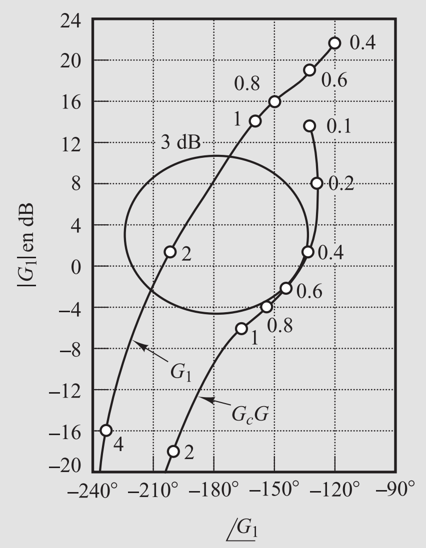


Figura 7-105. Diagramas de la magnitud logarítmica respecto de la fase de G_1 (función de transferencia en lazo abierto no compensada pero ajustada en ganancia) y G_cG (función de transferencia en lazo abierto compensada).

Finalmente se examinará la respuesta escalón unitario y la respuesta rampa unitaria del sistema compensado y del sistema no compensado original. Las funciones de transferencia en lazo cerrado de los sistemas compensado y no compensado son

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{50s + 5}{50s^4 + 150.5s^3 + 101.5s^2 + 51s + 5}$$

y

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{0.5s^3 + 1.5s^2 + s + 1}$$

respectivamente. El Programa MATLAB 7-14 genera las respuestas escalón unitario y rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado. En las Figuras 7-106 y 7-107 se muestran respectivamente las curvas de respuesta escalón unitario y rampa unitaria resultantes. A partir de las curvas de respuesta se encuentra que el sistema diseñado satisface las especificaciones dadas y que es satisfactorio.

MATLAB Programa 7-14

```
%*****Respuesta escalón unitario*****

num=[1];
den=[0.5  1.5  1  1];
numc=[50  5];
denc=[50  150.5  101.5  51  5];
t=0:0.1:40;
[c1,x1,t]=step(num,den,t);
[c2,x2,t]=step(numc,denc,t);
plot (t,c1,'.',t,c2,'-')
grid
title ('Respuesta a escalón unitario de sistemas compensado y no compensado')
xlabe l('t Sec')
ylabel ('Outputs')
text (12.7,1.27,'Sistema compensado')
text(12.2,0.7, 'Sistema no compensado')

%*****Respuesta rampa unitaria*****

num1=[1];
den1=[0.5  1.5  1  1  0];
num1c=[50  5];
den1c=[50  150.5  101.5  51  5  0];
t=0:0.1:20;
[y1,z1,t]=step(num1,den1,t);
[y2,z2,t]=step(num1c,den1c,t);
plot (t,y1,'.',t,y2,'-',t,t,'--');
grid
title ('Respuestas a rampa unitaria de sistemas compensado y no compensado')
xlabel ('t Sec')
ylabel ('Outputs')
text (8.3,3,'Sistema compensado')
text (8.3,5,'Sistema no compensado')
```

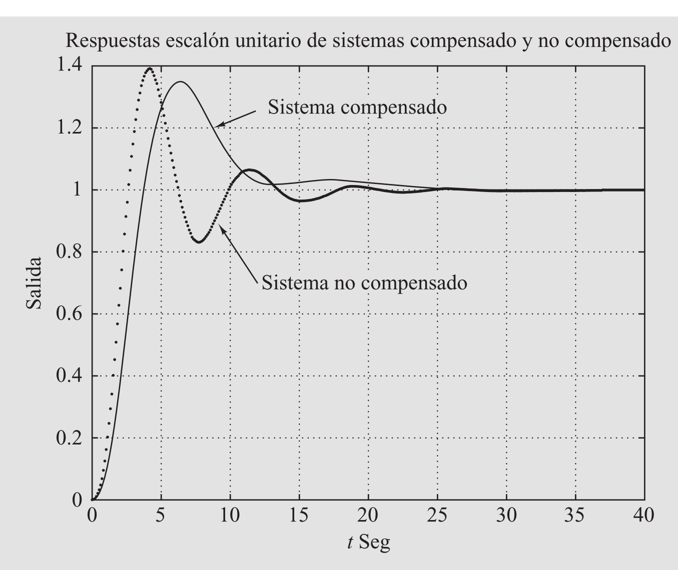


Figura 7-106. Curvas de respuesta escalón unitario para los sistemas compensado y no compensado (Ejemplo 7-27).

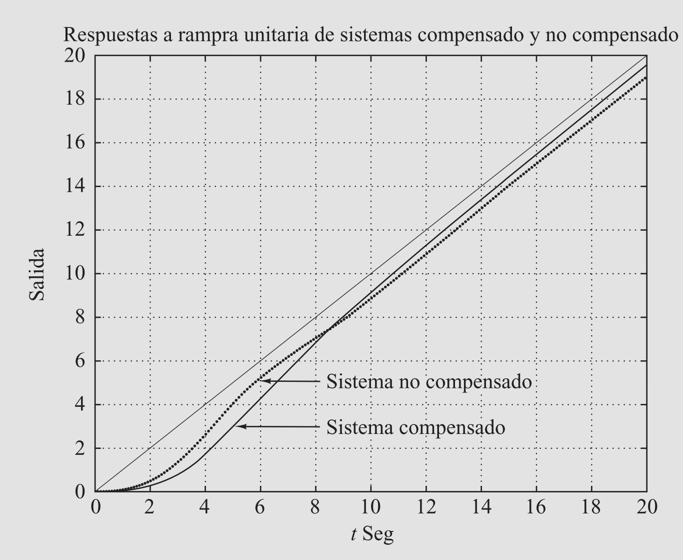


Figura 7-107. Curvas de respuesta rampa unitaria para los sistemas compensado y no compensado (Ejemplo 7-27).

Observe que el cero y los polos del sistema en lazo cerrado diseñado son los siguientes:

$$\text{Cero en } s = -0.1$$

$$\text{Polos en } s = -0.2859 + j0.5196, \qquad s = -0.1228, \qquad s = -2.3155$$

Los polos dominantes en lazo cerrado están muy próximos al eje $j\omega$, por lo que la respuesta es lenta. Asimismo, el par formado por el polo en lazo cerrado en $s = -0.1228$ y el cero en $s = -0.1$ produce una cola lentamente decreciente de amplitud pequeña.

Algunos comentarios sobre la compensación de retardo

1. Los compensadores de retardo son, en esencia, filtros paso baja. Por tanto, la compensación de retardo permite una ganancia alta a bajas frecuencias (que mejora el comportamiento en estado estacionario) y reduce la ganancia en el rango de las frecuencias críticas más altas, a fin de mejorar el margen de fase. Obsérvese que en la compensación de retardo se utiliza la característica de atenuación del compensador de retardo en las altas frecuencias, en lugar de la característica del retardo de fase. (La característica de retardo de fase no sirve para los fines de la compensación.)

2. Supóngase que el cero y el polo de un compensador de retardo están localizados en $s = -z$ y $s = -p$, respectivamente. Entonces, la localización exacta del cero y el polo no es crítica, a condición de que estén cerca del origen, y que el cociente z/p sea igual al factor de multiplicación requerido de la constante de error estático de velocidad.

   Sin embargo, debe señalarse que el cero y el polo del compensador de retardo no deberían estar innecesariamente cerca del origen, porque el compensador de retardo creará un polo adicional en lazo cerrado en la misma región que el cero y el polo del compensador de retardo.

   El polo en lazo cerrado que está cerca del origen proporciona una respuesta transitoria decreciente muy lenta, aunque su magnitud se vuelve muy pequeña porque el cero del compensador de retardo casi cancela el efecto de este polo. Sin embargo, la respuesta transitoria (decaimiento) debida a este polo es tan lenta que el tiempo de asentamiento se verá negativamente afectado.

   También se observa que, en el sistema compensado mediante el compensador de retardo, la función de transferencia entre la perturbación de la planta y el error del sistema tal vez no contenga un cero cerca de este polo. Por tanto, es posible que la respuesta transitoria a la entrada de perturbación dure mucho tiempo.

3. La atenuación debida al compensador de retardo desplaza la frecuencia de cruce de ganancia a una frecuencia más baja en la cual el margen de fase sea aceptable. Por tanto, el compensador de retardo reduce el ancho de banda del sistema y provoca una respuesta transitoria más lenta. [La curva de fase de $G_c(j\omega)G(j\omega)$ se encuentra relativamente sin modificaciones alrededor y por encima de la nueva frecuencia de cruce de ganancia.]

4. Como el compensador de retardo tiende a integrar la señal de entrada, actúa más o menos como un controlador proporcional-integral. Por esta razón, un sistema compensado por retardo tiende a hacerse menos estable. Para evitar esta característica no deseable, la constante de tiempo T debería ser suficientemente más grande que la mayor constante de tiempo del sistema.

5. Puede producirse estabilidad condicional cuando un sistema que tiene saturación o limitaciones se ajusta mediante un compensador de retardo. Cuando la saturación o la limitación tienen lugar en el sistema, se reduce la ganancia de lazo efectiva. Así, el sistema se vuelve menos estable e incluso puede operar de manera inestable, tal como se muestra en la Figura 7-108. Para evitar esto, el sistema debe diseñarse de modo que el efecto de la compensación de retardo se vuelva significativo sólo cuando la amplitud de la entrada al elemento de saturación sea pequeña. (Esto se consigue con una compensación mediante un lazo de realimentación interno.)

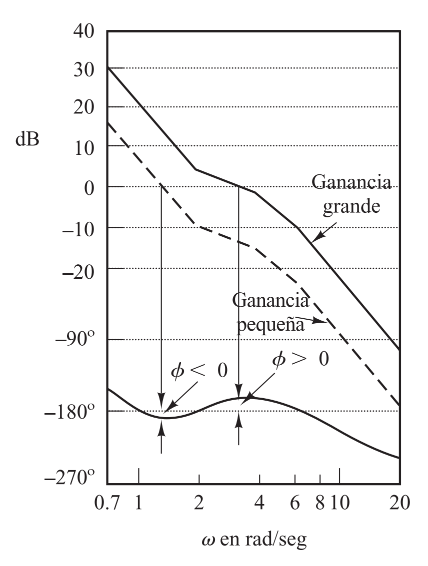


Figura 7-108. Diagramas de Bode de un sistema condicionalmente estable.

7-13 Compensación de retardo-adelanto

En primer lugar se examinarán las características de respuesta del compensador de retardo-adelanto. Después se presentará la técnica de compensación de retardo-adelanto basada en el método de la respuesta en frecuencia.

Característica del compensador de retardo-adelanto. Sea el compensador de retardo-adelanto obtenido mediante

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \tag{7-27}$$

donde $\gamma > 1$ y $\beta > 1$. El término

$$\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T_1 s + 1}{\frac{T_1}{\gamma} s + 1} \right) \qquad (\gamma > 1)$$

produce el efecto de una red de adelanto, y el término

$$\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} = \beta \left(\frac{T_2 s + 1}{\beta T_2 s + 1} \right) \qquad (\beta > 1)$$

produce el efecto de una red de retardo.

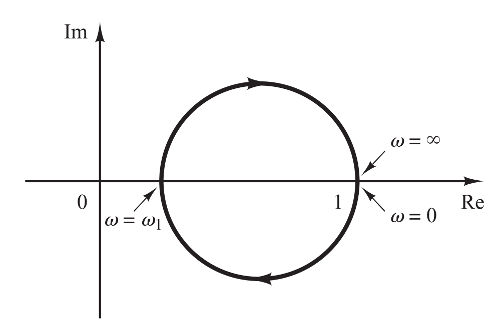


Figura 7-109. Diagrama polar de un compensador de retardo-adelanto obtenido mediante la Ecuación (7-27), con $K_c = 1$ y $\gamma = \beta$.

Al diseñar un compensador de retardo-adelanto, es común seleccionar $\gamma = \beta$. (Esto no es necesario. Por supuesto, se puede elegir $\gamma \neq \beta$.) A continuación, se considerará el caso en que $\gamma = \beta$. El diagrama polar del compensador de retardo-adelanto con $K_c = 1$ y $\gamma = \beta$ es el que se muestra en la Figura 7-109. Obsérvese que, para $0 < \omega < \omega_1$, el compensador actúa como un compensador de retardo, mientras que, para $\omega_1 < \omega < \infty$, funciona como un compensador de adelanto. La frecuencia ω_1 es aquella en la cual el ángulo de fase es cero. Viene dada por

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

(Para deducir esta ecuación, véase el Problema **A-7-21**.)

La Figura 7-110 muestra los diagramas de Bode del compensador de retardo-adelanto cuando $K_c = 1$, $\gamma = \beta = 10$ y $T_2 = 10T_1$. Obsérvese que la curva de magnitud tiene un valor de 0 dB en las regiones de bajas y altas frecuencias.

Compensación de retardo-adelanto basada en el método de la respuesta en frecuencia. El diseño de un compensador de retardo-adelanto mediante el método de la respues-

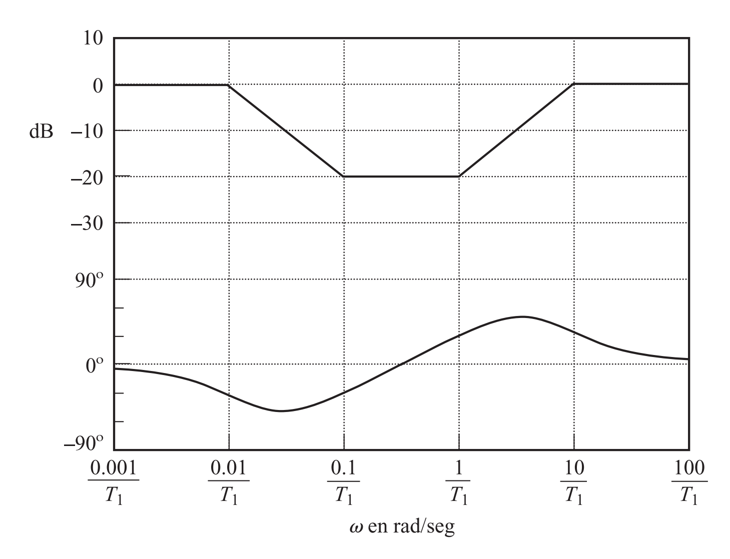


Figura 7-110. Diagrama de Bode de un compensador de retardo-adelanto obtenido mediante la Ecuación (7-27), con $K_c = 1$ y $\gamma = \beta = 10$, y $T_2 = 10T_1$.

ta en frecuencia se basa en la combinación de las técnicas de diseño analizadas en la compensación de adelanto y la compensación de retardo.

Supóngase que el compensador de retardo-adelanto tiene la forma siguiente:

$$G_c(s) = K_c \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \tag{7-28}$$

donde $\beta > 1$. La parte de adelanto de fase del compensador de retardo-adelanto (la parte que contiene T_1) altera la curva de respuesta en frecuencia añadiendo un ángulo de adelanto de fase e incrementando el margen de fase en la frecuencia de cruce de ganancia. La parte de retardo de fase (la parte que contiene T_2) proporciona una atenuación cerca y por encima de la frecuencia de cruce de ganancia y, por tanto, permite un incremento de la ganancia en el rango de bajas frecuencias que mejora el comportamiento en estado estacionario.

Se ilustran los detalles de los procedimientos para diseñar un compensador de retardo-adelanto mediante un ejemplo.

EJEMPLO 7-28 Sea el sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

Se desea que la constante de error estático de velocidad sea de 10 seg^{-1}, que el margen de fase sea de 50° y que el margen de ganancia sea de 10 dB o más.

Suponga que se usa el compensador de retardo-adelanto dado por la Ecuación (7-28). [Observe que la parte de adelanto de fase aumenta tanto el margen de fase como el ancho de banda (que implica aumentar la velocidad de respuesta). La parte de retardo de fase mantiene la ganancia a bajas frecuencias.]

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es $G_c(s)G(s)$. Como la ganancia K de la planta es ajustable, se supone que $K_c = 1$. En este caso, $\lim_{s\to 0} G_c(s) = 1$.

A partir del requisito sobre la constante de error estático de velocidad, se obtiene

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sG_c(s)\frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K}{2} = 10$$

Por tanto,

$$K = 20$$

A continuación se dibujan los diagramas de Bode del sistema no compensado con $K = 20$, tal como se muestra en la Figura 7-111. El margen de fase del sistema no compensado pero ajustado en ganancia es de -32°, lo que indica que el sistema es inestable.

El paso siguiente en el diseño de un compensador de retardo-adelanto es seleccionar una nueva frecuencia de cruce de ganancia. A partir de la curva de fase de $G(j\omega)$, se observa que $\angle G(j\omega) = -180°$ en $\omega = 1.5$ rad/seg. Es conveniente elegir la nueva frecuencia de cruce de ganancia como 1.5 rad/seg, a fin de que el adelanto de fase requerido en $\omega = 1.5$ rad/seg sea de alrededor de 50°, lo que es muy posible mediante una red de retardo-adelanto.

Una vez que se ha seleccionado la frecuencia de cruce de ganancia en 1.5 rad/seg se puede determinar la frecuencia esquina de la parte de retardo de fase del compensador de retardo-adelanto. Se selecciona la frecuencia esquina $\omega = 1/T_2$ (que corresponde al cero de la parte de retardo de fase del compensador) que se encuentra una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia, o en $\omega = 0.15$ rad/seg.

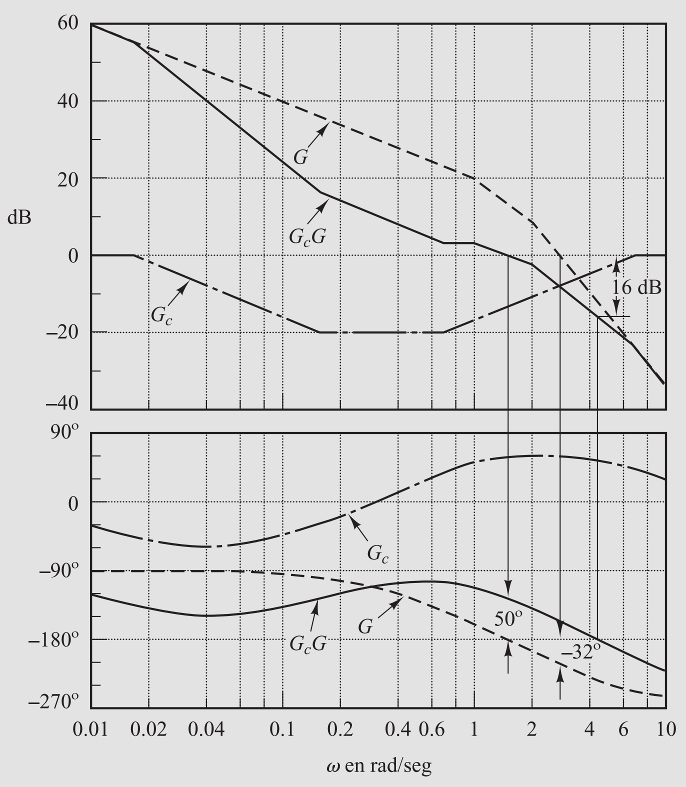


Figura 7-111. Diagramas de Bode de G (función de transferencia en lazo abierto no compensada pero ajustada en ganancia), G_c (compensador) y G_cG (función de transferencia en lazo abierto compensada).

Recuerde que, para el compensador de adelanto, el máximo adelanto de fase ϕ_m viene dado por la Ecuación (7-25), donde α es $1/\beta$ en el caso actual. Sustituyendo $\alpha = 1/\beta$ en la Ecuación (7-25), se tiene que

$$\operatorname{sen} \phi_m = \frac{1 - \dfrac{1}{\beta}}{1 + \dfrac{1}{\beta}} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

Conviene darse cuenta de que $\beta = 10$ corresponde a $\phi_m = 54.9^{\circ}$. Como se necesita un margen de fase de 50º, se puede seleccionar $\beta = 10 = 10$. (Observe que se usarán algunos grados menos que el ángulo máximo, 54.9º.) Por tanto,

$$\beta = 10$$

Así, la frecuencia esquina $\omega = 1/\beta T_2$ (que corresponde al polo de la parte de retardo de fase del compensador) es $\omega = 0.015$ rad/seg. La función de transferencia de la parte de retardo de fase del compensador de retardo-adelanto es entonces

$$\frac{s + 0.15}{s + 0.015} = 10\left(\frac{6.67s + 1}{66.7s + 1}\right)$$

La parte de adelanto de fase se puede determinar del modo siguiente. Como la nueva frecuencia de cruce de ganancia es $\omega = 1.5$ rad/seg, de la Figura 7-111, se encuentra que $G(j1.5)$ es de 13 dB. A partir de este requisito, es posible dibujar una línea recta de pendiente 20 dB/década,

que pasa por el punto (1.5 rad/seg, -13 dB). Las intersecciones de esta línea con las líneas de 0 dB y -20 dB determinan las frecuencias esquina. Así, las frecuencias esquinas para la parte de adelanto son $\omega = 0.7$ rad/seg y $\omega = 7$ rad/seg. En este caso, la función de transferencia de la parte de adelanto del compensador de retardo-adelanto es

$$\frac{s + 0.7}{s + 7} = \frac{1}{10}\left(\frac{1.43s + 1}{0.143s + 1}\right)$$

Si se combinan las funciones de transferencia de las partes de retardo y de adelanto del compensador, se obtiene la función de transferencia del compensador de retardo-adelanto. Como se ha elegido $K_c = 1$, se tiene que

$$G_c(s) = \left(\frac{s + 0.7}{s + 7}\right)\left(\frac{s + 0.15}{s + 0.015}\right) = \left(\frac{1.43s + 1}{0.143s + 1}\right)\left(\frac{6.67s + 1}{66.7s + 1}\right)$$

La función de transferencia en lazo abierto compensada es

$$G_c(s)G(s) = \frac{(s+0.7)(s+0.15)20}{(s+7)(s+0.015)s(s+1)(s+2)} = \frac{10(1.43s+1)(6.67s+1)}{s(0.143s+1)(66.7s+1)(s+1)(0.5s+1)} \qquad (7\text{-}29)$$

En la Figura 7-111 se muestran también las curvas de magnitud y fase del compensador de retardo adelanto del sistema de la Ecuación (7-29). El margen de fase del sistema compensado es de 50°, el margen de ganancia es de 16 dB y la constante de error estático de velocidad es de 10 seg^{-1}. Por tanto, se cumplen todos los requisitos y el diseño queda completado.

La Figura 7-112 muestra los diagramas polares de $G(j\omega)$ (función de transferencia en lazo abierto no compensada pero ajustada en ganancia) y $G_c(j\omega)G(j\omega)$ (función de transferencia en lazo abierto compensada). $G_c(j\omega)G(j\omega)$ es tangente al círculo $M = 1.2$ alrededor de $\omega = 2$ rad/seg. Esto indica claramente que el sistema compensado tiene estabilidad relativa satisfactoria. El ancho de banda del sistema compensado es ligeramente mayor que 2 rad/seg.

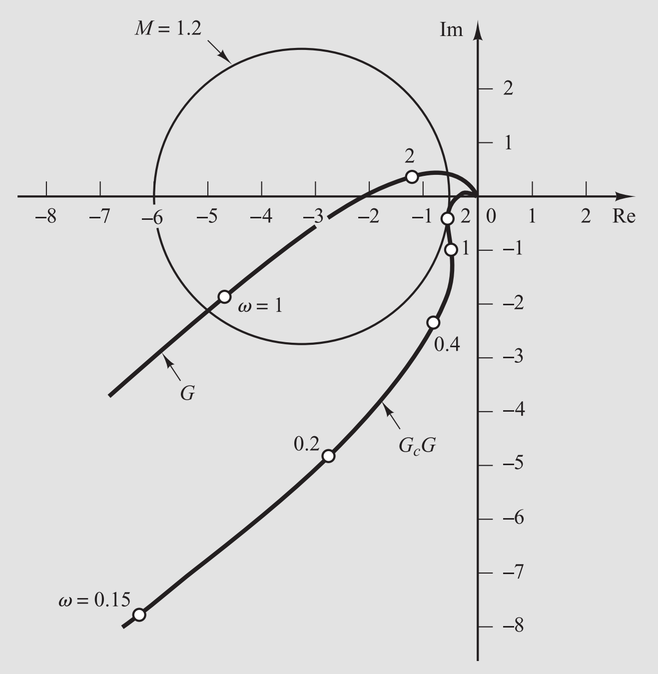


Figura 7-112. Diagramas polares de G (con la ganancia modificada) y G_cG.

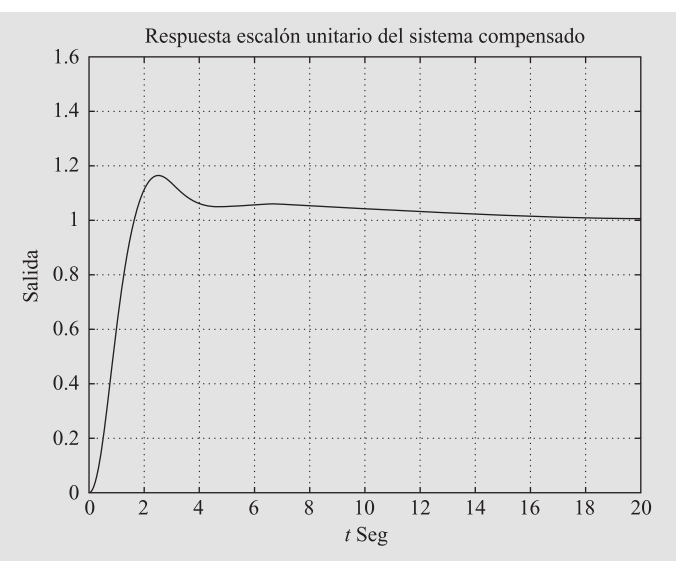


Figura 7-113. Respuesta escalón unitario del sistema compensado (Ejemplo 7-28).

A continuación se examinarán las características de la respuesta transitoria del sistema compensado. (El sistema no compensado pero ajustado en ganancia es inestable.) La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{95.381s^2 + 81s + 10}{4.7691s^2 + 47.7287s^4 + 110.3026s^3 + 163.724s^2 + 82s + 10}$$

En las Figuras 7-113 y 7-114 se muestran, respectivamente, las curvas de respuesta escalón unitario y rampa unitaria obtenidas con MATLAB.

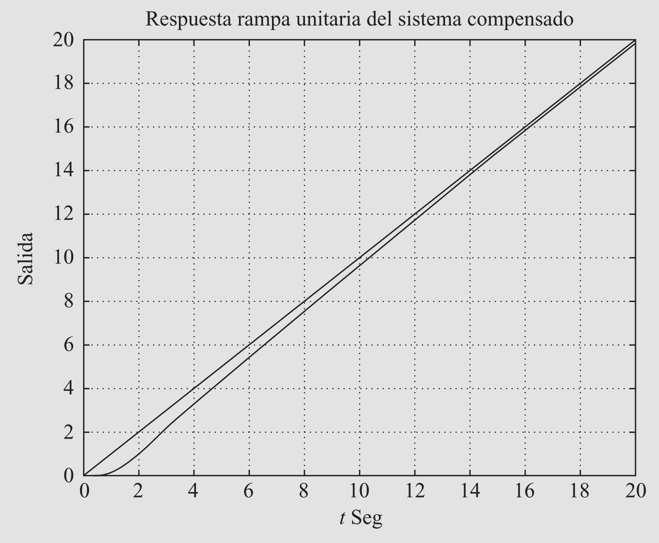


Figura 7-114. Respuesta rampa unitaria del sistema compensado (Ejemplo 7-28).

Observe que el sistema de control en lazo cerrado diseñado tiene los polos y ceros en lazo cerrado siguientes:

$$\text{Ceros en } s = -0.1499, \qquad s = -0.6993$$

$$\text{Polos en } s = -0.8973 \pm j1.4439$$

$$s = -0.1785, \qquad s = -0.5425, \qquad s = -7.4923$$

El polo en $s = -0.1785$ y el cero en $s = -0.1499$ se localizan muy cerca uno del otro. Esta pareja polo-cero produce una cola larga de pequeña amplitud en la respuesta escalón, tal como se muestra en la Figura 7-113. También, el polo en $s = -0.5425$ y el cero en $s = -0.6993$ se localizan relativamente cerca uno del otro. Este par añade amplitud a la larga cola.

Resumen del diseño de sistemas de control por el método de la respuesta en frecuencia. Las últimas tres secciones han presentado procedimientos detallados para diseñar compensadores de adelanto, de retardo y de retardo-adelanto, utilizando ejemplos simples. Se ha mostrado que el diseño de un compensador que satisfaga las especificaciones dadas (en términos de margen de fase y margen de ganancia) se puede realizar en el diagrama de Bode de una manera simple y directa. Debe observarse que no todos los sistemas se pueden compensar con un compensador de adelanto, retardo o retardo-adelanto. En algunos casos se pueden utilizar compensadores con polos y ceros complejos. Para aquellos sistemas que no se pueden diseñar utilizando los métodos del lugar de las raíces o de respuesta en frecuencia es posible emplear el método de asignación de polos. (Véase Capítulo 10.) En un problema de diseño dado, si se pueden emplear ambos tipos de métodos (los métodos del lugar de las raíces y de respuesta en frecuencia), normalmente suelen dar un compensador estable de menor orden. Obsérvese que un diseño satisfactorio de un compensador para un sistema complejo puede requerir una aplicación creativa de todos los métodos de diseño disponibles.

Comparación de las compensaciones de retardo, de adelanto y de retardo-adelanto

1. La compensación de adelanto proporciona el resultado deseado mediante su contribución al adelanto de la fase, mientras que la compensación de retardo logra el resultado a través de su propiedad de atenuación a altas frecuencias. (En algunos problemas de diseño, la compensación de retardo y la compensación de adelanto pueden satisfacer las especificaciones.)
2. La compensación de adelanto suele usarse para mejorar los márgenes de estabilidad. La compensación de adelanto da una frecuencia de cruce de ganancia más alta que la que puede obtenerse con la compensación de retardo. La frecuencia de cruce de ganancia más alta significa un mayor ancho de banda. Un ancho de banda grande implica una reducción en el tiempo de asentamiento. El ancho de banda de un sistema con compensación de adelanto siempre es mayor que el de otro con compensación de retardo. Por tanto, si se desea un ancho de banda grande o una respuesta rápida, debe emplearse la compensación de adelanto. Sin embargo, si hay señales de ruido, tal vez no sea adecuado un ancho de banda grande, porque esto hace al sistema más sensible a las señales de ruido, debido al incremento de la ganancia a altas frecuencias.
3. La compensación de adelanto requiere un incremento adicional en la ganancia para compensar la atenuación inherente a la red de adelanto. Esto significa que la compensación de adelanto requiere una ganancia mayor que la que precisa la compensación de retardo. Una ganancia mayor casi siempre implica mayor espacio, mayor peso y un coste más elevado.

4. La compensación de adelanto puede generar grandes señales en el sistema. Estas señales no son deseables porque pueden originar saturaciones en el sistema.
5. La compensación de retardo reduce la ganancia del sistema a altas frecuencias sin reducirla a bajas frecuencias. Como el ancho de banda del sistema se reduce, este responde a una velocidad más lenta. Debido a la ganancia reducida a altas frecuencias, la ganancia total del sistema se incrementa, y, por tanto, también aumenta la ganancia a bajas frecuencias y mejora así la precisión en estado estacionario. Asimismo, los ruidos a altas frecuencias que contiene el sistema se atenúan.
6. La compensación de retardo introduce una combinación polo-cero cerca del origen que genera una larga cola de pequeña amplitud en la respuesta transitoria.
7. Si se desean respuestas rápidas y suficiente precisión estática, se puede emplear un compensador de retardo-adelanto. Este compensador incrementa la ganancia a bajas frecuencias (lo que significa una mejora en la precisión en estado estacionario) y, al mismo tiempo, se incrementa el ancho de banda y los márgenes de estabilidad del sistema.
8. Aunque con los compensadores de adelanto, de retardo o de retardo-adelanto se puede realizar un gran número de tareas prácticas de compensación, para los sistemas complicados, una compensación simple mediante estos compensadores tal vez no produzca resultados satisfactorios. En estos casos, deben emplearse diferentes compensadores con distintas configuraciones de polos y ceros.

Comparación gráfica. La Figura 7-115(a) muestra una curva de respuesta escalón unitario y una curva de respuesta rampa unitaria de un sistema no compensado. En las Figuras 7-115(b), (c) y (d) se muestran, respectivamente, las curvas de respuesta escalón unitario y rampa unitaria típicas para el sistema compensado mediante una red de adelanto, de retardo y de retardo-adelanto. El sistema con un compensador de adelanto presenta una respuesta más rápida, mientras que aquel con un compensador de retardo presenta la respuesta más lenta, pero con una notable mejora en la respuesta rampa unitaria. El sistema con un compensador de retardo-adelanto logra un

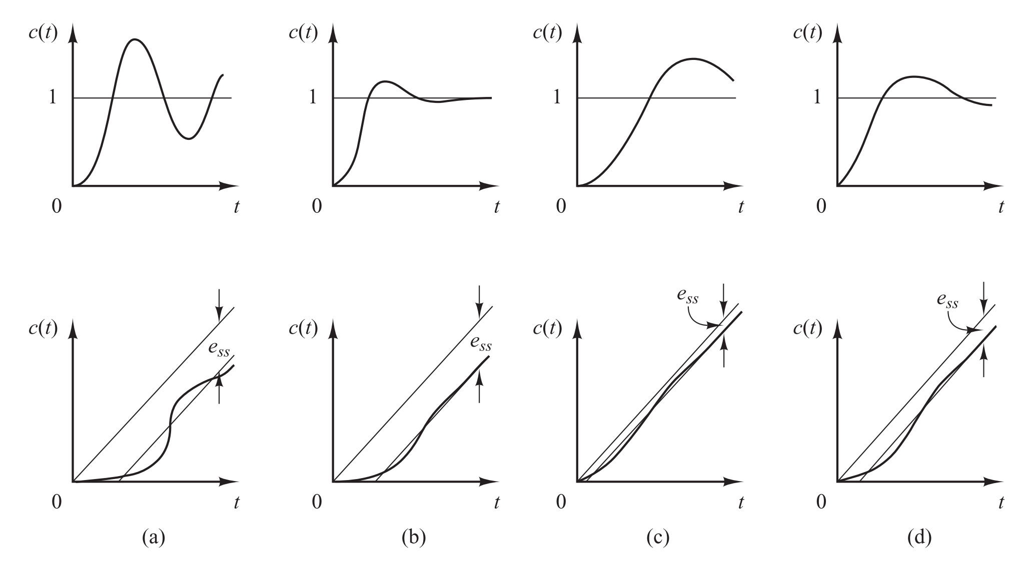


Figura 7-115. Curvas de respuesta escalón unitario y rampa unitaria. (a) Sistema no compensado; (b) sistema con compensador de adelanto; (c) sistema con compensador de retardo; (d) sistema con compensador de retardo-adelanto.

equilibrio y una mejora razonable tanto en la respuesta transitoria como en la respuesta en estado estacionario. Las curvas de respuesta mostradas representan la naturaleza de las mejoras que se pueden esperar al utilizar los diferentes tipos de compensadores.

Compensación por realimentación. Un tacómetro es uno de los dispositivos de realimentación de velocidad. Otro dispositivo común de realimentación de velocidad es un giroscopio de velocidad, que se usa en los autopilotos de los aviones.

La realimentación de velocidad de un tacómetro se usa mucho en los servosistemas de posicionamiento. Se observa que, si el sistema está sujeto a señales de ruido, la realimentación de velocidad puede generar cierta dificultad si un esquema de realimentación de velocidad específico realiza una diferenciación de la señal de salida. (El resultado es que se acentúan los efectos del ruido.)

Cancelación de polos no deseados. Como la función de transferencia de elementos en cascada es el producto de sus funciones de sus transferencia individuales, es posible cancelar ciertos polos o ceros no deseados si se coloca en cascada un elemento de compensación y se ajustan sus polos y ceros para cancelar los polos o ceros no deseados del sistema original. Por ejemplo, una constante de tiempo T_1 grande se puede cancelar mediante la red de adelanto $(T_1 s + 1)/(T_2 s + 1)$ del modo siguiente:

$$\left(\frac{1}{T_1 s + 1}\right)\left(\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}\right) = \frac{1}{T_2 s + 1}$$

Si T_2 es mucho más pequeña que T_1, se puede eliminar efectivamente la mayor constante de tiempo T_1. La Figura 7-116 muestra el efecto de cancelar una constante de tiempo grande en la respuesta transitoria a un escalón.

Si un polo no deseado en el sistema original se encuentra en el semiplano derecho del plano s, no debe usarse este esquema de compensación, ya que, aunque matemáticamente es posible cancelar el polo no deseado con la adición de un cero, una cancelación exacta es físicamente imposible debido a las imprecisiones implícitas en la localización de los polos y los ceros. Un polo en el semiplano derecho del plano s no se cancela exactamente mediante el cero compensador, lo que eventualmente conducirá a una operación inestable, porque la respuesta contiene un término exponencial que aumenta con el tiempo.

Obsérvese que, si un polo en el semiplano izquierdo del plano s está casi, pero no totalmente, cancelado, y esto es lo que suele ocurrir, la combinación de polo y cero no cancelados provocará que la respuesta tenga una amplitud pequeña pero con una componente de respuesta transitoria de larga duración. Si la cancelación no es exacta, pero es razonablemente buena, entonces esta componente será muy pequeña.

Debe señalarse que el sistema de control ideal no es aquel que tiene una función de transferencia unitaria. Este sistema de control no puede construirse físicamente, porque no puede trans-

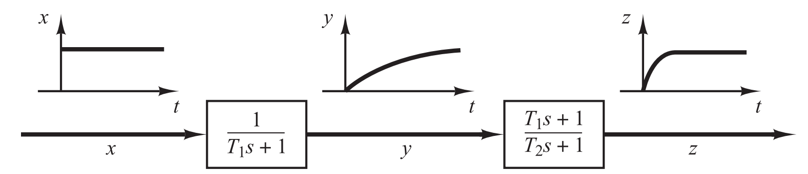


Figura 7-116. Curvas de respuesta escalón que muestran el efecto de cancelar una constante de tiempo grande.

ferir de manera instantánea la energía de la entrada a la salida. Además, como el ruido siempre está presente de una forma u otra, no es conveniente una función de transferencia unitaria. En muchos casos prácticos, un sistema de control deseado puede tener un conjunto de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado con un factor de amortiguamiento relativo y una frecuencia natural no amortiguada razonables. La determinación de la parte significativa de la configuración de polos y ceros en lazo cerrado, tal como la localización de los polos dominantes en lazo cerrado, se basa en las especificaciones que da el comportamiento del sistema requerido.

Cancelación de polos complejos conjugados no deseados. Si la función de transferencia de una planta contiene uno o más pares de polos complejos conjugados, entonces un compensador de adelanto, de retardo o de retardo-adelanto puede no dar resultados satisfactorios. En este caso, es más útil una red con dos ceros y dos polos. Si se eligen los ceros de forma que cancelen los polos complejos conjugados no deseados de la planta, en esencia se sustituyen los polos no deseados con polos aceptables. Es decir, si los polos complejos conjugados no deseados se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s y tienen la forma

$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2}$$

entonces la inserción de una red de compensación que tenga la función de transferencia

$$\frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_2 s + \omega_2^2}$$

resultará en un cambio efectivo de los polos complejos conjugados no deseados por polos aceptables. Obsérvese que, aun cuando la cancelación tal vez no sea exacta, el sistema compensado exhibirá mejores características de respuesta. (Como ya se ha dicho, este enfoque no se puede usar si los polos complejos conjugados no deseados están en el semiplano derecho del plano s.)

Las redes conocidas formadas sólo con componentes *RC* cuyas funciones de transferencia tienen dos ceros y dos polos son las redes de puentes en *T*. En la Figura 7-117 se muestran ejemplos de redes de puentes en *T* y sus funciones de transferencia. (La obtención de las funciones de transferencia de las redes de puente en *T* se dieron en el Problema **A-3-5**.)

Comentarios finales. En los ejemplos de diseño presentados en este capítulo se ha estado interesado en las funciones de transferencia de los compensadores. En los problemas de dise-

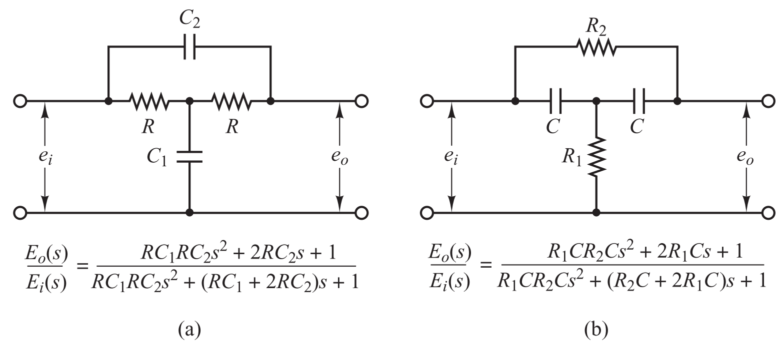


Figura 7-117. Redes de puente en *T*.

ño reales, se deben seleccionar los elementos físicos (el hardware). Por tanto, se deben cumplir restricciones de diseño adicionales tales como coste, tamaño, peso y fiabilidad.

El sistema diseñado puede cumplir las especificaciones en condiciones de operación normales, pero puede desviarse considerablemente de las especificaciones cuando los cambios ambientales son considerables. Como los cambios de ambiente afectan a la ganancia y a las constantes de tiempo del sistema, es necesario proporcionar medios automáticos o manuales que ajusten la ganancia para compensar los cambios ambientales, para reducir efectos no lineales no considerados en el diseño y también para compensar las tolerancias de fabricación de una unidad a otra en la producción de componentes del sistema. (Los efectos de las tolerancias de fabricación se suprimen en un sistema en lazo cerrado; por tanto, los efectos pueden no resultar críticos en una operación en lazo cerrado, pero son importantes en la operación en lazo abierto.) Además de esto, el diseñador debe recordar que cualquier sistema está sujeto a variaciones pequeñas debidas, sobre todo, al deterioro normal del sistema.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-7-1. Considere un sistema cuya función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)}$$

Es evidente que los polos en lazo cerrado se localizan en $s = -2$ y $s = -5$ y que el sistema es no oscilatorio. Demuestre que la respuesta en frecuencia en lazo cerrado de este sistema presenta un pico de resonancia, aunque el factor de amortiguamiento relativo de los polos en lazo cerrado sea mayor que la unidad.

Solución. La Figura 7-118 muestra los diagramas de Bode para el sistema. El valor del pico de resonancia es, aproximadamente, de 3.5 dB. (Observe que, en ausencia de un cero, el sistema de segundo orden con $\zeta > 0.7$ no presentará un pico de resonancia; sin embargo, la presencia de un cero en lazo cerrado provocará tal pico.)

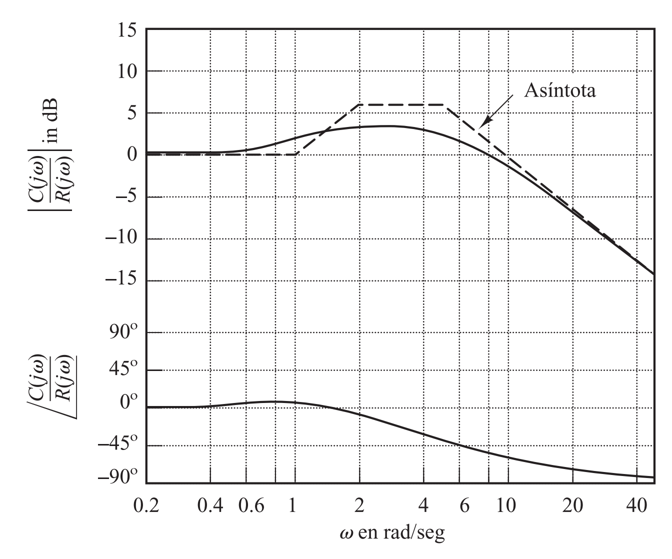


Figura 7-118. Diagrama de Bode para $10(1 + j\omega)/[(2 + j\omega)(5 + j\omega)]$.

A-7-2. Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenga las funciones de transferencia sinusoidales $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$, $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$, $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ e $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$. Al obtener $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$, y $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$, se supone que $U_2(j\omega) = 0$. Asimismo, al obtener $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ e $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$, se supone que $U_1(j\omega) = 0$.

Solución. La expresión de la matriz de transferencia para el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$
$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

se obtiene por medio de

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

donde $\mathbf{G}(s)$ es la matriz de transferencia y se obtiene a partir de

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Para el sistema aquí considerado, la matriz de transferencia resulta

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 25 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 4s + 25} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+4}{s^2 + 4s + 25} & \dfrac{s+5}{s^2 + 4s + 25} \\ \dfrac{-25}{s^2 + 4s + 25} & \dfrac{s-25}{s^2 + 4s + 25} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+4}{s^2 + 4s + 25} & \dfrac{s+5}{s^2 + 4s + 25} \\ \dfrac{-25}{s^2 + 4s + 25} & \dfrac{s-25}{s^2 + 4s + 25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Suponiendo que $U_2(j\omega) = 0$, se calculan $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$, e $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$del modo siguiente:

$$\frac{Y_1(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{j\omega + 4}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 25}$$

$$\frac{Y_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{-25}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 25}$$

Asimismo, suponiendo que $U_1(j\omega) = 0$, se calculan $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ e $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ como sigue:

$$\frac{Y_1(j\omega)}{U_2(j\omega)} = \frac{j\omega + 5}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 25}$$

$$\frac{Y_2(j\omega)}{U_2(j\omega)} = \frac{j\omega - 25}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 25}$$

Observe que $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ es una función de transferencia de fase no mínima.

A-7-3. Teniendo en cuenta el Problema **A-7-2**, dibuje los diagramas de Bode utilizando MATLAB.

Solución. El Programa MATLAB 7-15 calcula los diagramas de Bode para el sistema. Hay cuatro conjuntos de diagramas de Bode: dos para la entrada 1 y dos para la entrada 2. Estos diagramas se muestran en la Figura 7-119.

MATLAB Programa 7-15

```
A = [0  1;-25  -4];
B=[1  1;0  1];
C=[1  0;0  1];
D=[0  0;0  0];
bode(A,B,C,D)
```

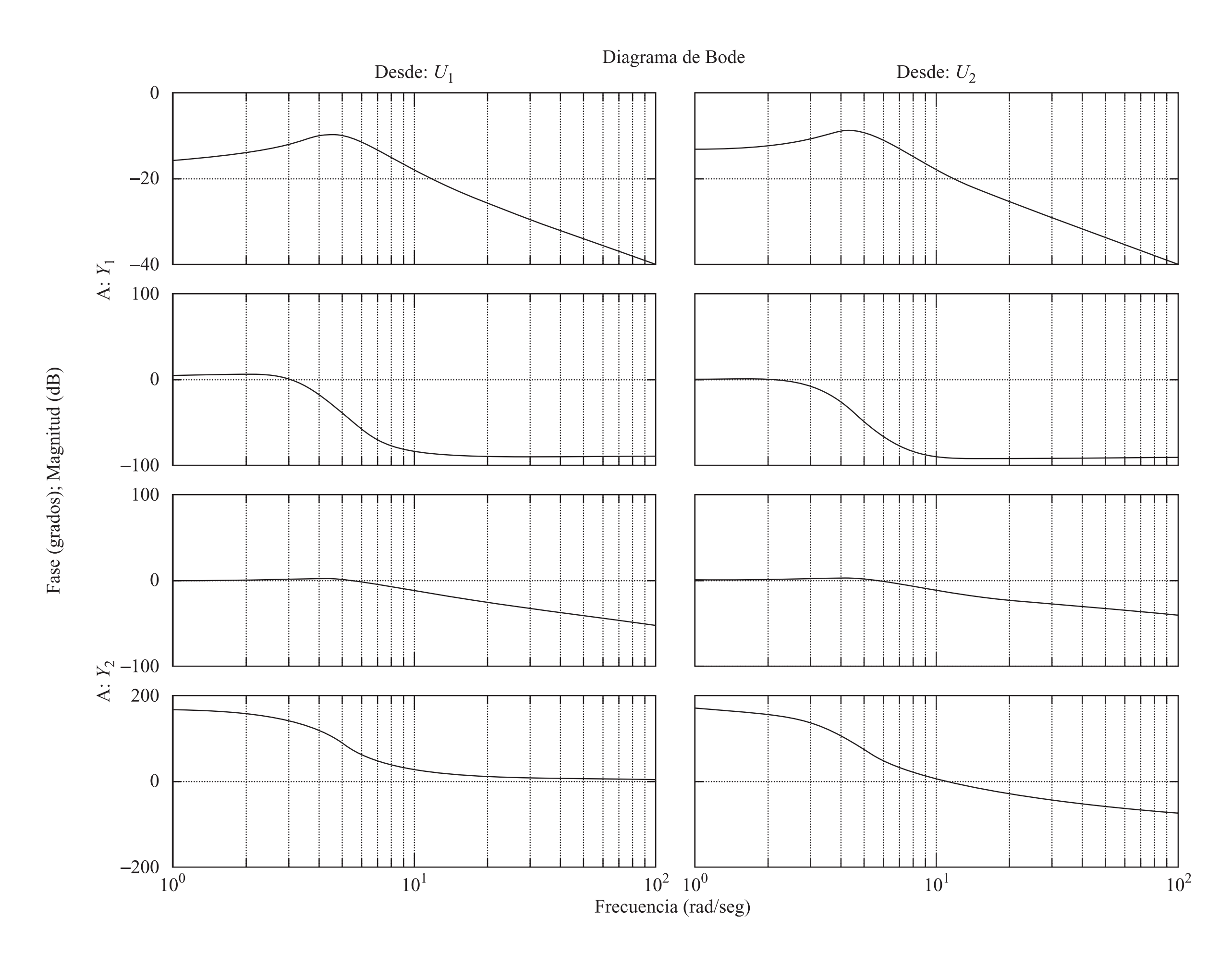


Figura 7-119. Diagramas de Bode.

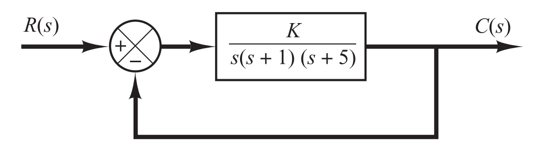


Figura 7-120. Sistema en lazo cerrado.

A-7-4. Utilizando MATLAB, dibuje los diagramas de Bode para el sistema en lazo cerrado de la Figura 7-120 para $K = 1$, $K = 10$ y $K = 20$. Dibuje las tres curvas de magnitud en un único diagrama y las tres curvas de ángulo de fase en otro.

Solución. La función de transferencia en lazo cerrado para el sistema es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+5)+K}$$

$$= \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 5s + K}$$

Por tanto, el numerador y el denominador de $C(s)/R(s)$ son

```
num = [K]
den = [1  6  5  K]
```

El Programa MATLAB 7-16 muestra una posible solución. Los diagramas de Bode resultantes se muestran en las Figuras 7-121(a) y (b).

MATLAB Programa 7-16

```
w = logspace(-1, 2, 200);
for i = 1:3;
  if i = 1; K = 1;[mag,phase,w] = bode([K],[1  6  5  K], w);
     mag1dB = 20*log10(mag); phase1 = phase; end;
  if i = 2; K = 10;[mag,phase,w] = bode([K],[1  6  5  K], w);
     mag2dB = 20*log10(mag); phase2 = phase; end;
  if i = 3; K = 20;[mag,phase,w] = bode([K],[1  6  5  K], w);
     mag3dB = 20*log10(mag); phase3 = phase; end;
end
semilogx (w,mag1dB,'-',w,mag2dB,'-',w,mag3dB,'-')
grid
title ('Diagramas de Bode de G(s) = K/[s(s + 1)(s + 5)], donde K = 1, K = 10,
y K = 20')
xlabel ('Frecuencia (rad/seg)')
ylabel ('Ganancia (dB)')
text (1.2, -31, 'K = 1')
text (1.1, -8, 'K = 10')
text (11, -31, 'K = 20')
semilogx (w,phase1,'-',w,phase2,'-',w,phase3,'-')
grid
xlabel ('Frecuencia (rad/seg)')
ylabel ('Fase (grados)')
text (0.2,-90,'K = 1')
text (0.2,-20,'K = 10')
text (1.6,-20,'K = 20')
```

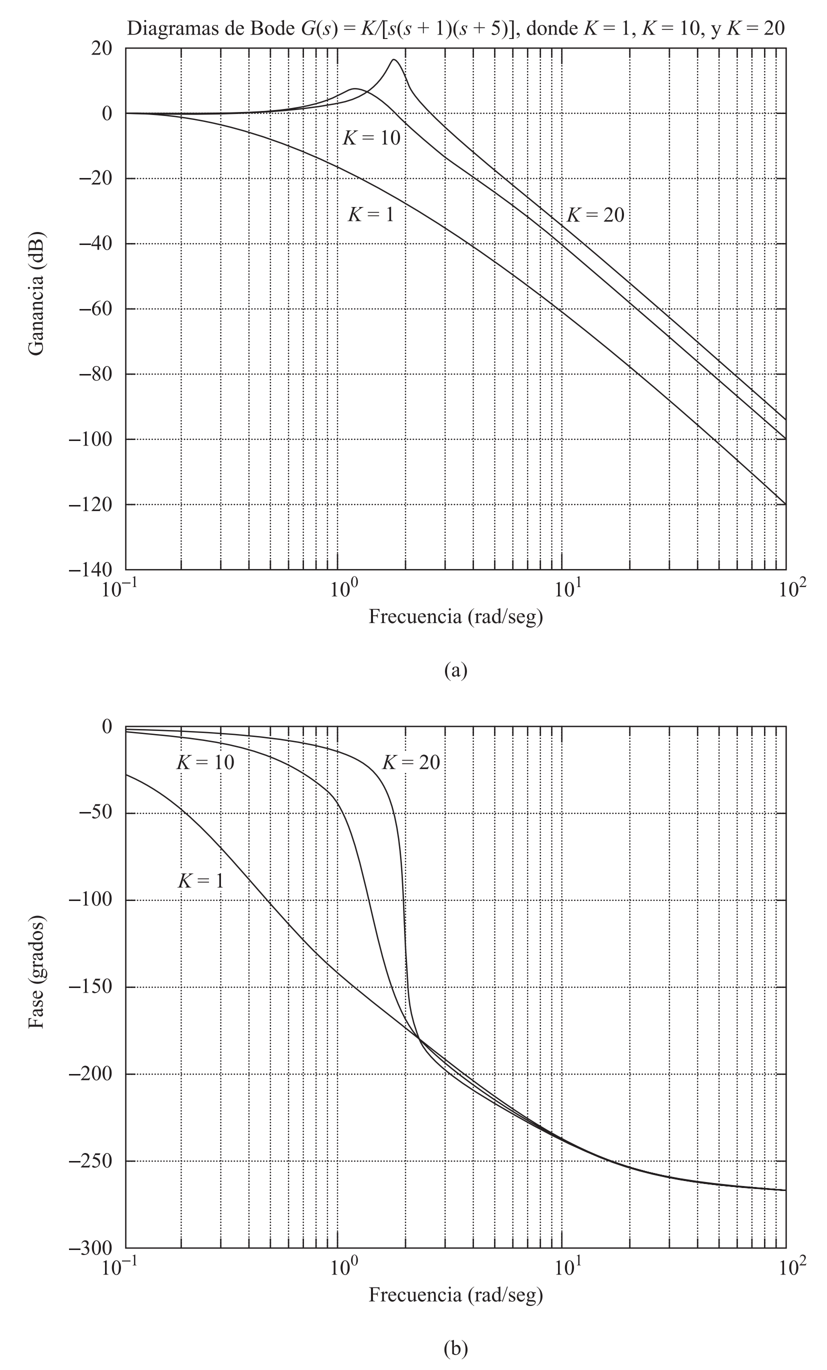


Figura 7-121. Diagramas de Bode: (a) Curvas de magnitud con respecto a la frecuencia; (b) curvas del ángulo de fase con respecto a la frecuencia.

A-7-5. Demuestre que el diagrama polar de la función de transferencia sinusoidal

$$G(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}, \qquad \text{para } 0 \leqslant \omega \leqslant \infty$$

es un semicírculo. Encuentre el centro y el radio del círculo.

Solución. La función de transferencia sinusoidal determinada $G(j\omega)$ se escribe del modo siguiente:

$$G(j\omega) = X + jY$$

donde

$$X = \frac{\omega^2T^2}{1 + \omega^2T^2}, \qquad Y = \frac{\omega T}{1 + \omega^2T^2}$$

Por tanto,

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{(\omega^2T^2 - 1)^2}{4(1 + \omega^2T^2)^2} + \frac{\omega^2T^2}{(1 + \omega^2T^2)^2} = \frac{1}{4}$$

Así, se observa que la gráfica de $G(j\omega)$ es un círculo centrado en (0.5, 0), con radio igual a 0.5. El semicírculo superior corresponde a $0 \leqslant \omega \leqslant \infty$, y el semicírculo inferior corresponde a $-\infty \leqslant \omega \leqslant 0$.

A-7-6. Demuestre el siguiente teorema de transformación. Suponga que $F(s)$ es un cociente de polinomios en s. Suponga que P es el número de polos y que Z es el número de ceros de $F(s)$ que se encuentran dentro de un contorno cerrado en el plano s, considerada la multiplicidad. Suponga que el contorno cerrado no pasa por polos ni ceros de $F(s)$. A continuación, el contorno cerrado en el plano s se transforma dentro del plano $F(s)$ como una curva cerrada. El número N de rodeos el origen del plano $F(s)$ en el sentido de las agujas del reloj, cuando un punto representativo s traza el contorno completo en el plano s en el sentido de las agujas del reloj, es igual a Z-P.

Solución. Para comprobar este teorema, se utiliza el teorema de Cauchy y el teorema del residuo. El teorema de Cauchy plantea que la integral de $F(s)$ alrededor de un contorno cerrado en el plano s es cero si $F(s)$ es analítica[2] dentro del contorno cerrado y sobre él, o

$$\oint F(s)\, ds = 0$$

Suponga que $F(s)$ se obtiene mediante

$$F(s) = \frac{(s + z_1)^{k_1}(s + z_2)^{k_2\cdots}}{(s + p_1)^{m_1}(s + p_2)^{m_2\cdots}} X(x)$$

donde $X(s)$ es analítica en el contorno cerrado en el plano s y todos los polos y ceros se localizan en el contorno. Así, el cociente $F'(s)/F(s)$ se escribe

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \left(\frac{k_1}{s + z_1} + \frac{k_2}{s + z_2} + \cdots\right) - \left(\frac{m_1}{s + p_1} + \frac{m_2}{s + p_2} + \cdots\right) + \frac{X'(s)}{X(s)} \tag{7-30}$$

Esto se observa a partir de la consideración siguiente: Si $\hat{F}(s)$ se obtiene mediante

$$\hat{F}(s) = (s + z_1)^k X(s)$$

entonces $\hat{F}(s)$ tiene un cero de k-ésimo orden en $s = -z_1$. Si se diferencia $F(s)$ con respecto a s se obtiene

$$\hat{F}'(s) = k(s + z_1)^{k-1}X(s) + (s + z_1)^k X'(s)$$

Por tanto,

$$\frac{\hat{F}'(s)}{\hat{F}(s)} = \frac{k}{s + z_1} + \frac{X'(s)}{X(s)} \tag{7-31}$$

Se observa que si se toma el cociente $\hat{F}'(s)/\hat{F}(s)$, el cero de k-ésimo orden de $\hat{F}(s)$ se vuelve un polo sencillo de $\hat{F}'(s)/\hat{F}(s)$.

[2] Para ver una definición de función analítica, véase la nota al pie de la página 447.

Si el último término del segundo miembro de la Ecuación (7-31) no contiene polos ni ceros en el contorno cerrado en el plano s, $F'(s)/F(s)$ es analítica en dicho contorno, excepto en el cero $s = -z_1$. Así, haciendo referencia a la Ecuación (7-30) y usando el teorema del residuo, que plantea que la integral de $F'(s)/F(s)$ tomada en el sentido de las agujas del reloj alrededor de un contorno cerrado en el plano s es igual a $-2\pi j$ veces los residuos de los polos simples de $F'(s)/F(s)$, o

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)} ds = -2\pi j \left(\sum \text{residuos} \right)$$

se tiene que

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)} ds = -2\pi j[(k_1 + k_2 + \cdots) - (m_1 + m_2 + \cdots)] = -2\pi j(Z - P)$$

donde $Z = k_1 + k_2 + \cdots =$ número total de ceros de $F(s)$ encerrados en el contorno cerrado en el plano s.

$P = m_1 + m_2 + \cdots =$ número total de polos de $F(s)$ encerrados en el contorno cerrado en el plano s.

[Los k ceros (o polos) múltiples se consideran k ceros (o polos) localizados en el mismo punto.] Como $F(s)$ es una cantidad compleja, se escribe

$$F(s) = |F|e^{j\theta}$$

y

$$\ln F(s) = \ln |F| + j\theta$$

Considerando que $F'(s)/F(s)$ puede escribirse

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{d \ln F(s)}{ds}$$

se obtiene

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{d \ln |F|}{ds} + j \frac{d\theta}{ds}$$

Si el contorno cerrado en el plano s se transforma dentro del contorno cerrado Γ en el plano $F(s)$, entonces

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)} ds = \oint_{\Gamma} d \ln |F| + j \oint_{\Gamma} d\theta = j \int d\theta = 2\pi j(P - Z)$$

La integral $\oint_{\Gamma} d \ln |F|$ es cero, debido a que la magnitud $\ln |F|$ es igual en el punto inicial y en el punto final del contorno Γ. Por tanto, se obtiene

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = P - Z$$

La diferencia angular entre los valores inicial y final de θ es igual al cambio total en el ángulo de fase de $F'(s)/F(s)$ cuando un punto representativo en el plano s se mueve a lo largo del contorno cerrado. Considerando que N es el número de rodeos en el sentido de las agujas del reloj del origen del plano $F(s)$ y que $\theta_2 - \theta_1$ es cero o un múltiplo de 2π rad, se obtiene

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = -N$$

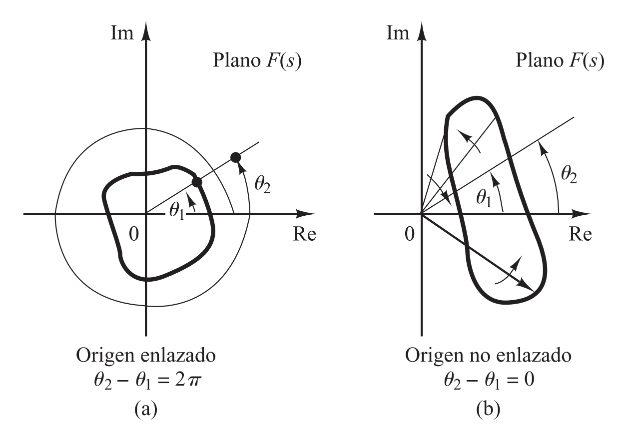


Figura 7-122. Determinación de los rodeos del origen del plano $F(s)$.

Por tanto, se tiene la relación

$$N = Z - P$$

Esto demuestra el teorema.

Observe que, mediante este teorema de transformación, no es posible encontrar el número exacto de ceros y polos, sino sólo su diferencia. También considere que en las Figuras 7-122(a) y (b) se observa que, si θ no cambia a través de 2π rad, entonces el origen del plano $F(s)$ no puede encerrarse en un círculo.

A-7-7. El diagrama de Nyquist (diagrama polar) de respuesta en frecuencia en lazo abierto de un sistema de control con realimentación unitaria aparece en la Figura 7-123(a). Suponiendo que la trayectoria de Nyquist en el plano s encierra todo el semiplano derecho del plano s, dibuje un diagrama de Nyquist completo en el plano G. A continuación conteste las preguntas siguientes:

(a) Si la función de transferencia en lazo abierto no tiene polos en el semiplano derecho del plano s, ¿es estable el sistema en lazo cerrado?

(b) Si la función de transferencia en lazo abierto tiene un polo y ningún cero en el semiplano derecho del plano s, ¿es estable el sistema en lazo cerrado?

(c) Si la función de transferencia en lazo abierto tiene un cero y ningún polo en el semiplano derecho del plano s, ¿es estable el sistema en lazo cerrado?

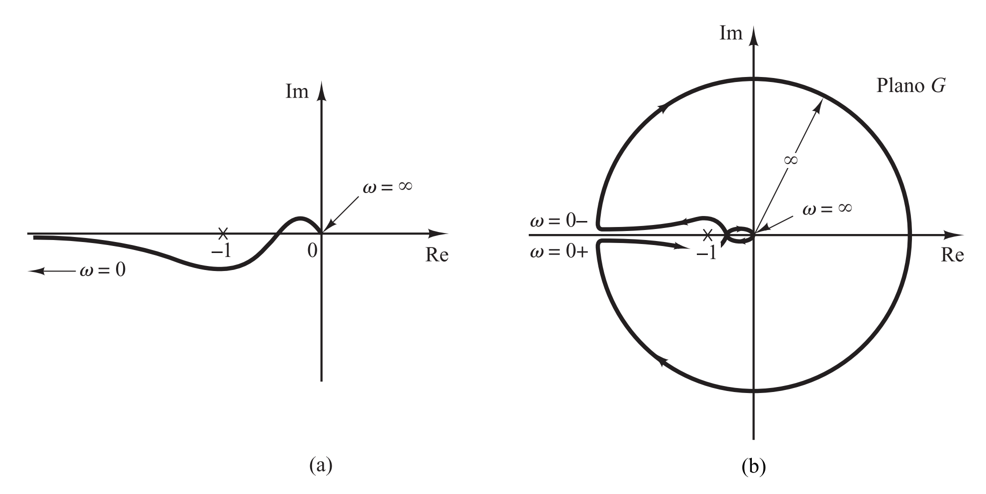


Figura 7-123. (a) Diagrama de Nyquist; (b) diagrama de Nyquist completo en el plano G.

Solución. La Figura 7-123(a) muestra un diagrama de Nyquist completo en el plano G. Las respuestas a las tres preguntas son las siguientes:

(a) El sistema en lazo cerrado es estable, porque el punto crítico $(-1 + j0)$ no queda rodeado por el diagrama de Nyquist. Es decir, debido a que $P=0$ y $N=0$, se tiene que $Z=N+P=0$.

(b) La función de transferencia en lazo abierto tiene un polo en el semiplano derecho del plano s. Por tanto, $P = 1$. (El sistema en lazo abierto es inestable.) Para que el sistema en lazo cerrado sea estable, el diagrama de Nyquist debe rodear al punto crítico $(-1 + j0)$ una vez en sentido contrario al de las agujas del reloj. Sin embargo, el diagrama de Nyquist no rodea al punto crítico. Por tanto, $N = 0$. En este caso, $Z = N + P = 1$. El sistema en lazo cerrado es inestable.

(c) Debido a que la función de transferencia en lazo abierto tiene un cero pero ningún polo en el semiplano derecho del plano s, se tiene que $Z = N + P = 0$. Por tanto, el sistema en lazo cerrado es estable. (Observe que los ceros de la función de transferencia en lazo abierto no afectan a la estabilidad del sistema en lazo cerrado.)

A-7-8. ¿Es estable un sistema en lazo cerrado con la siguiente función de transferencia en lazo abierto y con $K = 2$?

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(2s+1)}$$

Encuentre el valor crítico de la ganancia K para la estabilidad.

Solución. La función de transferencia en lazo abierto es

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(2j\omega+1)}$$

$$= \frac{K}{-3\omega^2 + j\omega(1-2\omega^2)}$$

Esta función de transferencia en lazo abierto no tiene polos en el semiplano derecho del plano s. Por tanto, para obtener la estabilidad, el punto $-1 + j0$ no debe estar rodeado por el diagrama de Nyquist. A continuación se busca el punto en el cual el diagrama de Nyquist cruza el eje real negativo. Suponga que la parte imaginaria de $G(j\omega)H(j\omega)$ es cero, o que

$$1 - 2\omega^2 = 0$$

de donde

$$\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sustituyendo $\omega = 1/\sqrt{2}$ en $G(j\omega)H(j\omega)$, se obtiene

$$G\left(j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)H\left(j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2K}{3}$$

El valor crítico de la ganancia K se obtiene igualando $-2K/3$ con -1, o bien

$$-\frac{2}{3}K = -1$$

Por tanto,

$$K = \frac{3}{2}$$

El sistema es estable si $0 < K < \frac{3}{2}$. Por tanto, el sistema con $K = 2$ es inestable.

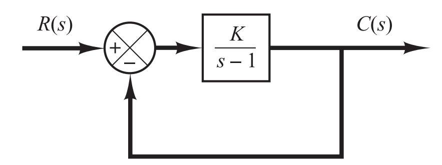


Figura 7-124. Sistema en lazo cerrado.

A-7-9. Considere el sistema en lazo cerrado de la Figura 7-124. Determine el valor crítico de K para la estabilidad, mediante el criterio de estabilidad de Nyquist.

Solución. El diagrama polar de

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega - 1}$$

es un círculo con centro en $-K/2$ en el eje real negativo y radio de $K/2$, como se observa en la Figura 7-125(a). Cuando se incrementa ω de $-\infty$ a ∞, el lugar geométrico $G(j\omega)$ hace un giro en sentido contrario al de las agujas del reloj. En este sistema, $P = 1$ porque hay un polo de $G(s)$ en el semiplano derecho del plano s. Para que el sistema en lazo cerrado sea estable, Z debe ser igual a cero. Por tanto, $N = Z - P$ debe ser igual a -1, o el punto $-1 + j0$ debe quedar rodeado en sentido contrario al de las agujas del reloj, para la estabilidad. (Si el punto $-1 + j0$ no se rodea, el sistema es inestable.) Por tanto, para la estabilidad, K debe ser mayor que la unidad, y $K = 1$ proporciona el límite de la estabilidad. La Figura 7-125(b) muestra los casos estable e inestable de las gráficas de $G(j\omega)$.

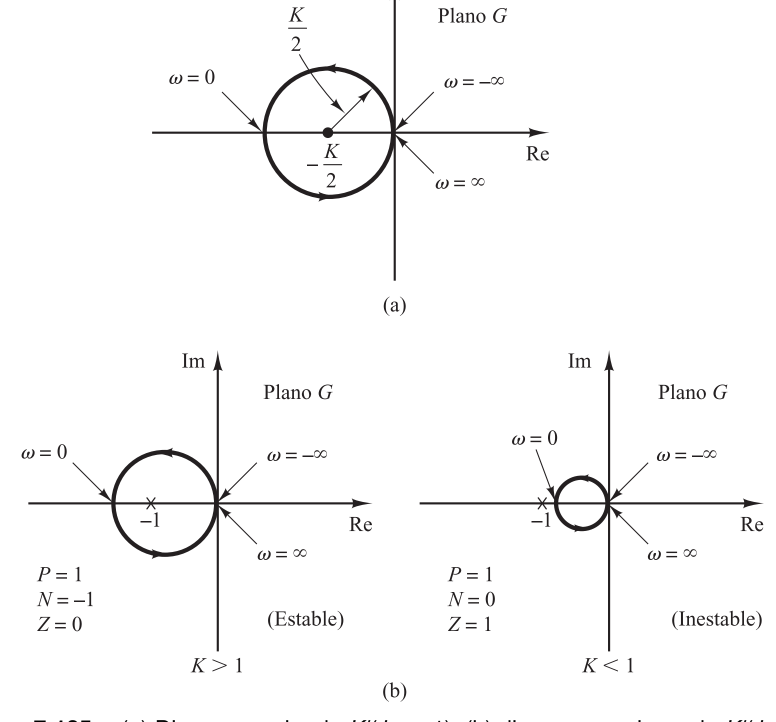


Figura 7-125. (a) Diagrama polar de $K/(j\omega - 1)$; (b) diagramas polares de $K/(j\omega - 1)$ para los casos estable e inestable.

A-7-10. Considere un sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{Ke^{-0.8s}}{s+1}$$

Utilizando el diagrama de Nyquist, determine el valor crítico de K para la estabilidad.

Solución. Para este sistema,

$$G(j\omega) = \frac{Ke^{-0.8j\omega}}{j\omega + 1} = \frac{K(\cos 0.8\omega - j \operatorname{sen} 0.8\omega(1 - j\omega)}{1 + \omega^2}$$

$$= \frac{K}{1+\omega^2}[(\cos 0.8\omega - \omega \operatorname{sen} 0.8\omega) - j(\operatorname{sen} 0.8\omega + \omega \cos 0.8\omega)]$$

La parte imaginaria de $G(j\omega)$ es igual a cero si

$$\operatorname{sen} 0.8\omega + \omega \cos 0.8\omega = 0$$

Por tanto,

$$\omega = -\tan 0.8\omega$$

Despejando esta ecuación para el valor positivo más pequeño de ω, se obtiene

$$\omega = 2.4482$$

Sustituyendo ω por 2.4482 en $G(j\omega)$, se obtiene

$$G(j2.4482) = \frac{K}{1 + 2.4482^2}(\cos 1.9586 - 2.4482 \operatorname{sen} 1.9586) = -0.378K$$

El valor crítico de K para la estabilidad se obtiene suponiendo que $G(j2.4482)$ es igual a -1. Por tanto,

$$0.378K = 1$$

o bien

$$K = 2.65$$

La Figura 7-126 muestra los diagramas de Nyquist, o polares, de $2.65e^{-0.8j\omega}/(1 + j\omega)$ y $2.65/(1 + j\omega)$. El sistema de primer orden sin retardo de transporte es estable para todos las valores de K, pero el que tiene un retardo de transporte de 0.8 seg se vuelve inestable para $K > 2.65$.

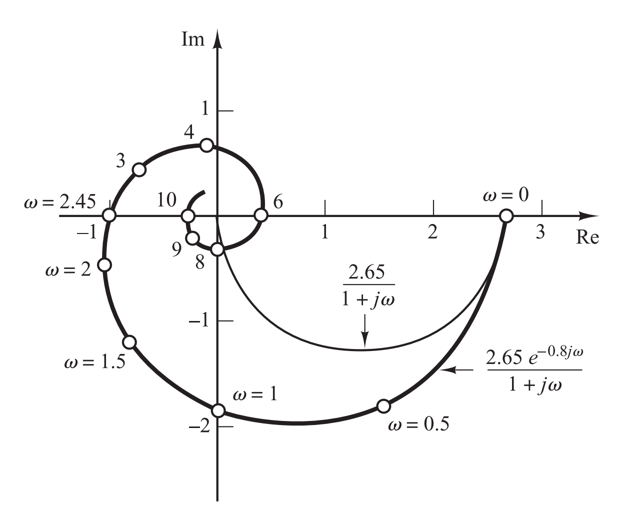


Figura 7-126. Diagramas polares de $2.65e^{-0.8j\omega}/(1 + j\omega)$ y $2.65/(1 + j\omega)$.

A-7-11. Considere un sistema con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{20(s^2 + s + 0.5)}{s(s+1)(s+10)}$$

Obtenga un diagrama de Nyquist mediante MATLAB y examine la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Solución. El Programa MATLAB 7-17 calcula el diagrama de Nyquist que se muestra en la Figura 7-127. Se observa que el diagrama de Nyquist dibujado no rodea al punto $-1 + j0$. Por tanto, $N = 0$ en el criterio de estabilidad de Nyquist. Como no hay ningún polo en lazo abierto en el semiplano derecho del plano s, $P = 0$. Por tanto, $Z = N + P = 0$. El sistema en lazo cerrado es estable.

MATLAB Programa 7-17

```
num=[20 20 10];
den=[1 11 10 0];
nyquist(num,den)
v=[-2 3 -3 3]; axis(v)
grid
```

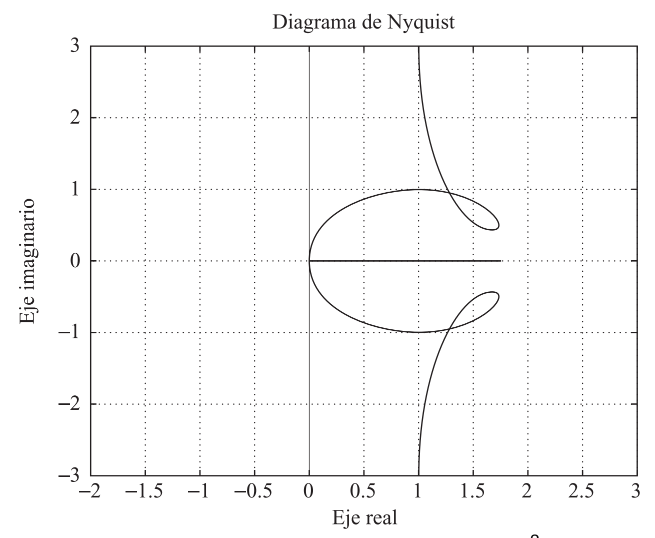


Figura 7-127. Diagrama de Nyquist de $G(s) = \dfrac{20(s^2 + s + 0.5)}{s(s+1)(s+10)}$.

A-7-12. Considere el mismo sistema analizado en el Problema **A-7-11**. Dibuje el diagrama de Nyquist sólo para la región de frecuencia positiva.

Solución. El diagrama de Nyquist sólo para la región de frecuencia positiva se consigue mediante la orden siguiente:

```
[re,im,w]=nyquist(num,den,w)
```

La región de frecuencia se divide en varias subregiones usando incrementos distintos. Por ejemplo, la región de frecuencia que interesa se divide en tres subregiones del modo siguiente:

```
w1=0.1:0.1:10;
w2=10:2:100;
w3=100:10:500;
w=[w1 w2 w3]
```

El Programa MATLAB 7-18 usa esta región de frecuencia. Mediante este programa, se obtiene el diagrama de Nyquist de la Figura 7-128.

MATLAB Programa 7-18

```
num=[20  20  10];
den=[1  11  10  0];
w1=0.1:0.1:10; w2=10:2:100; w3=100:10:500;
w=[w1  w2  w3];
[re,im,w]=nyquist (num,den,w);
plot (re, im)
v=[-3  3  -5  1]; axis (v)
grid
title ('Diagrama de Nyquist de G(s)=20(s^2+s+0.5)/[s(s+1)(s+10)]')
xlabel ('Eje Real')
ylabel ('Eje Imaginario')
```

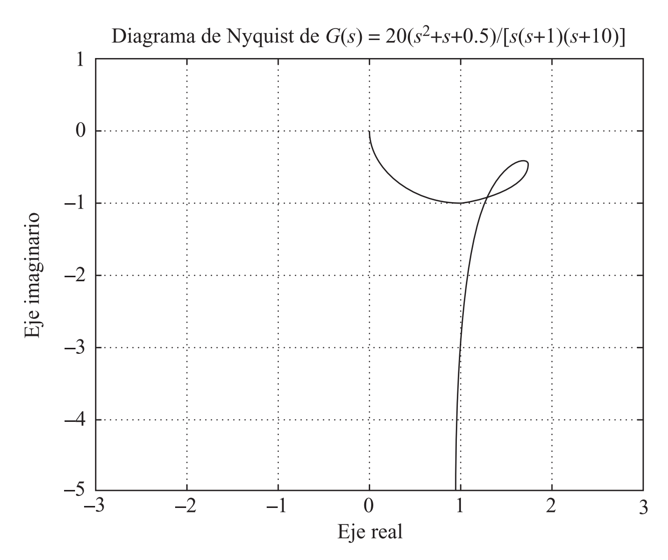


Figura 7-128. Diagrama de Nyquist para la región de frecuencia positiva.

A-7-13. Haciendo referencia al Problema **A-7-12**, dibuje el diagrama polar de $G(s)$ donde

$$G(s) = \frac{20(s^2 + s + 0.5)}{s(s + 1)(s + 10)}$$

Localice sobre el diagrama polar los puntos de frecuencia donde $\omega = 0.2$, 0.3, 0.5, 1, 2, 6, 10 y 20 rad/seg. También busque las magnitudes y los ángulos de fase de $G(j\omega)$ en los puntos de frecuencia especificados.

Solución. En el Programa MATLAB 7-18 se utilizó el vector de frecuencias w, que estaba formado por tres subvectores: `w1`, `w2` y `w3`. En lugar de utilizar ese vector w, se utiliza el vector

`w=logscale(d1, d2, n)`. El Programa MATLAB 7-19 utiliza el siguiente vector de frecuencias:

```
w logscale(-1, 2, 100)
```

Este Programa de MATLAB dibuja el diagrama polar y localiza los puntos de frecuencia especificados sobre él, tal y como muestra la Figura 7-129.

MATLAB Programa 7-19

```
num=[20  20  10];
den=[1  11  10  0];
ww=logspace(-1, 2, 100);
nyquist (num, den, ww)
v=[-2  3  -5  0]; axis(v)
grid
hold
Current plot held
w=[0.2  0.3  0.5  1  2  6  10  20];
[re, im, w]=nyquist (num, den, w);
Plot (re, im, 'o')
text (1.1, -4.8, 'w=0.2')
text (1.1, -3.1, '0.3')
text (1.25, -1.7, '0.5')
text (1.37, -0.4, '1')
text (1.8, -0.3, '2')
text (1.4, -1.1, '6')
text (0.77, -0.8, '10')
text (0.037, -0.8, '20')
% ----- Para obtener los valores de magnitud y fase (en grados) de G(jw)
% en los valores especificados de w, introduzca la orden [mag,fase,w]
%=bode (num, den, w) ------
[mag,fase,w]%bode(num,den,w);
% ----- La tabla siguiente muestra los valores de frecuencia w
% especificados y los correspondientes valores de magnitud y fase
% (en grados) -----
[w mag fase]
ans=
 0.2000 4.9176 -78.9571
 0.3000 3.2426 -72.2244
 0.5000 1.9975 -55.9925
 1.0000 1.5733 -24.1455
 2.0000 1.7678 -14.4898
 6.0000 1.6918 -31.0946
10.0000 1.4072 -45.0285
20.0000 0.8933 -63.4385
```

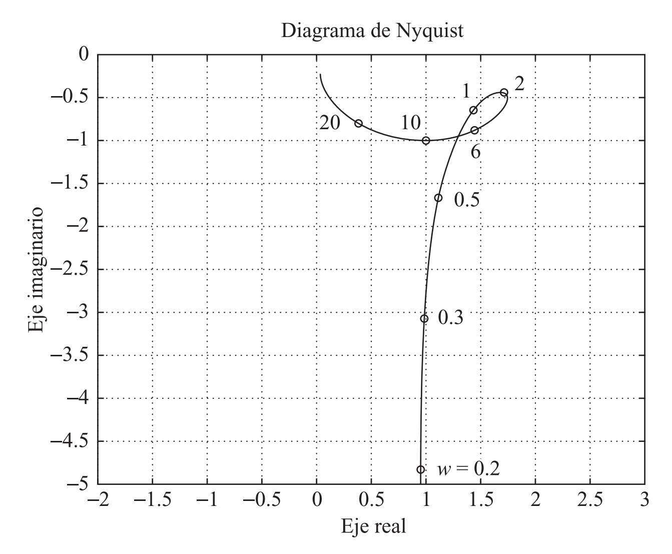


Figura 7-129. Diagrama polar de $G(j\omega)$ del Problema A-7-13.

A-7-14. Considere un sistema con realimentación positiva y unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 6}{s^2 + 5s + 4}$$

Dibuje el diagrama de Nyquist.

Solución. El diagrama de Nyquist del sistema con realimentación positiva se obtiene definiendo `num` y `den` como

```
num=[-1  -4  -6]
den=[1  5  4]
```

y utilizando la orden `nyquist(num,den)`. El Programa MATLAB 7-20 calcula el diagrama de Nyquist tal y como muestra la Figura 7-130.

Este sistema es inestable porque el punto $-1 + j0$ queda rodeado una vez en el sentido de las agujas del reloj. Observe que se trata de un caso especial en el cual el diagrama de Nyquist pasa por el punto $-1 + j0$ y rodea este punto una vez en el sentido de las agujas del reloj. Esto significa que el sistema en lazo cerrado se degenera; el comportamiento es el de un sistema inestable de primer orden. Véase la siguiente función de transferencia en lazo cerrado del sistema con realimentación positiva:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 4s + 6}{s^2 + 5s + 4 - (s^2 + 4s + 6)}$$

$$= \frac{s^2 + 4s + 6}{s - 2}$$

MATLAB Programa 7-20

```
num=[-1  -4  -6];
den=[1 5 4];
nyquist (num, den);
grid
title('Diagrama de Nyquist de G(s)=-(s^2+4s+6)/(s^2+5s+4)')
```

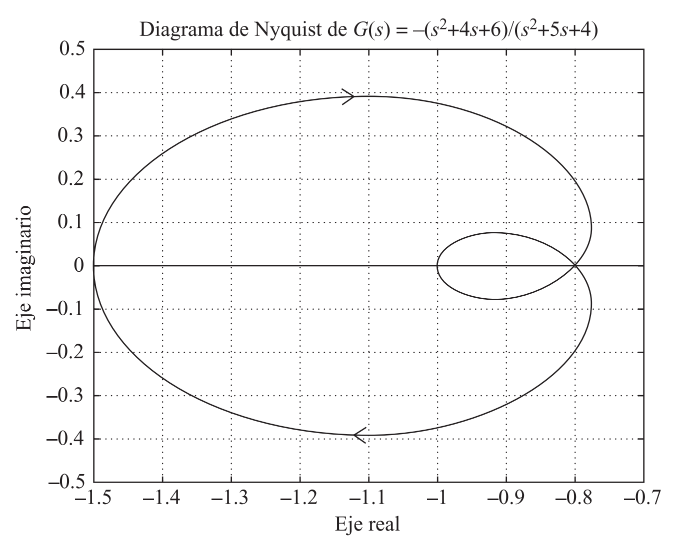


Figura 7-130. Diagrama de Nyquist para un sistema de realimentación positiva.

Observe que el diagrama de Nyquist para el caso de realimentación positiva es un reflejo del diagrama de Nyquist con respecto al eje imaginario para el caso de realimentación negativa. Esto se observa de la Figura 7-131, que se obtuvo mediante el Programa MATLAB 7-21. (Obsérvese que el caso de realimentación positiva es inestable, mientras que el caso de realimentación negativa es estable).

MATLAB Programa 7-21

```
num1 = [1 4 6];
den1 = [1 5 4];
num2 = [-1 -4 -6];
den2 = [1 5 4];
nyquist (num1, den1);
hold on
nyquist (num2, den2);
v = [-2 2 -1 1];
axis(v);
grid
title ('Diagramas de Nyquist de G(s) y -G(s)')
text (1.0, 0.5, 'G(s)')
text (0.57, -0.48, 'Use este diagrama')
text (0.57, -0.61, 'de Nyquist para el sistema')
text (0.57, -0.73, 'con realimentación negativa')
text (-1.3, 0.5, '-G(s)')
text (-1.7, -0.48, 'Use este diagrama')
text (-1.7, -0.61, 'de Nyquist para el sistema')
text (-1.7, -0.73, 'con realimentación positiva')
```

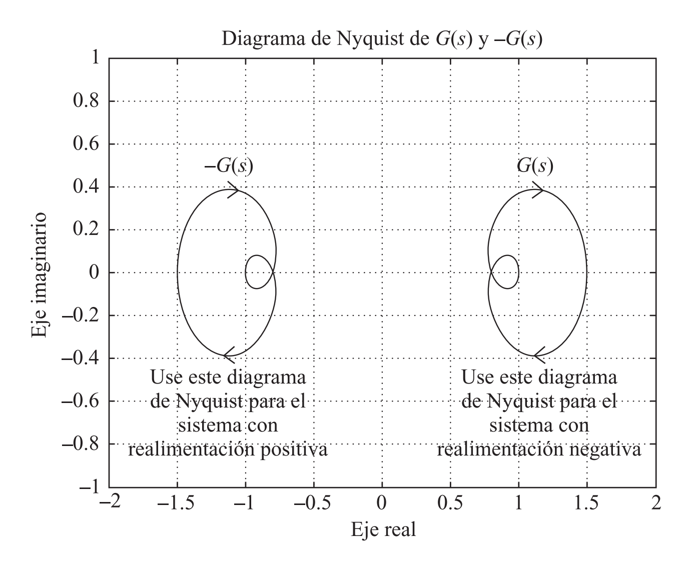


Figura 7-131. Diagramas de Nyquist para sistemas de realimentación positiva y sistemas de realimentación negativa.

A-7-15. Sea el sistema de control que se muestra en la Figura 7-60 (referirse al Ejemplo 7-19). Utilizando el diagrama polar inverso, determinar el rango de valores de la ganancia K que garantizan estabilidad.

Solución. Como

$$G_2(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 1}$$

se tiene

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{K(s + 0.5)}{s^3 + s^2 + 1}$$

Por tanto, la inversa de la función de transferencia feedforward es

$$\frac{1}{G(s)} = \frac{s^3 + s^2 + 1}{K(s + 0.5)}$$

Obsérvese que $1/G(s)$ tiene un polo en $s = -0.5$. No tiene ningún polo en el semiplano derecho s. Por tanto, la ecuación de estabilidad de Nyquist

$$Z = N + P$$

Se reduce a $Z = N$ ya que $P = 0$. La ecuación reducida dice que el número Z de los ceros de $1 + [1/G(s)]$ en el semiplano derecho s es igual a N, el número de vueltas en el sentido de las agujas del reloj del punto $-1 + j0$. Para que haya estabilidad N debe ser igual a cero, o no deberían existir rodeos del punto $-1 + j0$. La Figura 7-132 muestra el diagrama de Nyquist de $K/G(j\omega)$.

Obsérvese que como

$$\frac{K}{G(j\omega)} = \left[\frac{(j\omega)^3 + (j\omega)^2 + 1}{j\omega + 0.5}\right]\left(\frac{0.5 - j\omega}{0.5 - j\omega}\right)$$

$$= \frac{0.5 - 0.5\omega^2 - \omega^4 + j\omega(-1 + 0.5\omega^2)}{0.25 + \omega^2}$$

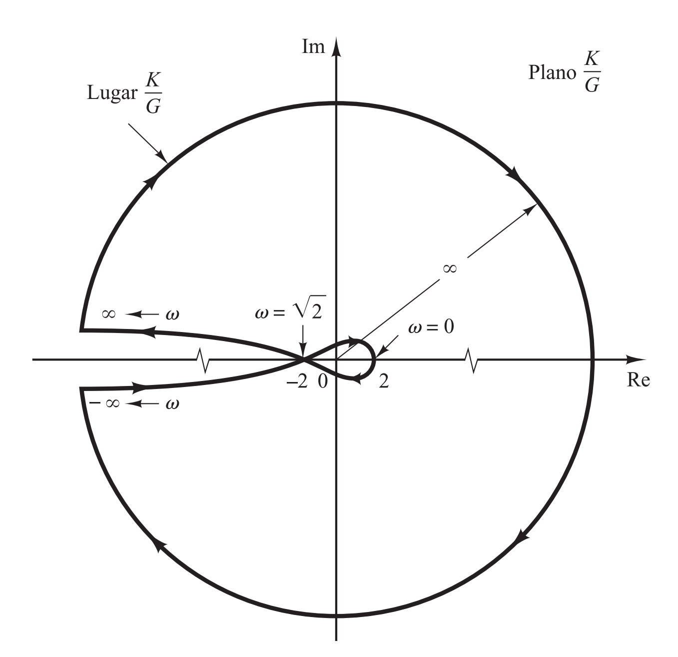


Figura 7-132. Diagrama polar de $K/G(j\omega)$.

el lugar $K/G(j\omega)$ cruza el eje real negativo en $\omega = \sqrt{2}$ y el punto de cruce en el eje real negativo es -2.

De la Figura 7-132, se observa que si el punto crítico está en la región entre -2 y $-\infty$ entonces el punto crítico no queda enlazado. Por tanto, para garantizar la estabilidad se requiere

$$-1 < \frac{-2}{K}$$

Así el rango de ganancias K para estabilidad es

$$2 < K$$

que es el mismo resultado que se obtuvo en el Ejemplo 7-19.

A-7-16. La Figura 7-133 muestra un diagrama de bloques de un sistema de control de un vehículo espacial. Determine la ganancia K tal que el margen de fase sea 50°. ¿Cuál es el margen de la ganancia en este caso?

Solución. Como

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega + 2)}{(j\omega)^2}$$

se tiene que

$$\underline{/G(j\omega)} = \underline{/j\omega + 2} - 2\underline{/j\omega} = \tan^{-1}\frac{\omega}{2} - 180^{\circ}$$

El requerimiento de que el margen de fase sea de 50° significa que $\underline{/G(j\omega_c)}$ debe ser igual a 130°, donde ω_c es la frecuencia de cruce de ganancia, o

$$\underline{/G(j\omega_c)} = -130^{\circ}$$

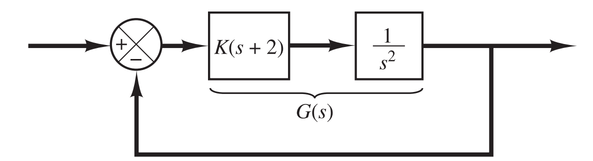


Figura 7-133. Sistema de control de un vehículo espacial.

Por tanto, se establece

$$\tan^{-1}\frac{\omega_c}{2} = 50^{\circ}$$

a partir de lo cual se obtiene

$$\omega_c = 2.3835 \text{ rad/seg}$$

Como la curva de fase nunca cruza la línea -180°, el margen de ganancia es $+\infty$ dB. Considerando que la magnitud de $G(j\omega)$ debe ser igual a 0 dB en $\omega = 2.3835$, se tiene que

$$\left|\frac{K(j\omega + 2)}{(j\omega)^2}\right|_{\omega = 2.3835} = 1$$

a partir de lo cual se obtiene

$$K = \frac{2.3835^2}{\sqrt{2^2 + 2.3835^2}} = 1.8259$$

Este valor K dará el margen de fase de 50º.

A-7-17. Para el sistema de segundo orden estándar

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

demuestre que el ancho de banda ω_b se obtiene a partir de

$$\omega_b = \omega_n(1 - 2\zeta^2 + \sqrt{43\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2})^{1/2}$$

Observe que $\omega_b\omega_n$ es sólo función de ζ. Dibuje una curva ω_b/ω_n con respecto a ζ.

Solución. El ancho de banda ω_b se determina a partir de $|C(j\omega_b)/R(j\omega_b)| = -3$ dB. Con mucha frecuencia, en lugar de -3 dB, se utiliza -3.01 dB, que es igual a 0.707. Por tanto,

$$\left|\frac{C(j\omega_b)}{R(j\omega_b)}\right| = \left|\frac{\omega_n^2}{(j\omega_b)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_b) + \omega_n^2}\right| = 0.707$$

De esta forma,

$$\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_b)^2}} = 0.707$$

a partir de lo cual se obtiene

$$\omega_n^4 = 0.5[(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega_b^2]$$

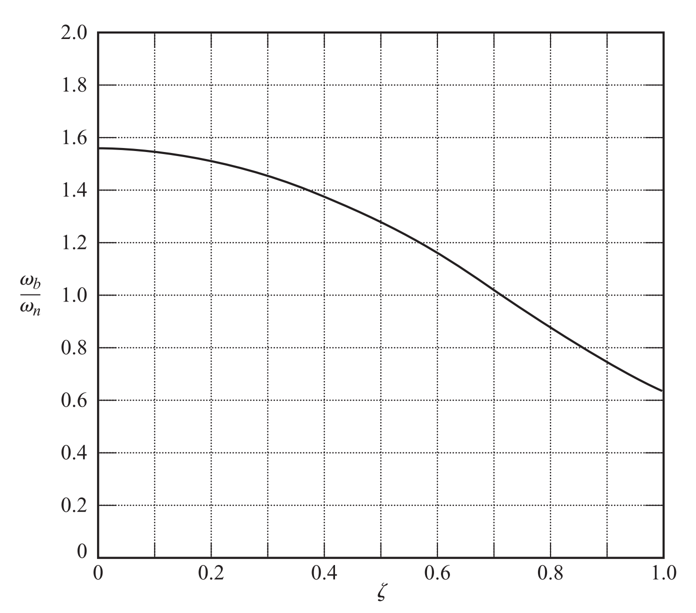


Figura 7-134. Curva de ω_b/ω_n con respecto a ζ, donde ω_b es el ancho de banda.

Si se divide en ambos lados de esta última ecuación entre ω_n^4, se obtiene

$$1 = 0.5\left\{\left[1 - \left(\frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^2\right\}$$

Despejando en esta última ecuación para $(\omega_b/\omega_n)^2$ se obtiene

$$\left(\frac{\omega_b}{\omega_n}\right)^2 = -2\zeta^2 + 1 \pm \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}$$

Como $(\omega_b/\omega_n)^2 > 0$, se toma el signo positivo en esta última ecuación. Por tanto,

$$\omega_b^2 = \omega_n^2(1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2})$$

o bien

$$\omega_b = \omega_n(1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2})^{1/2}$$

La Figura 7-134 muestra una curva que relaciona ω_b/ω_n con respecto a ζ.

A-7-18. La Figura 7-135 contiene los diagramas de Bode de la función de transferencia en lazo abierto $G(s)$ del sistema de control con realimentación unitaria. Se sabe que la función de transferencia en lazo abierto es de fase mínima. En el diagrama se observa que existe un par de polos complejos conjugados en $\omega = 2$ rad/seg. Determine el factor de amortiguamiento relativo del término cuadrático que contiene estos polos complejos conjugados. Determine también la función de transferencia $G(s)$.

Solución. Haciendo referencia a la Figura 7-9 y examinando los diagramas de Bode de la Figura 7-135, se observa que el factor de amortiguamiento relativo ζ y la frecuencia natural no amortiguada ω_n del término cuadrático son

$$\zeta = 0.1, \qquad \omega_n = 2 \text{ rad/seg}$$

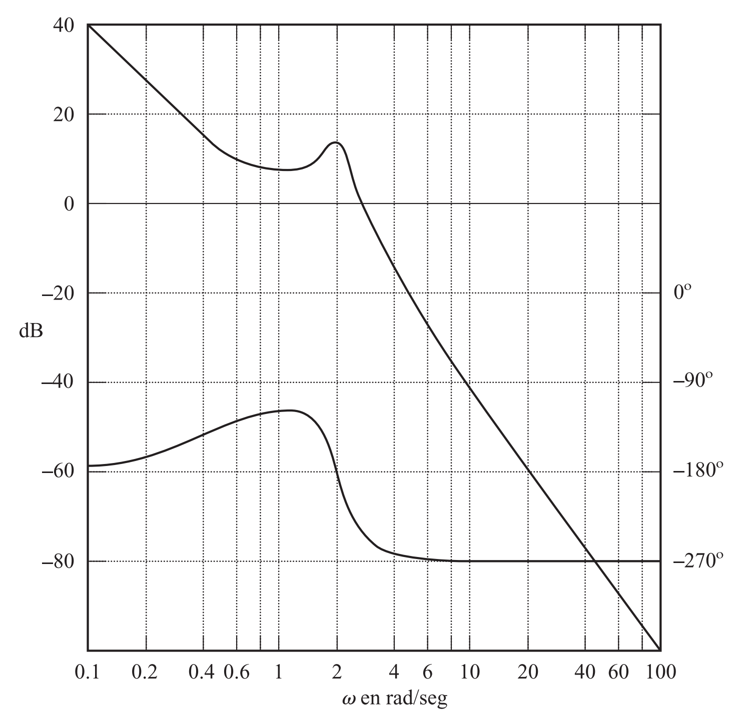


Figura 7-135. Diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo abierto de un sistema de control con realimentación unitaria.

Considerando que existe otra frecuencia esquina en $\omega = 0.5$ rad/seg y que la pendiente de la curva de magnitud en la región de bajas frecuencias es de -40 dB/década, $G(j\omega)$ se determina tentativamente del modo siguiente:

$$G(j\omega) = \frac{K\left(\dfrac{j\omega}{0.5} + 1\right)}{(j\omega)^2\left[\left(\dfrac{j\omega}{2}\right)^2 + 0.1(j\omega) + 1\right]}$$

Debido a que en la Figura 7-135 se observa que $|G(j0.1)| = 40$ dB, el valor de la ganancia K se determina como unitario. Asimismo, la curva de fase calculada, $\angle G(j\omega)$ con respecto a ω, coincide con la curva de fase obtenida. Por tanto, la función de transferencia $G(s)$ se determina como

$$G(s) = \frac{4(2s + 1)}{s^2(s^2 + 0.4s + 4)}$$

A-7-19. Un sistema de control en lazo cerrado incluye un elemento inestable dentro del lazo. En el momento de aplicarle el criterio de estabilidad de Nyquist, deben obtenerse las curvas de la respuesta en frecuencia para el elemento inestable.

¿Cómo se obtienen de forma experimental las curvas de la respuesta en frecuencia para tal elemento inestable? Sugiera un posible método para la determinación experimental de la respuesta en frecuencia de un elemento lineal inestable.

Solución. Una manera de resolver esto es medir las características de la respuesta en frecuencia del elemento inestable usándolo como parte de un sistema estable.

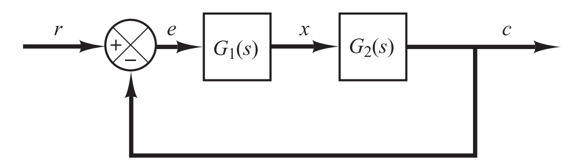


Figura 7-136. Sistema de control.

Considere el sistema de la Figura 7-136. Suponga que el elemento $G_1(s)$ es inestable. El sistema completo puede estabilizarse eligiendo un elemento lineal adecuado $G_2(s)$. Se aplica una señal sinusoidal en la entrada. En estado estable, todas las señales del lazo serán sinusoidales. Se miden las señales $e(t)$, la entrada para el elemento inestable y $x(t)$, salida del elemento inestable. Si se cambia la frecuencia [y posiblemente la amplitud por la conveniencia de medir $e(t)$ y $x(t)$] de la sinusoide de entrada y se repite el proceso, se puede obtener la respuesta en frecuencia del elemento lineal inestable.

A-7-20. Demuestre que la red de adelanto y la red de retardo insertadas en cascada en un lazo abierto funcionan como un control proporcional-derivativo (en la región de ω pequeñas) y un control proporcional-integral (en la región de ω grandes), respectivamente.

Solución. En la región de ω pequeñas, el diagrama polar de la red de adelanto es aproximadamente igual que el del controlador proporcional-derivativo. Esto se muestra en la Figura 7-137(a). Asimismo, en la región de ω grandes, el diagrama polar de la red de retardo aproxima al controlador proporcional-integral, tal como se aprecia en la Figura 7-137(b).

A-7-21. Sea un compensador de retardo-adelanto $G_c(s)$ definido por

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

Demuestre que, en la frecuencia ω_1, donde

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

el ángulo de fase de $G_c(j\omega)$ es cero. (Este compensador funciona como un compensador de retardo para $0 < \omega < \omega_1$ y como un compensador de adelanto para $\omega_1 < \omega < \infty$.)

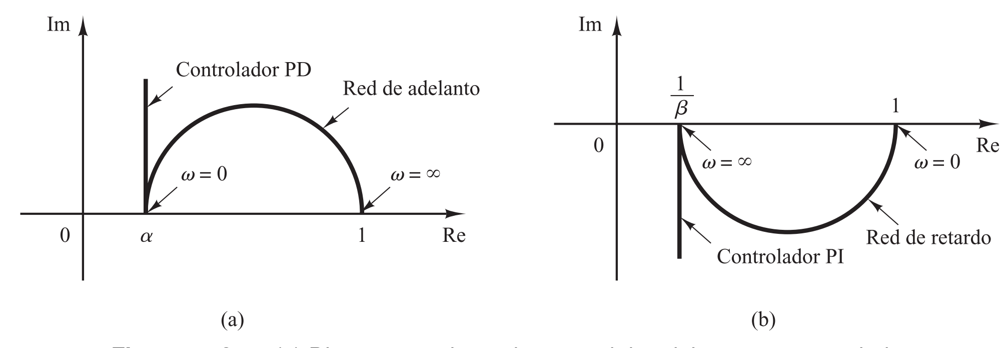


Figura 7-137. (a) Diagramas polares de una red de adelanto y un controlador proporcional-derivativo; (b) diagramas polares de una red de retardo y un controlador proporcional-integral.

Solución. El ángulo de $G_c(j\omega)$ está dado por

$$\underline{/G_c(j\omega)} = \underline{/j\omega + \frac{1}{T_1}} + \underline{/j\omega + \frac{1}{T_2}} - \underline{/j\omega + \frac{\beta}{T_1}} - \underline{/j\omega + \frac{1}{\beta T_2}}$$
$$= \tan^{-1}\omega T_1 + \tan^{-1}\omega T_2 - \tan^{-1}\omega T_1/\beta - \tan^{-1}\omega T_2\beta$$

En $\omega = \omega_1 = 1/\sqrt{T_1 T_2}$, se tiene que

$$\underline{/G_c(j\omega_1)} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \tan^{-1}\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - \tan^{-1}\beta\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Como

$$\tan\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}}{1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}} = \infty$$

o bien

$$\tan^{-1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 90^{\circ}$$

y también

$$\tan^{-1}\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1}\beta\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 90^{\circ}$$

se tiene que

$$\underline{/G_c(j\omega_1)} = 0^{\circ}$$

Por tanto, el ángulo de $G_c(j\omega_1)$ es 0° en $\omega = \omega_1 = 1/\sqrt{T_1 T_2}$.

A-7-22. Sea el sistema de control que se muestra en la Figura 7-138. Determine el valor de la ganancia K tal que el margen de fase sea 60°. ¿Cuál es el margen de ganancia con este valor de la ganancia K?

Solución. La función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = K\frac{s + 0.1}{s + 0.5}\frac{10}{s(s + 1)}$$
$$= \frac{K(10s + 1)}{s^3 + 1.5s^2 + 0.5s}$$

Se representa el diagrama de Bode de $G(s)$ cuando $K = 1$. Con este fin se puede utilizar el Programa 7-22 de MATLAB. La Figura 7-139 muestra los diagramas de Bode generados con este programa. En estos diagramas el margen de fase requerido de 60° ocurre en la frecuencia

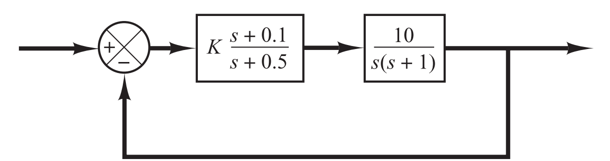


Figura 7-138. Sistema de control.

$\omega = 1.15$ rad/seg. En esta frecuencia la magnitud de $G(j\omega)$ es de 14.5 dB. En este caso, la ganancia K debe satisfacer la ecuación siguiente:

$$20 \log K = -14.5 \text{ dB}$$

o bien

$$K = 0.188$$

MATLAB Programa 7-22

```
num=[10  1];
den=[1  1.5  0.5  0];
bode(num,den)
title('Diagrama de Bode de G(s)=(10s+1)/[s(s+0.5)(s+1)]')
```

Por tanto, se ha determinado el valor de la ganancia K. Como el diagrama de fase no corta a la línea de -180°, el margen de ganancia es de $+\infty$ dB.

Para verificar los resultados, se dibuja un diagrama de Nyquist de G para el rango de frecuencias

```
w=0.5:0.01:1.15
```

El punto final del lugar ($\omega = 1.15$ rad/seg) estará sobre un círculo unitario en el plano de Nyquist. Para comprobar el margen de fase, es conveniente dibujar el diagrama de Nyquist sobre un diagrama polar, usando retículas polares.

Para dibujar el diagrama de Nyquist sobre un diagrama polar, en primer lugar se define un vector complejo z mediante

$$\texttt{z=re+i*im=re}^{i\theta}$$

donde `r` y θ (theta) están dados por

```
r=abs(z)
theta=angle(z)
```

`abs` significa la raíz cuadrada de la suma de la parte real al cuadrado y la parte imaginaria al cuadrado, angle significa $\tan^{-1}$ (parte imaginaria/parte real).

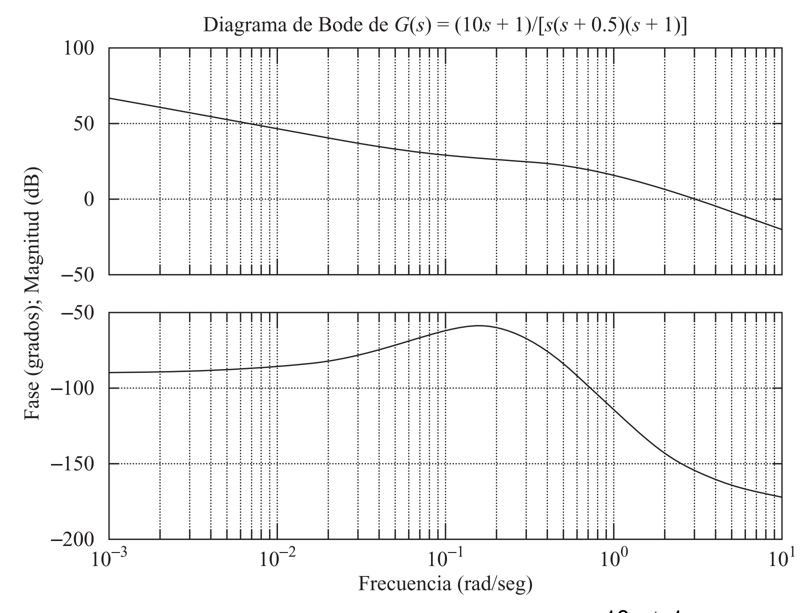


Figura 7-139. Diagramas de Bode de $G(s) = \dfrac{10s + 1}{s(s + 0.5)(s + 1)}$.

Si se utiliza la orden

```
polar(theta,r)
```

MATLAB producirá una gráfica en las coordenadas polares. El uso subsiguiente de la orden tipo dibujará las líneas y los círculos de la retícula polar.

El programa MATLAB 7-23 produce el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$, donde ω está entre 0.5 y 1.15 rad/seg. En la Figura 7-140 se muestra el diagrama resultante. Observe que el punto

MATLAB Programa 7-23

```
%*****Diagrama de Nyquist en coordenadas rectangulares*****
num=[1.88  0.188];
den=[1  1.5  0.5  0];
w=0.5:0.01:1.15;
[re,im,w]=nyquist(num,den,w);
%*****Convertir coordenadas rectangulares en coordenadas polares
% defínase z, r, theta como sigue*****
z=re+i*im;
r=abs(z);
theta=angle(z);
%*****Para dibujar el diagrama polar, introducir
la orden 'polar(theta,r)'*****
polar (theta,r)
text (-1,3,'Comprobación de Margen de Fase')
text (0.3,-1.7, 'Diagrama de Nyquist')
text (-2.2,-0.75, 'Margen de fase')
text (-2.2,-1.1, 'es 60 grados')
text (1.45,-0.7, 'Círculo unidad')
```

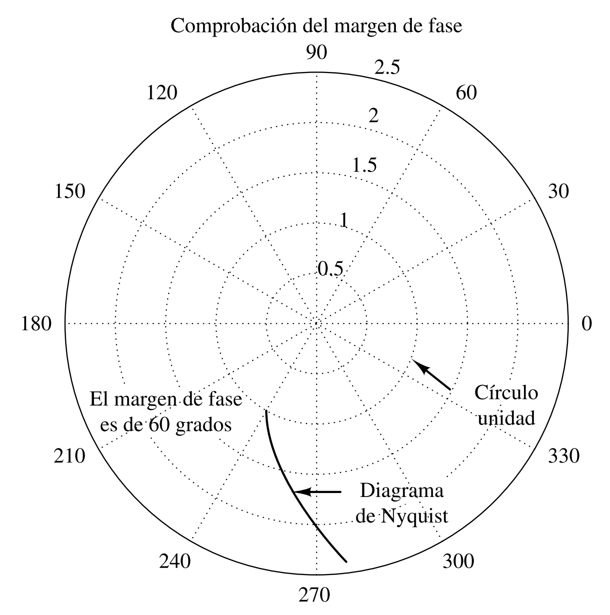


Figura 7-140. Diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ que muestra que el margen de fase es de 60°.

$G(j1.15)$ se encuentra sobre el círculo unitario y que el ángulo de fase de este punto es de -120°. Por tanto, el margen de fase es de 60°. El hecho de que el punto $G(j1.15)$ esté sobre el círculo unitario verifica que, en $\omega = 1.15$ rad/seg, la magnitud es igual a 1 o 0 dB. (Por tanto, $\omega = 1.15$ es la frecuencia de cruce de ganancia.) Así, $K = 0.188$ proporciona el margen de fase deseado de 60°.

Observe que, al escribir 'text' sobre el diagrama polar, se introduce la orden text del modo siguiente:

```
text (x,y;' ')
```

Por ejemplo, para escribir 'Diagrama de Nyquist' comenzando en el punto (0.3, -1.7), introduzca la orden

```
text (0.3, -1.7, 'Diagrama de Nyquist')
```

El texto se escribe en la pantalla de forma horizontal.

A-7-23. Si la función de transferencia en lazo abierto $G(s)$ contiene polos complejos conjugados ligeramente amortiguados, entonces más de un lugar M puede ser tangente al lugar $G(j\omega)$.

Sea el sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{9}{s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)} \qquad (7\text{-}32)$$

Dibuje los diagramas de Bode para esta función de transferencia en lazo abierto así como el diagrama de la magnitud logarítmica respecto de la fase, y muestre que los dos lugares M son tangentes al lugar $G(j\omega)$. Finalmente, represente el diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo cerrado.

Solución. La Figura 7-141 muestra los diagramas de Bode de $G(j\omega)$. La Figura 7-142 representa el diagrama de la magnitud logarítmica respecto de la fase de $G(j\omega)$. Se observa que el lugar $G(j\omega)$ es tangente al lugar $M = -8$ dB en $\omega = 0.97$ rad/seg, y que es tangente al lugar $M = -4$ dB en $\omega = 2.8$ rad/seg.

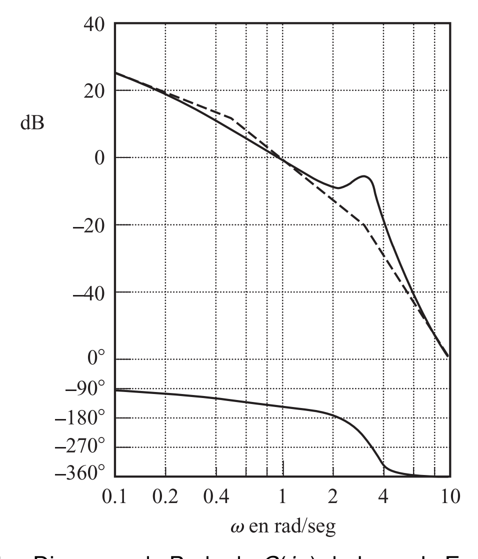


Figura 7-141. Diagrama de Bode de $G(j\omega)$ dada por la Ecuación (7-32).

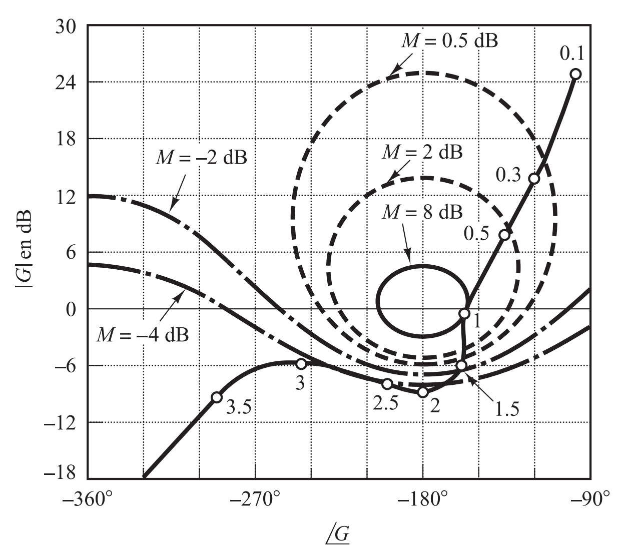


Figura 7-142. Diagrama de la magnitud logarítmica respecto de la fase de $G(s)$ dada por la Ecuación (7-32).

La Figura 7-143 muestra el diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo cerrado. La curva de magnitud de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado muestra dos picos de resonancia. Observe que esto ocurre cuando la función de transferencia en lazo cerrado contiene el producto de dos términos de segundo orden ligeramente amortiguados y las dos frecuencias de resonancia correspondientes están suficientemente separadas una de otra. De hecho, la función de transferencia en lazo cerrado de este sistema se escribe

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{9}{(s^2 + 0.487s + 1)(s^2 + 0.613s + 9)}$$

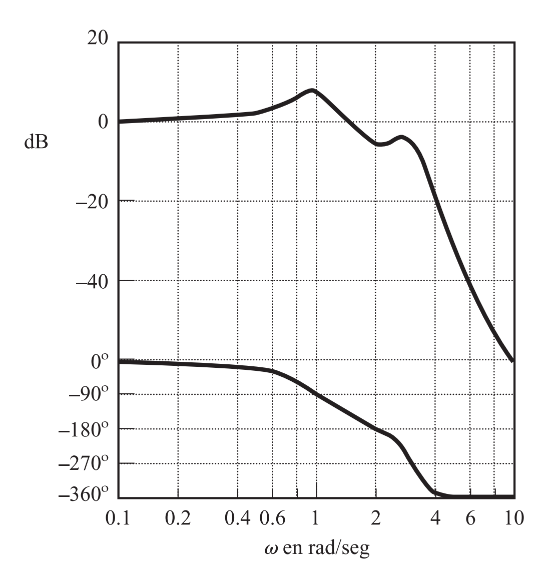


Figura 7-143. Diagrama de Bode de $G(s)/[1 + G(s)]$, donde $G(s)$ viene dada por la Ecuación (7-32).

Es evidente que la función de transferencia en lazo cerrado es un producto de dos términos de segundo orden ligeramente amortiguados (los factores de amortiguamiento relativo son 0.243 y 0.102) y las dos frecuencias de resonancia están suficientemente separadas.

A-7-24. Sea el sistema que se muestra en la Figura 7-144(a). Diseñe un compensador tal que el sistema en lazo cerrado satisfaga los requisitos siguientes: constante de error estático de velocidad = 20 seg^{-1}, margen de fase = 50° y margen de ganancia $\geqq$ 10 dB.

Solución. Para satisfacer las especificaciones, se intentará un compensador de adelanto $G_c(s)$ de la forma

$$G_c(s) = K_c\alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

$$= K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

(Si este compensador no funciona, se utilizará un compensador con una forma diferente.) En la Figura 7-144(b) se muestra el sistema compensado.

Se define

$$G_1(s) = KG(s) = \frac{10K}{s(s+1)}$$

donde $K = K_c\alpha$. El primer paso en el diseño es ajustar la ganancia K para que se cumpla la especificación de comportamiento en estado estacionario o para proporcionar la constante de error estático de velocidad requerida. Como la constante de error estático de velocidad K_v está dada como 20 seg^{-1}, se tiene que

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} G_1(s)$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{s10K}{s(s+1)}$$

$$= 10K = 20$$

o bien

$$K = 2$$

Con $K = 2$, el sistema compensado cumplirá la especificación en estado estacionario.

A continuación se representa el diagrama de Bode de

$$G_1(s) = \frac{20}{s(s+1)}$$

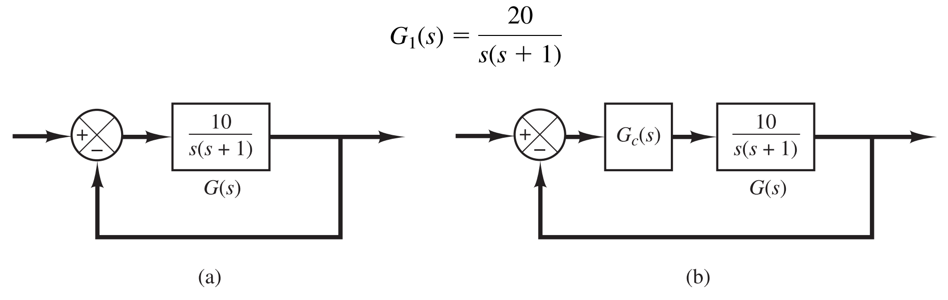


Figura 7-144. (a) Sistema de control; (b) sistema compensado.

El Programa de MATLAB 7-24 produce el diagrama de Bode que se muestra en la Figura 7-145. A partir de este diagrama, se encuentra que el margen de fase es de 14º. El margen de ganancia es $+\infty$ dB.

MATLAB Programa 7-24

```
num=[20];
den=[1 1 0];
w=logspace(-1, 2, 100);
bode (num, den, w)
title ('Diagrama de Bode de G1(s)=20/[s(s+1)]')
```

Como la especificación requiere un margen de fase de 50º, el adelanto de fase adicional necesario para satisfacer el requisito de margen de fase es de 36º. Un compensador de adelanto puede contribuir a esta cantidad.

Si se considera que la adición de un compensador de adelanto modifica la curva de magnitud del diagrama de Bode, se comprende que la frecuencia de cruce de ganancia se desplazará hacia la derecha. Se debe compensar el incremento del retardo de fase de $G_1(j\omega)$ debido a este aumento en la frecuencia de cruce de ganancia. Si se toma en consideración el desplazamiento de la frecuencia de cruce de ganancia, se puede suponer que ϕ_m, el adelanto de fase máximo requerido, es de aproximadamente 41º. (Esto significa que se han añadido aproximadamente 5º para compensar el cambio en la frecuencia de cruce de ganancia.) Como

$$\operatorname{sen} \phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$\phi_m = 41^{\circ}$ corresponde a $\alpha = 0.2077$. Observe que $\alpha = \phi_m = 0.21$ corresponde a $\phi_m = 40.76^{\circ}$. No representa gran diferencia en la solución final si se selecciona $\phi_m = 41^{\circ}$ o $\phi_m = 40.76^{\circ}$. Por tanto, se escoge $\alpha = 0.21$.

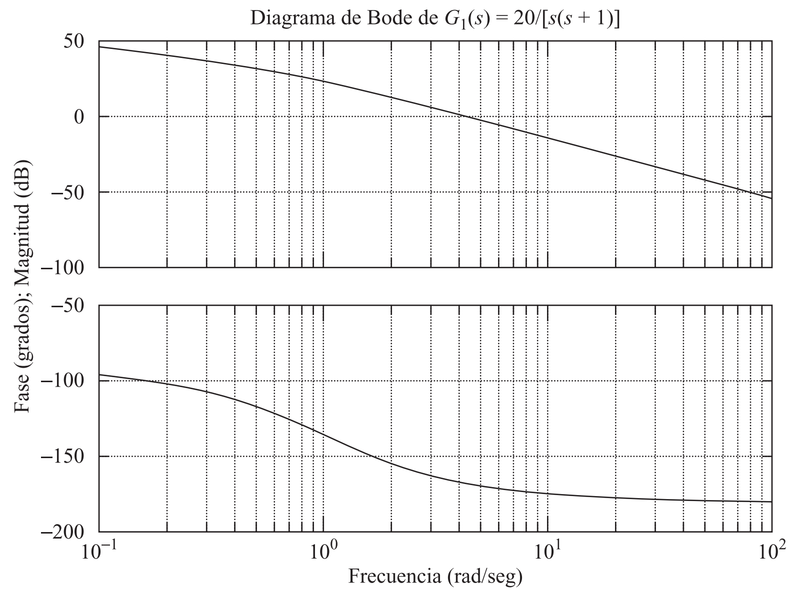


Figura 7-145. Diagramas de Bode de $G_1(s)$.

Una vez determinado el factor de atenuación α teniendo en cuenta el ángulo de adelanto de fase requerido, el paso siguiente es determinar las frecuencias esquinas $\omega = 1/T$ y $\omega = 1/(\alpha T)$ del compensador de adelanto. Observe que el ángulo de adelanto de fase máximo ϕ_m ocurre en la media geométrica de las dos frecuencias esquinas, o $\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)$.

La cantidad de modificación en la curva de magnitud en $\omega = 1/(\sqrt{\alpha}T)$ debido a la inclusión del término $(Ts + 1)/(\alpha Ts + 1)$ es

$$\left|\frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega\alpha T}\right|_{\omega=\frac{1}{\sqrt{\alpha}T}} = \left|\frac{1 + j\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + j\alpha\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Observe que

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0.21}} = 6.7778 \text{ dB}$$

Se necesita encontrar la frecuencia donde, al añadir el compensador de adelanto, la magnitud total sea de 0 dB.

En la Figura 7-145 se observa que la frecuencia donde la magnitud de $G_1(j\omega)$ es -6.7778 dB ocurre entre $\omega = 1$ y $\omega = 10$ rad/seg. Por tanto, se representa un nuevo diagrama de Bode de $G_1(j\omega)$ en el rango de frecuencias entre $\omega = 1$ y $\omega = 10$ para localizar el punto exacto en el que $G_1(j\omega) = -6.7778$ dB. En la Figura 7-146 se muestra el Programa de MATLAB 7-25 que produce el diagrama de Bode en este rango de frecuencias. A partir de este diagrama, se encuentra que la frecuencia donde $|G_1(j\omega)| = -6.7778$ dB ocurre en $\omega_c = 6.5$ rad/seg. Se selecciona esta como la nueva frecuencia de cruce de ganancia, o $\omega_c = 6.5$ rad/seg. Teniendo en cuenta que esta frecuencia corresponde a $1/(\sqrt{\alpha}T)$ o

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$$

se obtiene que

$$\frac{1}{T} = \omega_c\sqrt{\alpha} = 6.5686\sqrt{0.21} = 3.0101$$

y

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = \frac{6.5686}{\sqrt{0.21}} = 14.3339$$

MATLAB Programa 7-25

```
num=[20];
den=[1 1 0];
u=logspace(0,1,100);
bode (num, den, w)
title ('Diagrama de Bode de G1(s)=20/[s(s+1)]')
```

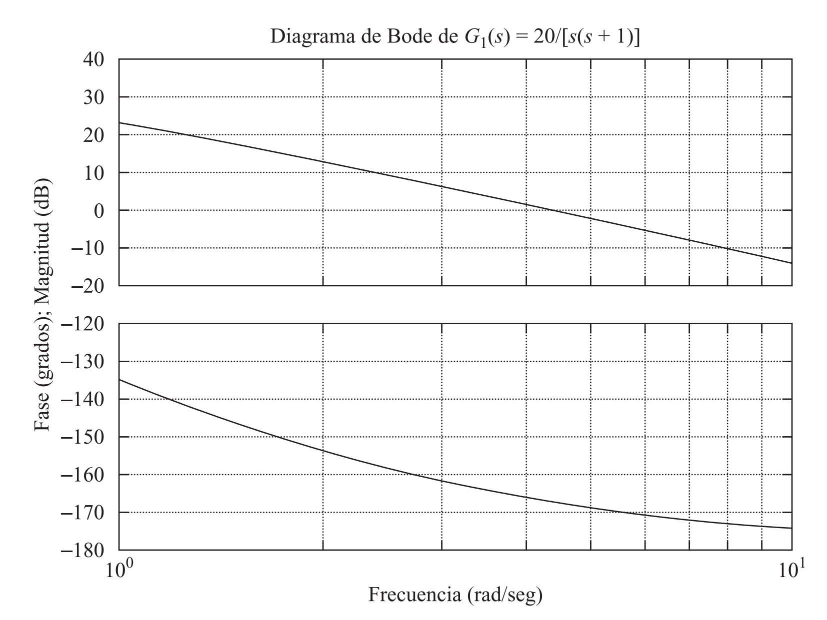


Figura 7-146. Diagramas de Bode de $G_1(s)$.

El compensador de adelanto así determinado es

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 3.0101}{s + 14.3339} = K_c \alpha \frac{0.3322s + 1}{0.06976s + 1}$$

donde K_c se determina como

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{2}{0.21} = 9.5238$$

Por tanto, la función de transferencia del compensador es

$$G_c(s) = 9.5238 \frac{s + 3.0101}{s + 14.3339} = 2 \frac{0.3322s + 1}{0.06976s + 1}$$

El Programa de MATLAB 7-26 produce el diagrama de Bode de este compensador de adelanto, que se muestra en la Figura 7-147.

MATLAB Programa 7-26

```
numc=[9.5238  28.6676];
denc=[1  14.3339];
w=logspace(-1, 3, 100);
bode (numc,denc,w)
title ('Diagrama de Bode de Gc(s)=9.5238(s+3.0101)/(s+14.3339)')
```

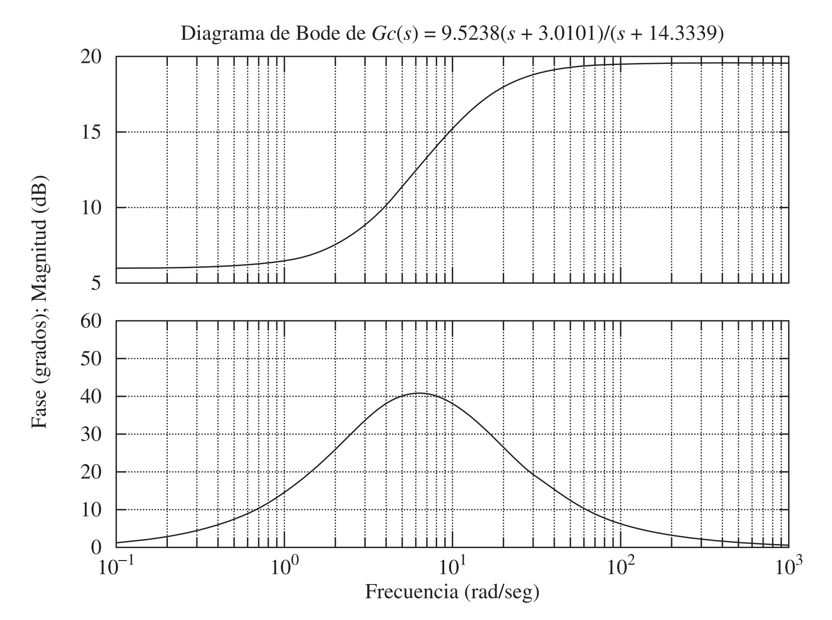


Figura 7-147. Diagramas de Bode de $G_c(s)$.

La función de transferencia en lazo abierto del sistema diseñado es

$$G_c(s)G(s) = 9.5238 \frac{s + 3.0101}{s + 14.3339} \frac{10}{s(s + 1)}$$

$$= \frac{95.238s + 286.6759}{s^3 + 15.3339s^2 + 14.3339s}$$

El Programa de MATLAB 7-27 genera los diagramas de Bode de $G_c(s)G(s)$, que se observan en la Figura 7-148.

MATLAB Programa 7-27

```
num=[95.238  283.6759];
den=[1  15.3339  14.3339 0];
sys=tf(num,den);
w=logspace(-1, 3, 100);
bode (sys,w)
grid;
title ('Diagrama de Bode de Gc(s)G(s)')
[Gm,pm,wcp,wcp]=margin(sys);
GmdB=20*log10(Gm);
[Gmdb,pm,wcp,wcg]
ans=
     lnf   49.4164   lnf    6.5686
```

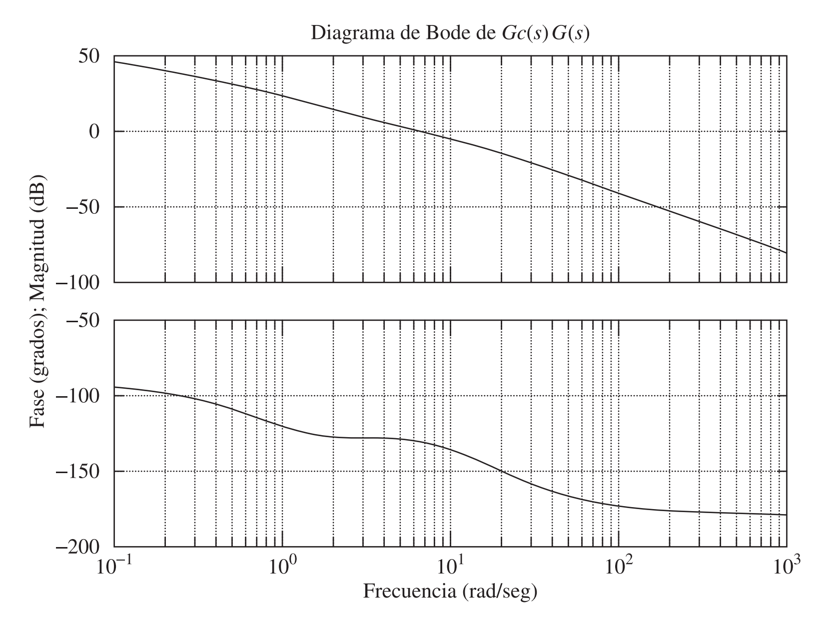


Figura 7-148. Diagramas de Bode de $G_c(s)G(s)$.

Del Programa de MATLAB 7-27 y la Figura 7-148 se aprecia claramente que el margen de fase es aproximadamente de 50º y que el margen de ganancia es de $+\infty$ dB. Como la constante de error estático de velocidad K_v es de 20 seg^{-1}, se cumplen todas las especificaciones. Antes de concluir este problema, se necesita comprobar las características de la respuesta transitoria.

Respuesta a un escalón unitario: Se compara la respuesta escalón unitario del sistema compensado con la del sistema no compensado original.

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema no compensado original es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{95.238s + 286.6759}{s^3 + 15.3339s^2 + 110.5719s + 286.6759}$$

El programa de MATLAB 7-28 genera las respuestas escalón unitario de los sistemas no compensado y compensado. En la Figura 7-149 se muestran las curvas de respuesta resultantes. Es evidente que el sistema compensado presenta una respuesta satisfactoria. Observe que el cero y los polos en lazo cerrado se localizan del modo siguiente:

$$\text{Cero en } s = -3.0101$$

$$\text{Polos en } s = -52880 \pm j5.6824, \qquad s = -4.7579$$

Respuesta a una rampa unitaria: Merece la pena comparar la respuesta a una rampa unitaria del sistema compensado. Como $K_c = 20\ \text{seg}^{-1}$, el error en estado estacionario en el seguimiento de

una entrada rampa unitaria será de $1/K_v = 0.05$. La constante de error estático de velocidad del sistema no compensado es 10 seg^{-1}. Por tanto, el sistema no compensado original tendrá un error en estado estacionario dos veces mayor en el seguimiento de la entrada rampa unitaria.

MATLAB Programa 7-28

```
%*****Respuestas a un escalón unitario*****
num1=[10];
den1=[1  1  10];
num2=[95.238  286.6759];
den2=[1  15.3339  110.5719  286.6759];
t=0:0.01:6;
[c1, x1, t]=step (num1, den1, t);
[c2, x2, t]=step (num2, den2, t);
plot (t, c1, '.', t, c2, '-')
grid
title ('Respuestas escalón unitario de los sistemas no compensado
% y compensado')
xlabe l('t Seg')
ylabel ('Salidas')
text (1.70, 1.45, 'Sistema no compensado')
text(1.1, 0.5, 'Sistema compensado')
```

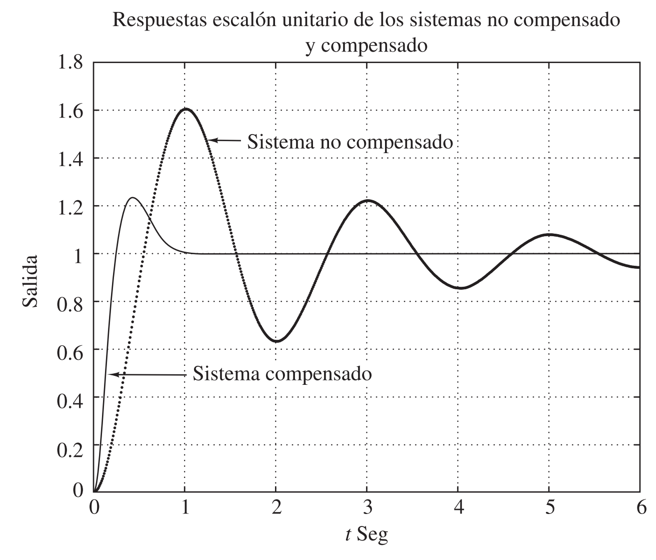


Figura 7-149. Respuestas escalón unitario de los sistemas compensado y no compensado.

El programa de MATLAB 7-29 genera las curvas de respuesta rampa unitaria. [Observe que la respuesta rampa unitaria se obtiene como la respuesta escalón unitario de $C(s)/sR(s)$.] Las curvas resultantes se muestran en la Figura 7-150. El sistema compensado tiene un error en estado estacionario igual a la mitad del que presenta el sistema no compensado original.

MATLAB Programa 7-29

```
%***** Respuestas a una rampa unitaria *****
num1 = [10];
den1 = [1  1  10  0];
num2 = [95.238  286.6759];
den2 = [1  15.3339  110.5719  286.6759  0];
t = 0:0.01:3;
[c1, x1, t] = step (num1, den1, t);
[c2, x2, t] = step (num2, den2, t);
plot (t, c1, '.', t, c2, '-', t,t, '--')
grid
title ('Respuestas rampa unitaria de los sistemas no compensado
% y compensado')
xlabel('t Seg')
ylabel ('Salidas')
text (1.2, 0.65, 'Sistema no compensado')
text (0.1, 1.3, 'Sistema compensado')
```

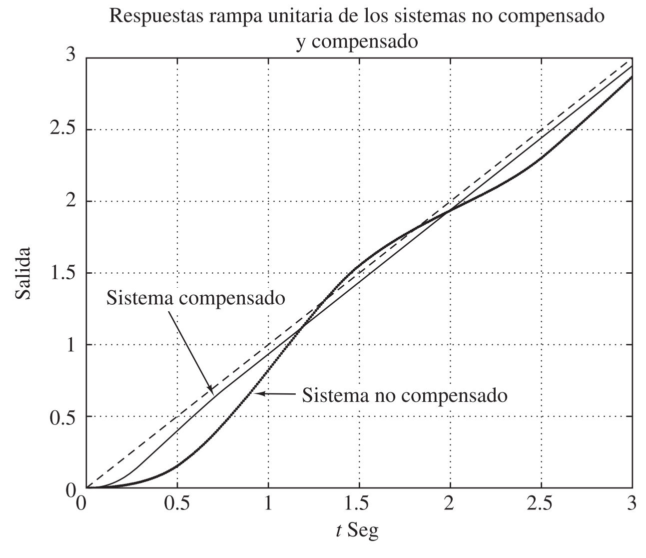


Figura 7-150. Respuestas rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado.

A-7-25. Sea el sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

Diseñe un compensador $G_c(s)$ de retardo-adelanto tal que la constante de error estático de velocidad sea de 10 seg^{-1}, el margen de fase sea de 50º y el margen de ganancia sea al menos de 10 dB.

Solución. Se diseña un compensador de retardo-adelanto de la forma

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

Por tanto, la función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es $G_c(s)G(s)$. Como la ganancia K de la planta es ajustable, se supone que $K_c = 1$. Entonces, $\lim_{s\to 0} G_c(s) = 1$. A partir del requisito sobre la constante de error estático de velocidad, se obtiene

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sG_c(s) \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

$$= \frac{K}{4} = 10$$

Por tanto,

$$K = 40$$

En primer lugar se representa un diagrama de Bode del sistema no compensado con $K = 40$. El Programa de MATLAB 7-30 se utiliza para generar este diagrama de Bode. En la Figura 7-151 se muestra el diagrama obtenido.

MATLAB Programa 7-30

```
num=[40];
den=[1  5  4  0];
w=logspace(-1,1,100);
bode(num,den,w)
title('Diagrama de Bode de G(s)=40/[s(s+1)(s+4)]')
```

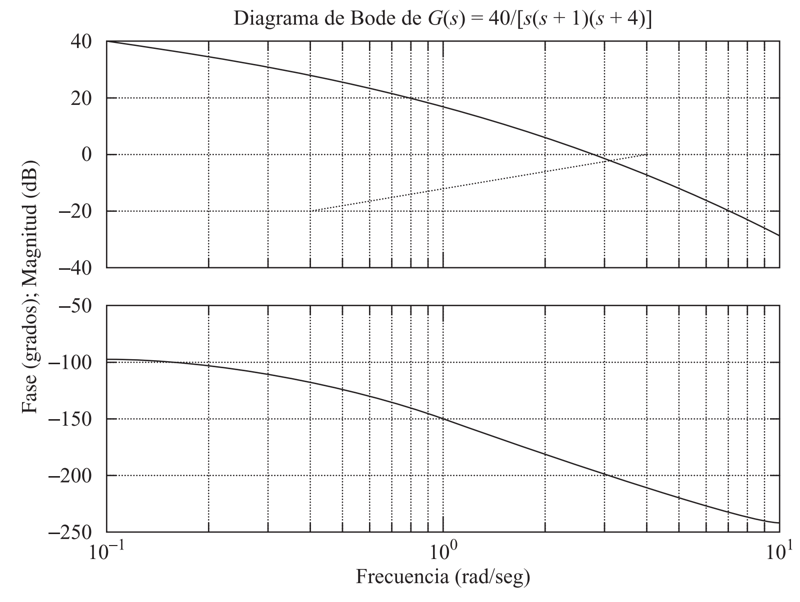


Figura 7-151. Diagramas de Bode de $G(s) = 40/[s(s+1)(s+4)]$.

De la Figura 7-151, se observa que el margen de fase del sistema no compensado es de -16°, que indica que el sistema no compensado es inestable. El paso siguiente en el diseño de un compensador de retardo-adelanto es seleccionar una nueva frecuencia de cruce de ganancia. A partir de la curva de fase de $G(j\omega)$, se observa que la frecuencia de cruce de fase es $\omega = 2$ rad/seg. Se puede seleccionar la nueva frecuencia de cruce de ganancia como 2 rad/seg para que el adelanto de fase requerido en $\omega = 2$ rad/seg sea de alrededor de 50°. Un único compensador de retardo-adelanto proporciona esta cantidad de adelanto de fase con bastante facilidad.

Una vez que se ha seleccionado la frecuencia de cruce de ganancia como 2 rad/seg, se pueden determinar las frecuencias esquinas de la parte de retardo de fase del compensador de retardo-adelanto. Se escoge la frecuencia esquina $\omega = 1/T_2$ (que corresponde al cero de la parte de retardo de fase del compensador) de forma que esté una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia, o en $\omega = 0.2$ rad/seg. Para la otra frecuencia esquina $\omega = 1/(\beta T_2)$, se necesita el valor de β. Este valor se puede determinar a partir de la consideración de la parte de adelanto del compensador, como se muestra a continuación.

Para el compensador de adelanto, el ángulo de adelanto de fase máximo ϕ_m está dado por

$$\text{sen}\, \phi_m = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

Observe que $\beta = 10$ corresponde a $\phi_m = 54.9^o$. Como se necesita un margen de fase de 50°, se puede elegir $\beta = 10$. (Observe que se emplean algunos grados menos que el ángulo máximo, 54.9^o.) Por tanto,

$$\beta = 10$$

Entonces, la frecuencia esquina $\omega = 1/(\beta T_2)$ (que corresponde al polo de la parte de retardo de fase del compensador) es

$$\omega = 0.02$$

La función de transferencia de la parte de retardo de fase del compensador de retardo-adelanto resulta

$$\frac{s + 0.2}{s + 0.02} = 10 \left(\frac{5s + 1}{50s + 1} \right)$$

La parte de adelanto de fase se puede determinar del modo siguiente. Como la nueva frecuencia de cruce de ganancia es $\omega = 2$ rad/seg, de la Figura 7-151, se encuentra que $|G(j2)|$ es 6 dB. Por tanto, si el compensador de retardo-adelanto contribuye -6 dB en $\omega = 1$ rad/seg, entonces la nueva frecuencia de cruce de ganancia es la que se desea. A partir de este requisito es posible dibujar una línea recta con pendiente de 20 dB/década que pasa por el punto (2 rad/seg, -6 dB). (Esta recta se ha dibujado manualmente en la Figura 7-151.) Las intersecciones de esta recta con las rectas 0-dB y -20-dB determinan las frecuencias esquinas. De esta consideración, las frecuencias esquinas de la parte de adelanto se obtienen como $\omega = 0.4$ rad/seg y $\omega = 4$ rad/seg. Así, la función de transferencia de la parte de adelanto del compensador de retardo-adelanto es

$$\frac{s + 0.4}{s + 4} = \frac{1}{10} \left(\frac{2.5s + 1}{0.25s + 1} \right)$$

Combinando las funciones de transferencia de las partes de retardo y adelanto del compensador, se obtiene la función de transferencia $G(s)$ del compensador de retardo-adelanto. Como se escoge $K_c = 1$, se tiene que

$$G_c(s) = \frac{s + 0.4}{s + 4} \frac{s + 0.2}{s + 0.02} = \frac{(2.5s + 1)(5s + 1)}{(0.25s + 1)(50s + 1)}$$

El diagrama de Bode del compensador de retardo-adelanto $G_c(s)$ se puede obtener ejecutando en un computador el programa de MATLAB 7-31 En la Figura 7-152 se muestran los diagramas resultantes.

MATLAB Programa 7-31

```
numc=[1  0.6  0.08];
denc=[1  4.02  0.08];
bode (numc, denc)
title ('Diagrama de Bode de un compensador de retardo-adelanto')
```

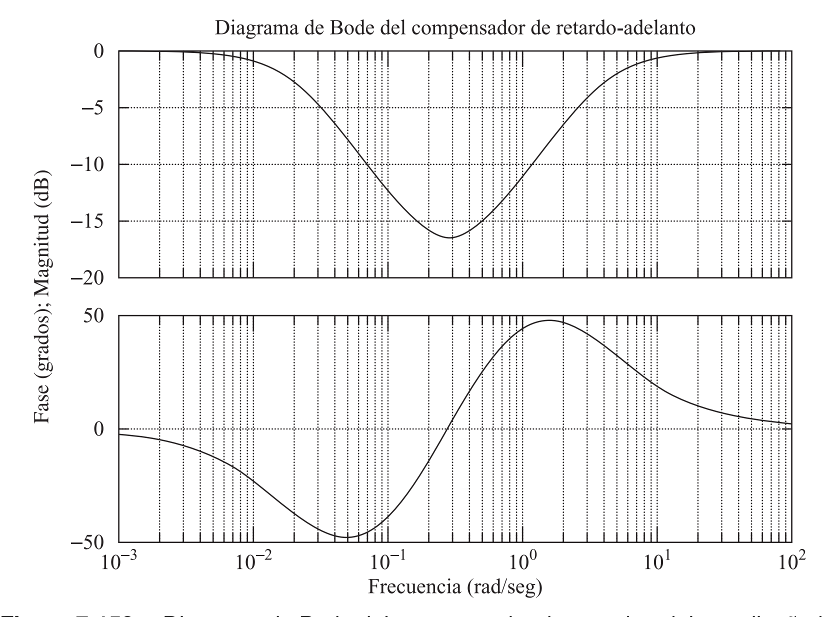


Figura 7-152. Diagrama de Bode del compensador de retardo-adelanto diseñado.

La función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado es

$$G_c(s)G(s) = \frac{(s+0.4)(s+0.2)}{(s+4)(s+0.02)} \frac{40}{s(s+1)(s+4)}$$

$$= \frac{40s^2 + 24s + 3.2}{s^5 + 9.02s^4 + 24.18s^3 + 16.48s^2 + 0.32s}$$

Usando el programa de MATLAB 7-32 se obtienen las curvas de magnitud y de fase de la función de transferencia en lazo abierto $G_c(s)G(s)$ diseñada, tal como se muestra en la Figura 7-153. Observe que el polinomio del denominador den1 se obtuvo mediante la orden conv, del modo siguiente:

```
a=[1  4.02  0.08];
b=[1  5  4  0];
conv (a,b)

ans=

    1.0000  9.0200  24.1800  16.4800  0.320000  0
```

MATLAB Programa 7-32

```
num1=[40  24  3.2];
den1=[1  9.02  24.18  16.48  0.32 0];
bode (num1, den1)
title ('Diagrama de Bode de Gc(s)G(s)')
```

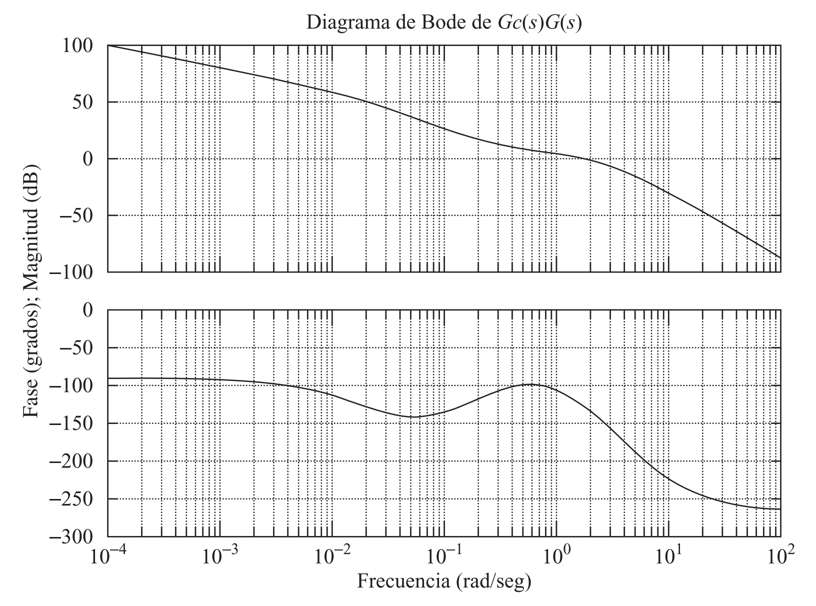


Figura 7-153. Diagramas de Bode de la función de transferencia en lazo abierto $G_c(s)G(s)$ del sistema compensado.

Como el margen de fase del sistema compensado es de 50°, el margen de ganancia es de 12.5 dB y la constante de error estático de velocidad es de 10 seg^{-1}, se cumplen todos los requisitos.

A continuación se investigan las características de respuesta transitoria del sistema diseñado.

Respuesta a un escalón unitario: Considerando

$$G_c(s)G(s) = \frac{40(s + 0.4)(s + 0.2)}{(s + 4)(s + 0.02)s(s + 1)(s + 4)}$$

se tiene que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

$$= \frac{40(s + 0.4)(s + 0.2)}{(s + 4)(s + 0.02)s(s + 1)(s + 4) + 40(s + 0.4)(s + 0.2)}$$

Para determinar el polinomio del denominador con MATLAB, se puede proceder del modo siguiente. Defina

$$a(s) = (s + 4)(s + 0.02) = s^2 + 4.02s + 0.08$$

$$b(s) = s(s + 1)(s + 4) = s^3 + 5s^2 + 4s$$

$$c(s) = 40(s + 0.4)(s + 0.2) = 40s^2 + 24s + 3.2$$

Entonces se tiene que

```
a=[1  4.02  0.08]
b=[1  5  4  0]
c=[40  24  3.2]
```

Utilizando el siguiente programa de MATLAB, se obtiene el polinomio del denominador.

```
a=[1  4.02  0.08];
b=[1  5  4  0];
c=[40  24  3.2];
p=[conv(a, b)]+[0  0  0  c]
p=
   1.0000  9.0200  24.1800  56.4800  24.3200  3.2000
```

El programa de MATLAB 7-33 se utiliza para obtener la respuesta a un escalón unitario del sistema compensado. En la Figura 7-154 se muestra la curva de la respuesta escalón unitario resultante. (Observe que el sistema no compensado es inestable.)

MATLAB Programa 7-33

```
%*****Respuesta a un escalón unitario****
num=[40  24  3.2];
den=[1  9.02  24.18  56.48  24.32  3.2];
t=0:0.2:40;
step (num, den, t)
grid
title('Respuesta escalón unitario del sistema compensado')
```

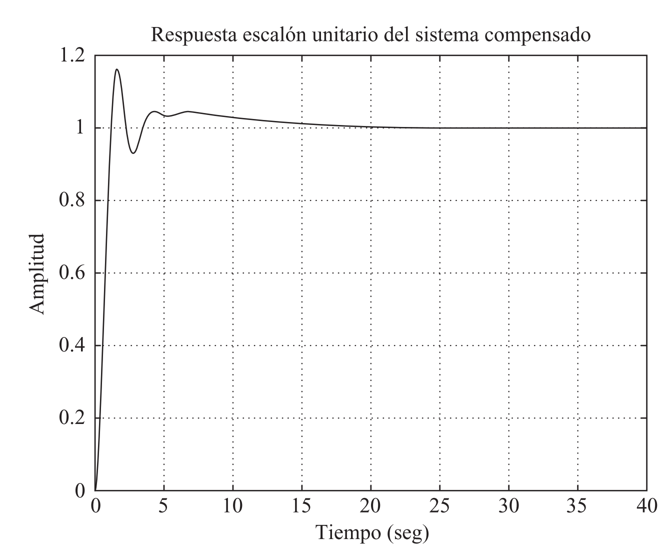


Figura 7-154. Curva de respuesta escalón unitario del sistema compensado.

Respuesta a una rampa unitaria: La respuesta a una rampa unitaria de este sistema se puede obtener ejecutando en una computadora el Programa de MATLAB 7-34. En este programa se convierte la respuesta a una rampa unitaria de $G_cG/(1 + G_cG)$ en la respuesta a un escalón unitario de $G_cG/[s(1 + G_cG)]$. En la Figura 7-155 se muestra la curva de respuesta a una rampa unitaria obtenida utilizando este programa.

MATLAB Programa 7-34

```
%***** Respuesta a una rampa unitaria *****
num=[40  24  3.2];
den=[1  9.02  24.18  56.48  24.32  3.2 0];
t=0:0.05:20;
c=step(num, den, t);
plot(t, c, '-', t, t, '.')
grid
title('Respuesta a una rampa unitaria del sistema compensado')
xlabel('Tiempo (seg)')
ylabel('Entrada rampa unitaria y salida c(t)')
```

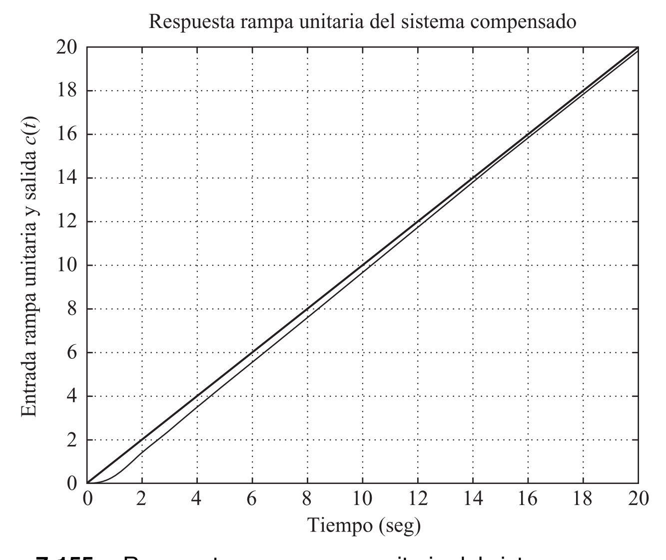


Figura 7-155. Respuesta a una rampa unitaria del sistema compensado.

PROBLEMAS

B-7-1. Considere el sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{10}{s + 1}$$

Obtenga la salida en estado estacionario del sistema cuando está sujeto a cada una de las entradas siguientes:

(a) $r(t) - \text{sen}\,(t + 30^{\circ})$
(b) $r(t) = 2\cos\,(2t - 45^{\circ})$
(c) $r(t) = \text{sen}\,(t + 30^{\circ}) - 2\cos\,(2t - 45^{\circ})$

B-7-2. Considere el sistema cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(T_2 s + 1)}{T_1 s + 1}$$

Obtenga la salida en estado estacionario del sistema cuando está sujeto a la entrada $r(t) = R \operatorname{sen} \omega t$.

B-7-3. Utilizando MATLAB, dibuje los diagramas de Bode de $G_1(s)$ y $G_2(s)$:

$$G_1(s) = \frac{1 + s}{1 + 2s}$$

$$G_2(s) = \frac{1 - s}{1 + 2s}$$

$G_1(s)$ es un sistema de fase mínima y $G_2(s)$ es un sistema de fase no mínima.

B-7-4. Dibuje el diagrama de Bode de

$$G(s) = \frac{10(s^2 + 0.4s + 1)}{s(s^2 + 0.8s + 9)}$$

B-7-5. Dado

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

demuestre que

$$|G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\zeta}$$

B-7-6. Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{s + 0.5}{s^3 + s^2 + 1}$$

Este es un sistema de fase no mínima. Dos de los tres polos en lazo abierto se localizan en el semiplano derecho del plano s del modo siguiente:

$$\text{Polos en lazo abierto en } s = -1.4656$$
$$s = 0.2328 + j0.7926$$
$$s = 0.2328 - j0.7926$$

Dibuje el diagrama de Bode de $G(s)$ con MATLAB. Explique por qué la curva del ángulo de fase comienza en 0° y tiende a $+180^\circ$.

B-7-7. Dibuje los diagramas polares de la función de transferencia en lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$$

para los dos casos siguientes:

(a) $T_a > T > 0, \qquad T_b > T > 0$
(b) $T > T_a > 0, \qquad T > T_b > 0$

B-7-8. Dibuje el diagrama de Nyquist para el sistema de control de realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{K(1 - s)}{s + 1}$$

Utilizando el criterio de estabilidad de Nyquist, determine la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

B-7-9. Un sistema con la función de transferencia en lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(T_1 s + 1)}$$

es intrínsecamente inestable. Este sistema se estabiliza si se añade un control derivativo. Dibuje los diagramas polares para la función de transferencia en lazo abierto con y sin control derivativo.

B-7-10. Considere el sistema en lazo cerrado con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s)H(s) = \frac{10K(s + 0.5)}{s^2(s + 2)(s + 10)}$$

Dibuje los diagramas polares directo e inverso de $G(s)H(s)$ con $K = 1$ y $K = 10$. Aplique el criterio de estabilidad de Nyquist a las gráficas y determine la estabilidad del sistema con estos valores de K.

B-7-11. Considere el sistema en lazo cerrado cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-2s}}{s}$$

Encuentre el valor máximo de K para el cual el sistema es estable.

B-7-12. Dibuje un diagrama de Nyquist para la $G(s)$ siguiente:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 0.8s + 1)}$$

B-7-13. Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 0.2s^2 + s + 1}$$

Dibuje un diagrama de Nyquist de $G(s)$ y examine la estabilidad del sistema.

B-7-14. Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 0.2s^2 + s + 1}$$

Dibuje un diagrama de Nyquist de $G(s)$ y examine la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

B-7-15. Considere el sistema con realimentación unitaria con la siguiente $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

Suponga que se escoge la trayectoria de Nyquist que se muestra en la Figura 7-156. Dibuje el correspondiente lugar de $G(j\omega)$ en el plano $G(s)$. Utilizando el criterio de estabilidad de Nyquist, determine la estabilidad del sistema.

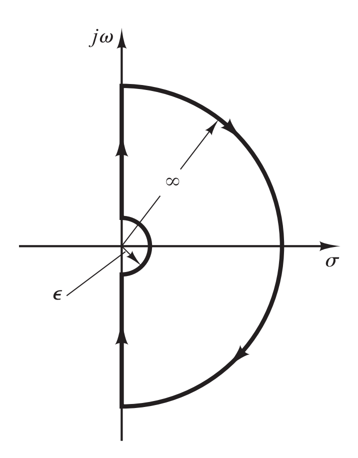


Figura 7-156. Trayectoria de Nyquist.

B-7-16. Considere el sistema en lazo cerrado de la Figura 7-157. $G(s)$ no tiene nigún polo en el semiplano derecho del plano s.

Si el diagrama de Nyquist de $G(s)$ es el mostrado en la Figura 7-158(a), ¿es estable el sistema?

Si el diagrama de Nyquist de $G(s)$ es el mostrado en la Figura 7-158(b), ¿es estable el sistema?

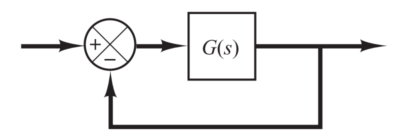


Figura 7-157. Sistema en lazo cerrado.

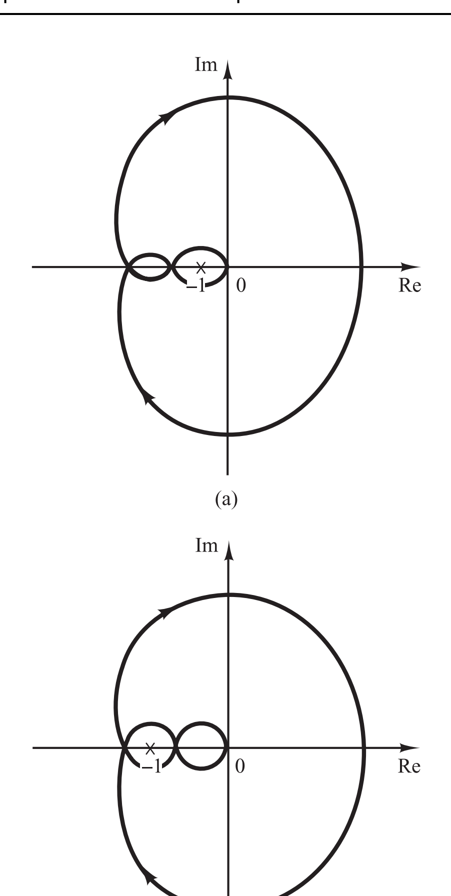


Figura 7-158. Diagramas de Nyquist.

B-7-17. La Figura 7-159 muestra el diagrama de Nyquist de un sistema de realimentación unitaria con función de transferencia de camino directo $G(s)$.

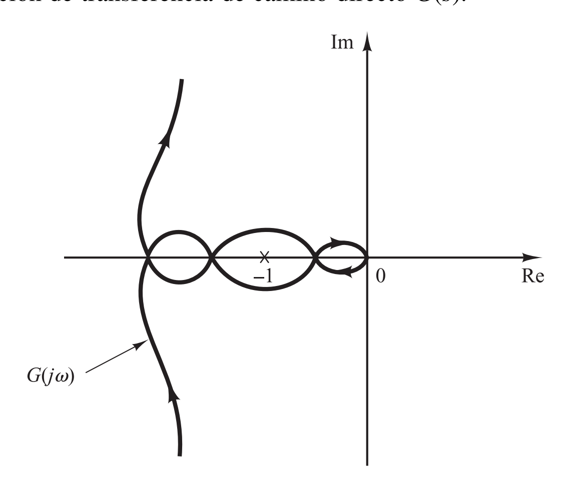


Figura 7-159. Diagrama de Nyquist.

Si $G(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho del plano s, ¿es estable el sistema?

Si $G(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho del plano s, pero tiene un cero en el semiplano derecho del plano s, ¿es estable el sistema?

B-7-18. Considere el sistema de control con la siguiente función de transferencia en lazo abierto $G(s)$:

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+10)}$$

Dibuje los diagramas de Nyquist de $G(s)$ para $K = 1$, 10 y 100.

B-7-19. Considere el sistema de realimentación negativa con la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

Dibuje el diagrama de Nyquist de $G(s)$. Si el sistema fuese de realimentación positiva con la misma función de transferencia en lazo abierto $G(s)$, ¿cómo sería su diagrama de Nyquist?

B-7-20. Considere el sistema de control que se muestra en la Figura 7-160. Dibuje los diagramas de Nyquist de $G(s)$, donde

$$G(s) = \frac{10}{s[(s+1)(s+5)+10k]} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + (5+10k)s}$$

para $k = 0.3$, 0.5 y 0.7.

B-7-21. Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

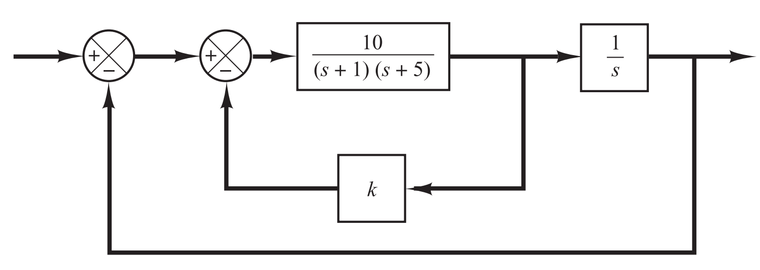


Figura 7-160. Sistema de control.

Hay cuatro diagramas de Nyquist individuales implícitos en este sistema. Dibuje dos diagramas de Nyquist para la entrada u_1 en un gráfico y dos diagramas de Nyquist para la entrada u_2 en otro gráfico. Escriba un programa MATLAB para obtener estos dos gráficos.

B-7-22. Haciendo referencia al problema **B-7-21**, se quiere dibujar sólo $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ para $\omega > 0$. Escriba un programa MATLAB que calcule dicho gráfico.

Si se desea dibujar $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ para $-\infty < \omega < \infty$, ¿qué cambios deben hacerse en el programa MATLAB?

B-7-23. Considere el sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{as+1}{s^2}$$

Determine el valor de a tal que el margen de fase sea 45°.

B-7-24. Considere el sistema de la Figura 7-161. Dibuje los diagramas de Bode de la función de transferencia en lazo abierto $G(s)$. Determine el margen de fase y el margen de ganancia.

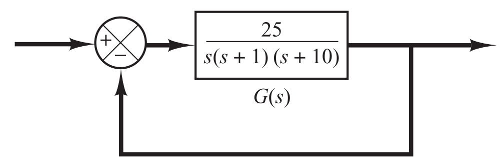


Figura 7-161. Sistema de control.

B-7-25. Considere el sistema de la Figura 7-162. Dibuje los diagramas de Bode de la función de transferencia en lazo abierto $G(s)$. Determine el margen de fase y el margen de ganancia con MATLAB.

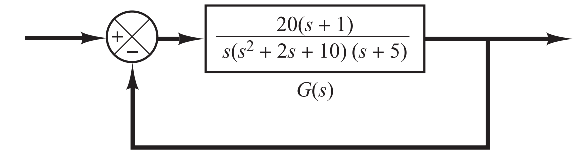


Figura 7-162. Sistema de control.

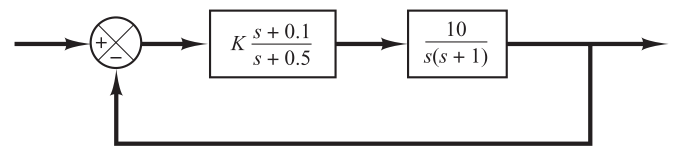


Figura 7-163. Sistema de control.

B-7-26. Considere un sistema de control con realimentación unitaria con la función de transferencia en lazo abierto.

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 4)}$$

Determine el valor de la ganancia K tal que el margen de fase sea 50º. ¿Cuál es el margen de ganancia de este sistema con esta ganancia K?

B-7-27. Considere el sistema de la Figura 7-163. Dibuje los diagramas de Bode de la función de transferencia en lazo abierto y determine el valor de la ganancia K tal que el margen de fase sea 50º. ¿Cuál es el margen de ganancia de este sistema con esta ganancia K?

B-7-28. Considere un sistema de control con realimentación unitaria cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 0.5)}$$

Determine el valor de la ganancia K tal que la magnitud del pico de resonancia en la respuesta en frecuencia sea de 2 dB o M_r = 2dB.

B-7-29. En la Figura 7-164 se muestra un diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo abierto $G(s)$ de un sistema de control con realimentación unitaria. Se sabe que la función de transferencia en lazo abierto es de fase mínima. Del diagrama se puede ver que hay un par de polos complejos conjugados en ω = 2 rad/seg. Determinar el coeficiente de amortiguamiento del término cuadrático que corresponde a estos polos complejos conjugados. También determinar la función de transferencia $G(s)$.

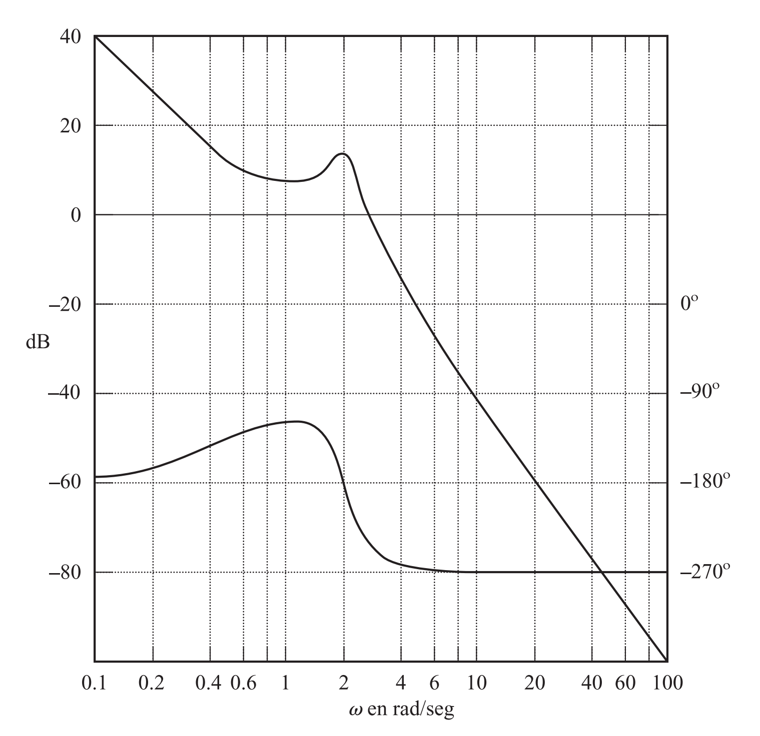


Figura 7-164. Diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo abierto de un sistema de control con realimentación unitaria.

B-7-30. Dibuje los diagramas de Bode del controlador PI dado por

$$G_c(s) = 5\left(1 + \frac{1}{2s}\right)$$

y del controlador PD dado por

$$G_c(s) = 5(1 + 0.5s)$$

B-7-31. La Figura 7-165 muestra un diagrama de bloques del sistema de control de posición de un vehículo espacial. Determine la constante de ganancia proporcional K_p y el tiempo derivativo T_d tales que el ancho de banda del sistema en lazo cerrado sea de 0.4 a 0.5 rad/seg. (Observe que el ancho de banda en lazo cerrado está cerca de la frecuencia de cruce de ganancia.) El sistema debe tener un margen de fase adecuado. Represente las curvas de respuesta en frecuencia en lazo abierto y en lazo cerrado en diagramas de Bode.

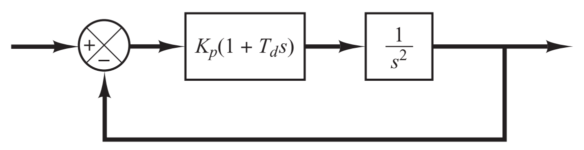


Figura 7-165. Diagrama de bloque del sistema de control de posición de un vehículo espacial.

B-7-32. Refiriéndose al sistema en lazo cerrado de la Figura 7-166, diseñe un compensador de adelanto $G_c(s)$ tal que el margen de fase sea de 45º, el margen de ganancia no sea menor que 8 dB y la constante de error estático de velocidad K_v sea de 4.0 seg^{-1}. Represente las curvas de respuesta a un escalón unitario y a una rampa unitaria con MATLAB.

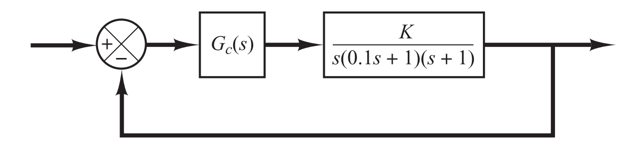


Figura 7-166. Sistema en lazo cerrado.

B-7-33. Sea el sistema que se muestra en la Figura 7-167. Se desea diseñar un compensador tal que la constante de error estático de velocidad sea de 4 seg^{-1}, el margen de fase sea de 50º y el margen de ganancia sea al menos de 8 dB. Represente las curvas de respuesta a un escalón unitario y a una rampa unitaria del sistema compensado con MATLAB.

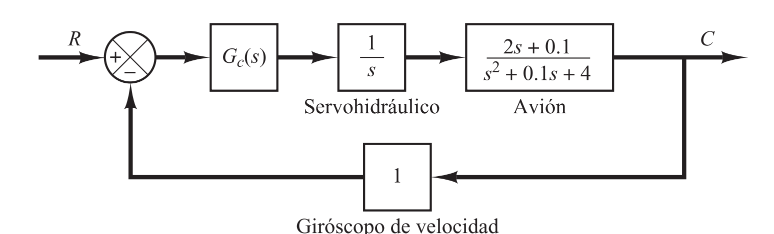


Figura 7-167. Sistema de control.

B-7-34. Sea el sistema que se muestra en la Figura 7-168. Diseñe un compensador de retardo-adelanto tal que la constante de error estático de velocidad K_v sea de 20 seg^{-1}, el margen de fase sea de 60º y el margen de ganancia de al menos 8 dB. Represente las curvas de respuesta a un escalón unitario y a una rampa unitaria del sistema compensado con MATLAB.

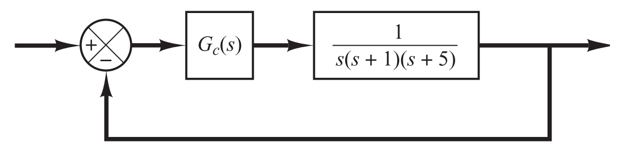


Figura 7-168. Sistema de control.



Controladores PID y controladores PID modificados

8-1 Introducción

En los capítulos previos, de forma ocasional se analizaron los esquemas básicos de control PID. Por ejemplo, en el Capítulo 5 se presentaron los controladores PID hidráulicos, neumáticos y electrónicos. También se diseñaron sistemas de control que contenían controladores PID.

Es interesante señalar que más de la mitad de los controladores industriales que se usan hoy en día utilizan esquemas de control PID o PID modificado.

Como casi todos los controladores PID se ajustan en el sitio, en la literatura se han propuesto muchos tipos diferentes de reglas de sintonización, que permiten llevar a cabo una sintonización delicada y fina de los controladores PID en el sitio. Asimismo, se han desarrollado métodos automáticos de sintonización y algunos de los controladores PID poseen capacidad de sintonización automática en línea. Actualmente se usan en la industria formas modificadas del control PID, tales como el control I-PD y el control PID con dos grados de libertad. Es posible obtener muchos métodos prácticos para una conmutación sin choque (desde la operación manual hasta la operación automática) y una programación del aumento.

La utilidad de los controles PID estriba en que se aplican en forma casi general a la mayoría de los sistemas de control. En particular, cuando el modelo matemático de la planta no se conoce y, por lo tanto, no se pueden emplear métodos de diseño analíticos, es cuando los controles PID resultan más útiles. En el campo de los sistemas para control de procesos, es un hecho bien conocido que los esquemas de control PID básicos y modificados han demostrado su utilidad para aportar un control satisfactorio, aunque tal vez en muchas situaciones específicas no aporten un control óptimo.

En este capítulo se presenta en primer lugar el diseño de un sistema controlado por un PID utilizando las reglas de sintonía de Ziegler y Nichols. A continuación se estudia un diseño de un

controlador PID con el método convencional de respuesta en frecuencia, seguido del método de optimización computacional para el diseño de controladores PID.

Seguidamente se estudian controles PID modificados, tales como control PI-D y control I-PD. Se continúa con los sistemas de control con múltiples grados de libertad, que pueden satisfacer especificaciones que entran en conflicto y que los sistemas de control con un grado de libertad no pueden satisfacer. (Para la definición de sistemas de control con dos grados de libertad véase la Sección 8-6.)

En casos prácticos, puede haber especificaciones sobre la respuesta a perturbaciones de entrada y otras sobre la respuesta a una entrada de referencia. Con frecuencia estos dos requisitos son incompatibles entre sí y no se pueden cumplir en el caso de tener sólo un grado de libertad. Al aumentar los grados de libertad se pueden satisfacer ambos. En este capítulo se presentan con detalle los sistemas de control con dos grados de libertad.

El método computacional que se presenta en este capítulo para el diseño de sistemas de control (para buscar conjuntos óptimos de valores de parámetros que satisfagan determinadas especificaciones de respuesta transitoria) se puede emplear para diseñar sistemas de control con un único grado de libertad o con múltiples grados de libertad a condición de que se conozca un modelo de la planta bastante preciso.

Contenido del capítulo. La Sección 8-1 presentó el material introductorio al capítulo. La Sección 8-2 aborda el diseño de un controlador PID con las reglas de sintonía de Ziegler-Nichols. La Sección 8-3 presenta un diseño de un controlador PID con el método de la respuesta en frecuencia. La Sección 8-4 presenta un método computacional para buscar conjuntos óptimos de valores de parámetros de controladores PID. La Sección 8-5 introduce los sistemas de control con múltiples grados de libertad incluyendo los esquemas de control PID modificados.

8-2 Reglas de Ziegler-Nichols para la sintonía de controladores PID

Control PID de plantas. La Figura 8-1 muestra un control PID de una planta. Si se puede obtener un modelo matemático de la planta, es posible aplicar diversas técnicas de diseño con el fin de determinar los parámetros del controlador que cumpla las especificaciones del transitorio y del estado estacionario del sistema en lazo cerrado. Sin embargo, si la planta es tan complicada que no es fácil obtener su modelo matemático, tampoco es posible un método analítico para el diseño de un controlador PID. En este caso, se debe recurrir a procedimientos experimentales para la sintonía de los controladores PID.

El proceso de seleccionar los parámetros del controlador que cumplan con las especificaciones de comportamiento dadas se conoce como sintonía del controlador. Ziegler y Nichols sugirieron reglas para sintonizar los controladores PID (esto significa dar valores a K_p, T_i y T_d) basándose en las respuestas escalón experimentales o en el valor de K_p que produce estabilidad marginal cuando sólo se usa la acción de control proporcional. Las reglas de Ziegler-Nichols, que se presentan a continuación, son muy convenientes cuando no se conocen los modelos matemáticos de las plantas. (Por supuesto, estas reglas se pueden aplicar al diseño de sistemas con modelos matemáticos conocidos.) Tales reglas sugieren un conjunto de valores de K_p, T_i y T_d

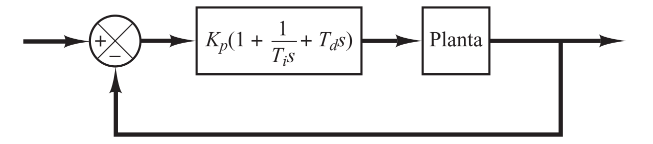


Figura 8-1. Control PID de una planta.

que darán una operación estable del sistema. No obstante, el sistema resultante puede presentar una gran sobreelongación en su respuesta escalón de forma que resulte no aceptable. En tales casos se necesitará una serie de ajustes finos hasta que se obtenga el resultado deseado. De hecho, las reglas de sintonía de Ziegler-Nichols dan una estimación razonable de los parámetros del controlador y proporcionan un punto de partida para una sintonía fina, en lugar de dar los parámetros K_p, T_i y T_d en un único intento.

Reglas de Ziegler-Nichols para sintonizar controladores PID. Ziegler y Nichols propusieron reglas para determinar los valores de la ganancia proporcional K_p, del tiempo integral T_i y del tiempo derivativo T_d, basándose en las características de respuesta transitoria de una planta dada. Tal determinación de los parámetros de los controladores PID o sintonía de controladores PID la pueden realizar los ingenieros mediante experimentos sobre la planta. (Después de la propuesta inicial de Ziegler-Nichols han aparecido numerosas reglas de sintonía de controladores PID. Estas reglas están disponibles tanto en publicaciones técnicas como de los fabricantes de estos controladores.)

Hay dos métodos denominados reglas de sintonía de Ziegler-Nichols: el primero y el segundo método. A continuación se hace una breve presentación de estos dos métodos.

Primer método. En el primer método, la respuesta de la planta a una entrada escalón unitario se obtiene de manera experimental, tal como se muestra en la Figura 8-2. Si la planta no contiene integradores ni polos dominantes complejos conjugados, la curva de respuesta escalón unitario puede tener forma de S, como se observa en la Figura 8-3. Este método se puede aplicar si la respuesta muestra una curva con forma de S. Tales curvas de respuesta escalón se pueden generar experimentalmente o a partir de una simulación dinámica de la planta.

La curva con forma de S se caracteriza por dos parámetros: el tiempo de retardo L y la constante de tiempo T. El tiempo de retardo y la constante de tiempo se determinan dibujando una recta tangente en el punto de inflexión de la curva con forma de S y determinando las intersecciones de esta tangente con el eje del tiempo y con la línea $c(t) = K$, tal como se muestra en la

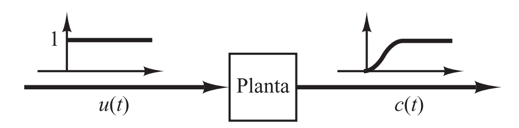


Figura 8-2. Respuesta a un escalón unitario de una planta.

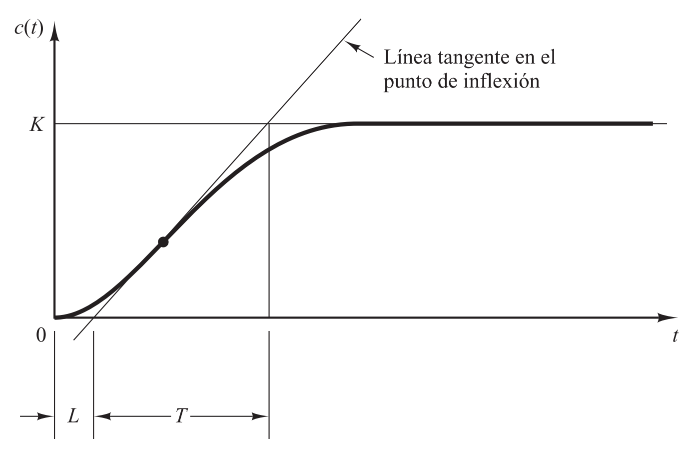


Figura 8-3. Curva de respuesta en forma de S.

Tabla 8-1. Regla de sintonía de Ziegler-Nichols basada en la respuesta escalón de la planta (primer método).

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2\frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

Figura 8-3. En este caso, la función de transferencia $C(s)/U(s)$ se aproxima mediante un sistema de primer orden con un retardo del modo siguiente:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$

Ziegler y Nichols sugirieron establecer los valores de K_p, T_i y T_d de acuerdo con la fórmula que se muestra en la Tabla 8-1.

Obsérvese que el controlador PID sintonizado mediante el primer método de las reglas de Ziegler-Nichols produce

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

$$= 1.2\frac{T}{L}\left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls\right)$$

$$= 0.6T\frac{\left(s + \frac{1}{L}\right)^2}{s}$$

Por tanto, el controlador PID tiene un polo en el origen y un cero doble en $s = -1/L$.

Segundo método. En el segundo método, primero se fija $T_i = \infty$ y $T_d = 0$. Usando sólo la acción de control proporcional (véase la Figura 8-4), se incrementa K_p desde 0 hasta un valor crítico K_{cr}, en donde la salida presente oscilaciones sostenidas. (Si la salida no presenta oscilaciones sostenidas para cualquier valor que pueda tomar K_p, entonces este método no se puede aplicar.) Así, la ganancia crítica K_{cr} y el periodo P_{cr} correspondiente se determinan experimental-

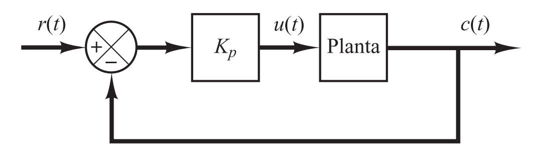


Figura 8-4. Sistema en lazo cerrado con un controlador proporcional.

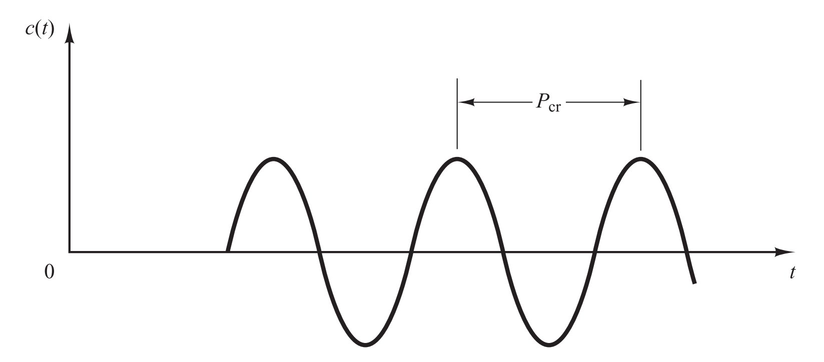


Figura 8-5. Oscilación sostenida con periodo P_{cr} (P_{cr} se mide en seg.).

mente (véase la Figura 8-5). Ziegler-Nichols sugirieron que se establecieran los valores de los parámetros K_p, T_i y T_d de acuerdo con la fórmula que se muestra en la Tabla 8-2.

Tabla 8-2. Regla de sintonía de Ziegler-Nichols basada en la ganancia crítica K_{cr} y periodo crítico P_{cr} (segundo método).

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Obsérvese que el controlador PID sintonizado mediante el segundo método de las reglas de Ziegler-Nichols produce

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

$$= 0.6K_{cr}\left(1 + \frac{1}{0.5P_{cr}s} + 0.125P_{cr}s\right)$$

$$= 0.075K_{cr}P_{cr}\frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}}\right)^2}{s}$$

Por tanto, el controlador PID tiene un polo en el origen y un cero doble en $s = -4/P_{cr}$.

Conviene darse cuenta de que, si el sistema tiene un modelo matemático conocido (como la función de transferencia), entonces se puede emplear el método del lugar de las raíces para encontrar la ganancia crítica K_{cr} y las frecuencias de las oscilaciones sostenidas ω_{cr}, donde $2\pi/\omega_{cr} = P_{cr}$. Estos valores se pueden determinar a partir de los puntos de cruce de las ramas del lugar de las raíces con el eje $j\omega$. (Obviamente, si las ramas del lugar de las raíces no cortan al eje $j\omega$ este método no se puede aplicar.)

Comentarios. Las reglas de sintonía de Ziegler-Nichols (y otras reglas de sintonía que se presentan en la literatura) se han usado ampliamente para sintonizar controladores PID en sistemas de control de procesos en los que no se conoce con precisión la dinámica de la planta. Durante muchos años tales reglas de sintonía han demostrado ser muy útiles. Por supuesto, las reglas de sintonía de Ziegler-Nichols se pueden aplicar a plantas cuya dinámica se conoce. (En estos casos, hay disponibles muchos métodos analíticos y gráficos para el diseño de controladores PID, además de las reglas de sintonía de Ziegler-Nichols.)

EJEMPLO 8-1 Sea el sistema de control que se muestra en la Figura 8-6, en el cual se usa un controlador PID para controlar el sistema. El controlador PID tiene la función de transferencia

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

Aunque existen muchos métodos analíticos para el diseño de un controlador PID para este sistema, se aplica la regla de sintonía de Ziegler-Nichols para la determinación de los valores de los parámetros K_p, T_i y T_d. A continuación, obtenga una curva de respuesta escalón unitario y compruebe si el sistema diseñado presenta una sobreelongación de aproximadamente el 25%. Si la sobreelongación es excesiva (40% o más), haga una sintonía fina y reduzca la cantidad de sobreelongación al 25% o menos.

Como la planta tiene un integrador, se utiliza el segundo método de las reglas de sintonía de Ziegler-Nichols. Fijando $T_i = \infty$ y $T_d = 0$, se obtiene la función de transferencia en lazo cerrado del modo siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s+1)(s+5) + K_p}$$

El valor de K_p que hace al sistema marginalmente estable para que ocurra una oscilación sostenida se obtiene mediante el criterio de estabilidad de Routh. Como la ecuación característica para el sistema en lazo cerrado es

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K_p = 0$$

el array de Routh es:

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & K_p \\ s^1 & \dfrac{30 - K_p}{6} & \\ s^0 & K_p & \end{array}$$

Examinando los coeficientes de la primera columna del array de Routh, se encuentra que ocurrirá una oscilación sostenida si $K_p = 30$. Así, la ganancia crítica K_{cr} es

$$K_{cr} = 30$$

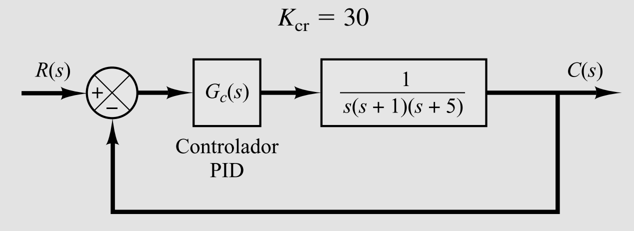


Figura 8-6. Sistema de control PID.

Con la ganancia K_p fijada igual a $K_{\text{cr}}(=30)$, la ecuación característica es

$$s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0$$

Para encontrar la frecuencia de la oscilación sostenida, se sustituye $s = j\omega$ en la ecuación característica, del modo siguiente:

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 30 = 0$$

o bien

$$6(5 - \omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) = 0$$

a partir de lo cual se encuentra que la frecuencia de la oscilación sostenida es $\omega^2 = 5$ o $\omega = \sqrt{5}$. Así, el periodo de la oscilación sostenida es

$$P_{\text{er}} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.8099$$

Teniendo en cuenta la Tabla 8-2, se determinan K_p, T_i y T_d del modo siguiente:

$$K_p = 0.6K_{\text{cr}} = 18$$

$$T_i = 0.5P_{\text{cr}} = 1.405$$

$$T_d = 0.125P_{\text{cr}} = 0.35124$$

Por tanto, la función de transferencia del controlador PID es

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

$$= 18\left(1 + \frac{1}{1.405s} + 0.35124s\right)$$

$$= \frac{6.3223(s + 1.4235)^2}{s}$$

El controlador PID tiene un polo en el origen y un cero doble en $s = -1.4235$. En la Figura 8-7 se muestra un diagrama de bloques del sistema de control con el controlador PID diseñado.

A continuación, se examina la respuesta escalón unitario del sistema. La función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ está dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6.3223s^2 + 18s + 12.811}{s^4 + 6s^3 + 11.3223s^2 + 18s + 12.811}$$

$R(s)$ — $\frac{6.3223\,(s + 1.4235)^2}{s}$ (Controlador PID) — $\frac{1}{s(s + 1)(s + 5)}$ — $C(s)$

Figura 8-7. Diagrama de bloques del sistema con controlador PID diseñado mediante la regla de sintonía de Ziegler-Nichols (segundo método).

La respuesta escalón unitario de este sistema se obtiene fácilmente con MATLAB. Véase el Programa MATLAB 8-1. La Figura 8-8 muestra la curva de respuesta escalón unitario resultante. La sobreelongación en la respuesta a un escalón unitario es de aproximadamente 62%. Esta sobreelongación es excesiva. Se pueden reducir mediante una sintonía fina los parámetros del controlador. Dicha sintonía se puede hacer en la computadora. Se encuentra que manteniendo $K_p = 18$ y moviendo el cero doble del controlador PID a $s = -0.65$, es decir, usando el controlador PID

$$G_c(s) = 18\left(1 + \frac{1}{3.077s} + 0.7692s\right) = 13.846\,\frac{(s+0.65)^2}{s} \tag{8-1}$$

la sobreelongación en la respuesta a un escalón unitario se reduce a, aproximadamente, 18% (véase la Figura 8-9). Si se incrementa la ganancia proporcional K_p a 39.42, sin modificar la localización del cero doble (s = -0.65), esto es, usando el controlador PID

$$G_c(s) = 39.42\left(1 + \frac{1}{3.077s} + 0.7692s\right) = 30.322\,\frac{(s+0.65)^2}{s} \tag{8-2}$$

entonces la velocidad de respuesta se incrementa, pero la sobreelongación también aumenta a, aproximadamente, 28%, como se observa en la Figura 8-10. Como, en este caso, la sobreelongación está bastante cerca del 25% y la respuesta es más rápida que el sistema con $G_c(s)$ dada por la

MATLAB Programa 8-1

```
% ---------- Respuesta escalón unitario ----------

num=[6.3223  18  12.811];
den=[1  6  11.3223  18  12.811];
step(num,den)
grid
title('Respuesta escalón unitario')
```

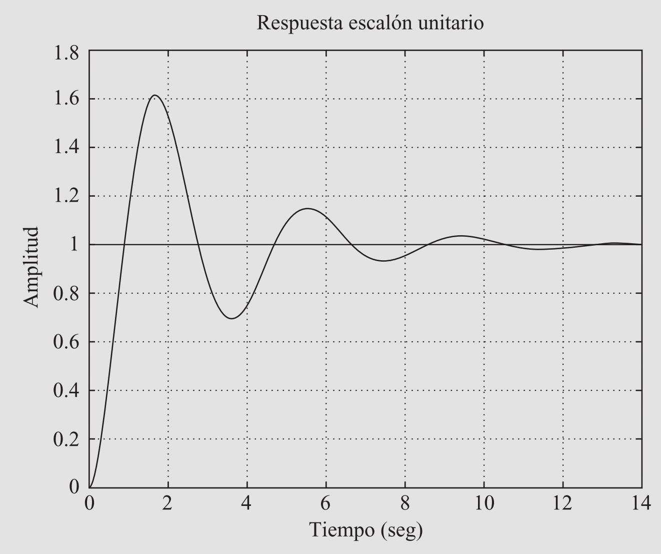


Figura 8-8. Curva de respuesta a un escalón unitario del sistema controlado PID diseñado por la regla de sintonía de Ziegler-Nichols (segundo método).

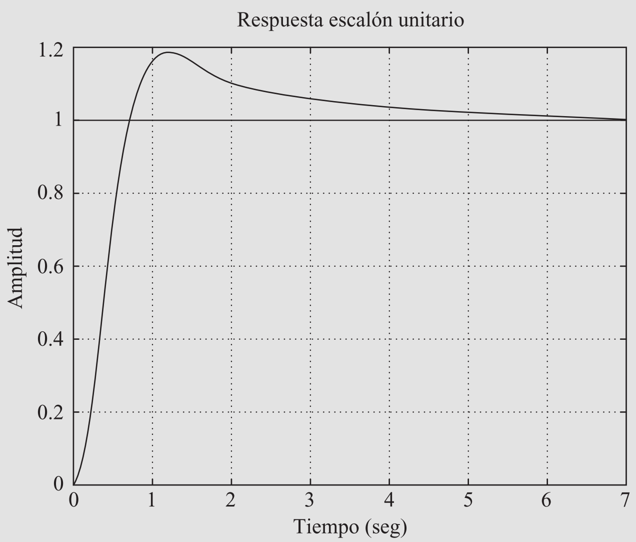


Figura 8-9. Respuesta a un escalón unitario del sistema mostrado en la Figura 8-6 con controlador PID teniendo parámetros $K_p = 18$, $T_i = 3.077$ y $T_d = 0.7692$.

Ecuación (8-1), se puede considerar aceptable la $G_c(s)$ obtenida a partir de la Ecuación (8-2). En este caso, los valores sintonizados de K_p, T_i y T_d son

$$K_p = 39.42, \qquad T_i = 3.077, \qquad T_d = 0.7692$$

Es interesante observar que estos valores son aproximadamente el doble de los valores sugeridos mediante el segundo método de las reglas de sintonía de Ziegler-Nichols. Lo que se debe señalar aquí es que las reglas de sintonía de Ziegler-Nichols han aportado un punto de partida para la sintonía fina.

Es instructivo señalar que, para el caso en el que el cero doble se localice en $s = -1.4235$, incrementar el valor de K aumenta la velocidad de respuesta, pero, en lo que respecta a la sobreelongación, variar la ganancia K_p tiene un efecto mínimo. La razón de esto se observa a partir del análisis del lugar de las raíces. La Figura 8-11 muestra el diagrama del lugar de las raíces para el sistema diseñado mediante el segundo método de las reglas de sintonía de Ziegler-Nichols. Como

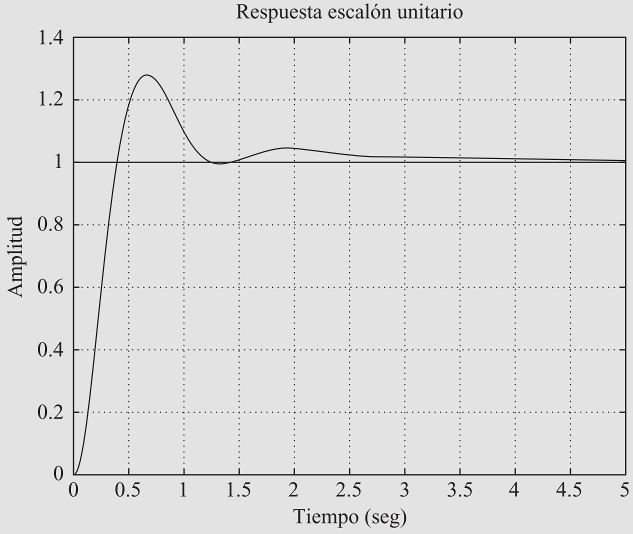


Figura 8-10. Respuesta a un escalón unitario del sistema mostrado en la Figura 8-6 con controlador PID teniendo parámetros $K_p = 39.42$, $T_i = 3.077$ y $T_d = 0.7692$.

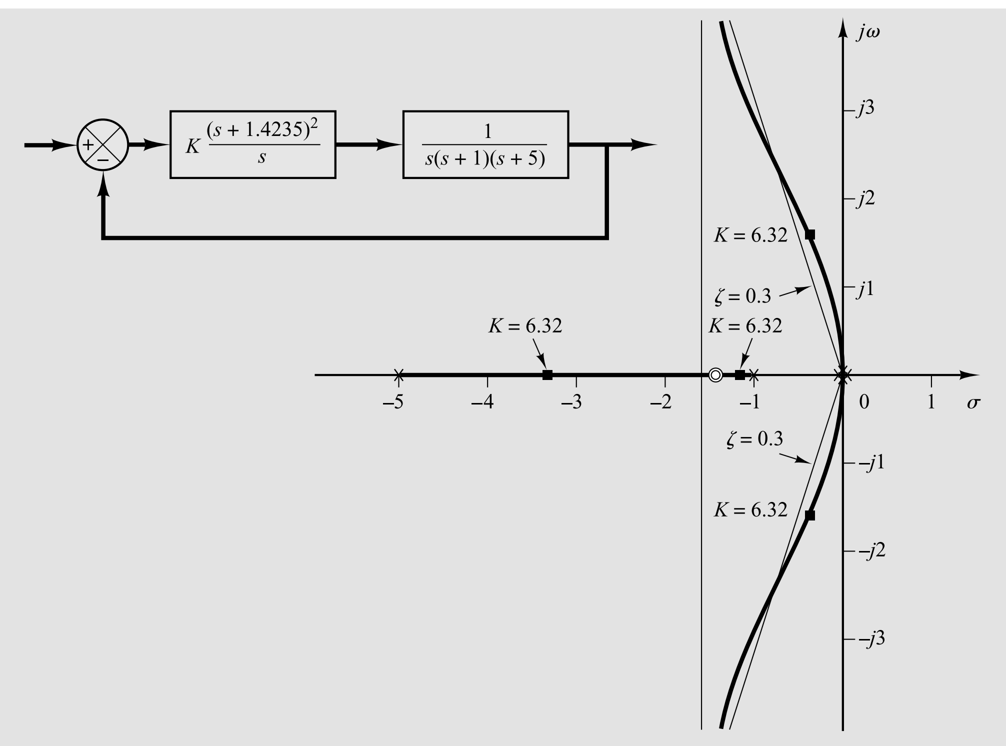


Figura 8-11. Lugar de las raíces del sistema cuando el controlador PID tiene un cero doble en $s = -1.4235$.

las ramas dominantes del lugar de las raíces están a lo largo de las líneas $\zeta = 0.3$ para un rango considerable de K, al variar el valor de K (de 6 a 30) no se modifica mucho la razón de amortiguamiento de los polos dominantes en lazo cerrado. Sin embargo, modificar la localización del cero doble tiene un efecto significativo sobre la sobreelongación, porque cambia mucho la razón de amortiguamiento de los polos dominantes en lazo cerrado. Esto también se observa a partir del análisis del lugar de las raíces. La Figura 8-12 muestra el diagrama del lugar de las raíces para el sistema en el cual el controlador PID tiene un cero doble en $s = -0.65$. Observe el cambio en la configuración del lugar de las raíces. Este cambio hace posible modificar la razón de amortiguamiento de los polos dominantes en lazo cerrado.

En la Figura 8-12 se observa que, en el caso en el que el sistema tiene la ganancia $K = 30.322$, los polos en lazo cerrado en $s = -2.35 \pm j4.82$ funcionan como polos dominantes. Dos polos adicionales en lazo cerrado están muy cerca del cero doble en $s = -0.65$, por lo que estos polos en lazo cerrado y el cero doble casi se cancelan uno al otro. El par de polos dominantes en lazo cerrado determina realmente la naturaleza de las respuestas. Por otra parte, cuando el sistema tiene $K = 13.846$, los polos en lazo cerrado en $s = -2.35 \pm j2.62$ no son realmente dominantes, porque los otros dos polos en lazo cerrado cerca del cero doble en $s = -0.65$ tienen un efecto considerable en la respuesta. En este caso, la sobreelongación en la respuesta escalón (18%) es mucho más grande que en el caso del sistema de segundo orden que tiene sólo polos dominantes en lazo cerrado. (En el último caso, la sobreelongación en la respuesta escalón sería de aproximadamente 6%.)

Es posible hacer un tercero, un cuarto e incluso más intentos para obtener una respuesta mejor. Pero esto lleva consigo muchos cálculos y tiempo. Si se desea realizar más intentos, es aconsejable emplear el método computacional presentado en la Sección 10-3. El Problema **A-8-12** resuelve este problema con el método computacional con MATLAB. Determina conjuntos de valores para los parámetros que dan una sobreelongación máxima del 10% o menos y un tiempo de asentamiento de 3 seg o menos. Una solución a este problema obtenida en el Problema **A-8-12** es que para controladores PID definidos por

$$G_c(s) = K\frac{(s + a)^2}{s}$$

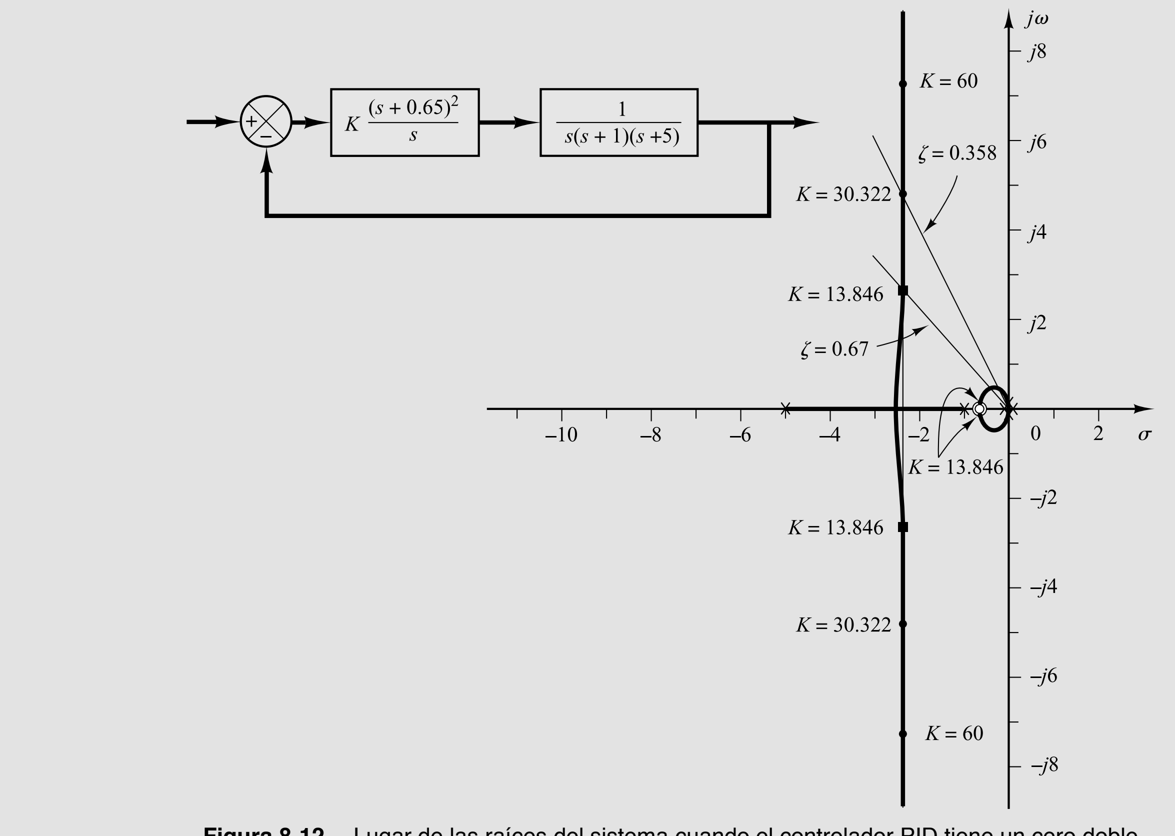


Figura 8-12. Lugar de las raíces del sistema cuando el controlador PID tiene un cero doble en $s = -0.65$. $K = 13.846$ corresponde a $G_c(s)$ dada por la Ecuación (8-1) y $K = 30.322$ corresponde a $G_c(s)$ dada por la Ecuación (8-2).

los valores de K y a son

$$K = 29, \qquad a = 0.25$$

con la sobreelongación máxima igual al 9.52% y el tiempo de asentamiento igual a 1.78 seg. Otra posible solución que se puede obtener es

$$K = 27, \qquad a = 0.2$$

con un 5.5% de sobreelongación máxima y 2.89 seg de tiempo de asentamiento. Véase el Problema **A-8-12** para los detalles.

8-3 Diseño de controladores PID mediante el método de respuesta en frecuencia

En esta sección se presenta un diseño de un controlador PID basado en el método de respuesta en frecuencia.

Considérese el sistema que se muestra en la Figura 8-13. Diséñese un controlador PID utilizando el método de la respuesta en frecuencia tal que la constante de error estático en velocidad sea 4 seg^{-1}, el margen de fase sea de al menos 50° y el margen de ganancia de al menos 10 dB. Obténgase las curvas de respuesta a un escalón unitario y a una rampa unitaria del sistema controlado con un PID en MATLAB.

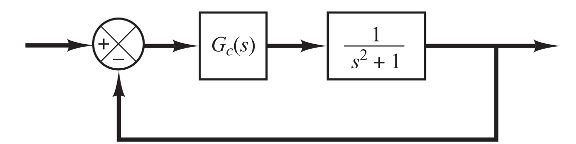


Figura 8-13. Sistema de control.

Sea el controlador PID escogido el siguiente

$$G_c(s) = \frac{K(as + 1)(bs + 1)}{s}$$

Como la constante de error estático en velocidad K_v es 4 seg^{-1}, se tiene

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s) \frac{1}{s^2 + 1} = \lim_{s \to 0} \frac{K(as + 1)(bs + 1)}{s} \frac{1}{s^2 + 1} = K = 4$$

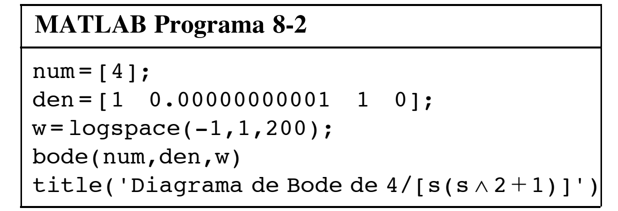
Por tanto

$$G_c(s) = \frac{4(as + 1)(bs + 1)}{s}$$

A continuación se dibuja el diagrama de Bode de

$$G(s) = \frac{4}{s(s^2 + 1)}$$

El Programa MATLAB 8-2 realiza el diagrama de Bode de $G(s)$. La Figura 8-14 muestra el diagrama de Bode resultante.



MATLAB Programa 8-2

```
num=[4];
den=[1 0.00000000001 1 0];
w=logspace(-1,1,200);
bode(num,den,w)
title('Diagrama de Bode de 4/[s(s^2+1)]')
```

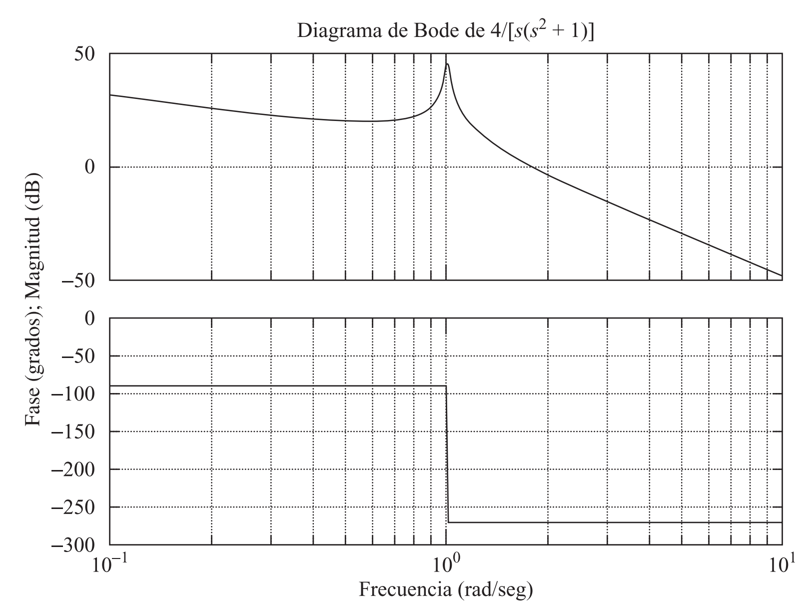


Figura 8-14. Diagrama de Bode de $4/[s(s^2 + 1)]$.

Se necesita un margen de fase de al menos 50º y un margen de ganancia de al menos 10 dB. Del diagrama de Bode de la Figura 8-14 se observa que la frecuencia de cruce de ganancia es aproximadamente $\omega = 1.8$ rad/seg. Suponga que la frecuencia de cruce de ganancia del sistema compensado toma cualquier valor entre $\omega = 1$ y $\omega = 10$ rad/seg. Sabiendo que

$$G_c(s) = \frac{4(as + 1)(bs + 1)}{s}$$

Se escoge $a = 5$. Entonces $(as + 1)$ contribuirá con hasta 90º de adelanto de fase en la región de altas frecuencias. El Programa MATLAB 8-3 realiza el diagrama de Bode de

$$\frac{4(5s + 1)}{s(s^2 + 1)}$$

La Figura 8-15 muestra el diagrama de Bode resultante

MATLAB Programa 8-3

```
num=[20  4];
den=[1  0.00000000001  1  0];
w=logspace(-2,1,101);
bode(num,den,w)
title('Diagrama de Bode de G(s)=4(5s+1)/[s(s^2+1)]')
```

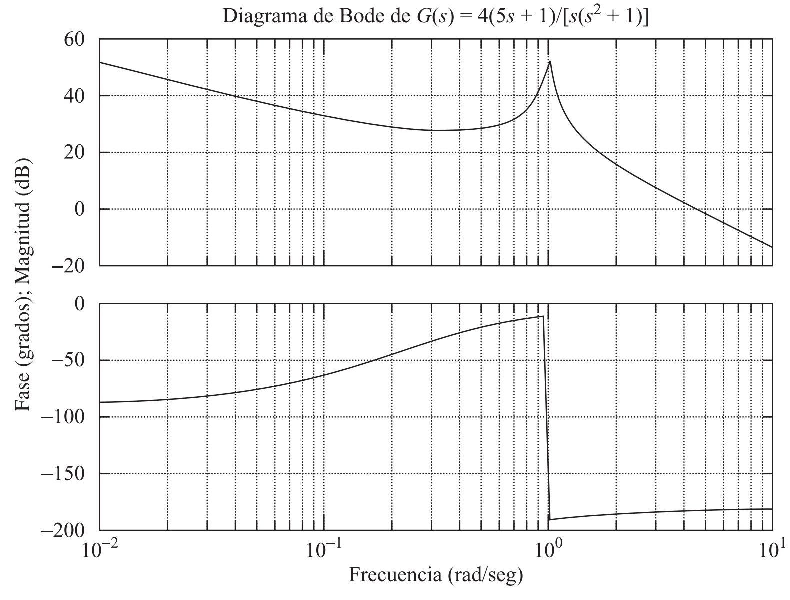


Figura 8-15. Diagrama de Bode de $G(s) = 4(5s + 1)/[s(s^2 + 1)]$.

Basándose en el diagrama de Bode de la Figura 8-15 se escoge el valor de b. El término $(bs + 1)$ tiene que dar el margen de fase de al menos 50°. Mediante simples tanteos en MATLAB se comprueba que $b = 0.25$ proporciona un margen de fase de al menos 50° y un margen de ganancia de $+\infty$ dB. Por tanto, seleccionando $b = 0.25$ se obtiene

$$G_c(s) = \frac{4(5s + 1)(0.25s + 1)}{s}$$

y la función de transferencia en lazo abierto del sistema diseñado resulta

$$\text{Función de transferencia en lazo abierto} = \frac{4(5s + 1)(0.25s + 1)}{s} \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$= \frac{5s^2 + 21s + 4}{s^3 + s}$$

El Programa MATLAB 8-4 genera el diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo abierto. En la Figura 8-16 muestra el diagrama de Bode resultante. De esta figura se observa que la constante de error estático en velocidad es 4 seg^{-1}, el margen de fase es 55° y el margen de ganancia es $+\infty$ dB.

MATLAB Programa 8-4

```
num=[5  21  4];
den=[1  0  1  0];
w=logspace(-2,2,100);
bode(num,den,w)
title('Diagrama de Bode de 4(5s+1)(0.25s+1)/[s(s^2+1)]')
```

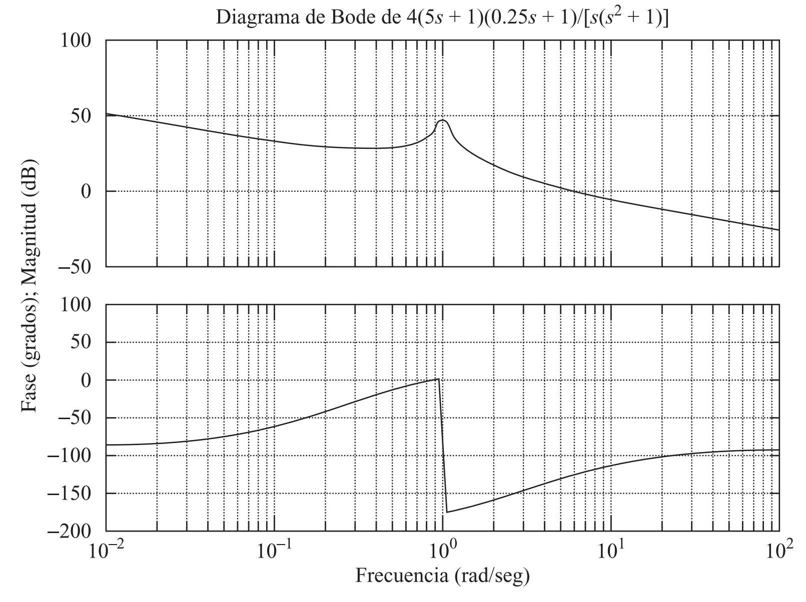


Figura 8-16. Diagrama de Bode de $4(5s + 1)(0.25s + 1)/[s(s^2 + 1)]$.

Por tanto, el sistema diseñado satisface todas las especificaciones y se puede considerar aceptable. (Observe que existen infinitos sistemas que cumplen todas las especificaciones. El sistema presente es simplemente uno de ellos).

A continuación, se obtendrán las respuestas a un escalón unitario y una rampa unitaria del sistema diseñado. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5s^2 + 21s + 4}{s^3 + 5s^2 + 22s + 4}$$

Observe que los ceros en lazo cerrado están localizados en

$$s = -4, \qquad s = -0.2$$

Los polos en lazo cerrado se encuentran en

$$s = -2.4052 + j3.9119$$
$$s = -2.4052 - j3.9119$$
$$s = -0.1897$$

Los polos en lazo cerrado que son complejos conjugados tienen una razón de amortiguamiento de 0.5237. El Programa MATLAB 8-5 genera las respuestas a un escalón unitario y una rampa unitaria.

En las Figuras 8-17 y 8-18 se muestran, respectivamente, las respuesta a un escalón unitario y una rampa unitaria. Observe que el polo en lazo cerrado en $s = -0.1897$ y el cero en $s = -0.2$ producen una larga cola de pequeña amplitud en la respuesta a un escalón unitario.

MATLAB Programa 8-5

```
% ---------- Respuesta a un escalón unitario ----------
num=[5 21 4];
den=[1 5 22 4];
t=0:0.01:14;
c=step(num,den,t);
plot(t,c)
grid
title('Respuesta a escalón unitario del sistema compensado')
xlabel('t(seg)')
ylabel('Salida c(t)')
% ---------- Respuesta a una rampa unitaria ----------
num1=[5 21 4];
den1=[1 5 22 4 0];
t=0:0.02:20;
c=step(num1,den1,t);
plot(t,c,'-',t,t,'--')
title('Respuesta a rampa unitaria del sistema compensado')
xlabel('t(seg)')
ylabel('Entrada de rampa unitaria y Salida c(t)')
text(10.8,8,'Sistema Compensado')
```

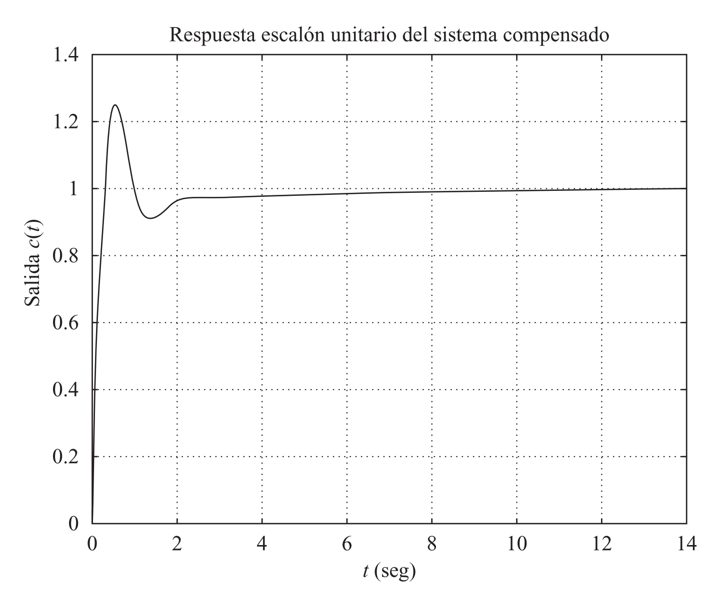


Figura 8-17. Curva de respuesta a un escalón unitario.

Otro ejemplo de diseño de un controlador PID basado en el método de la frecuencia se puede encontrar en el Problema **A-8-7**.

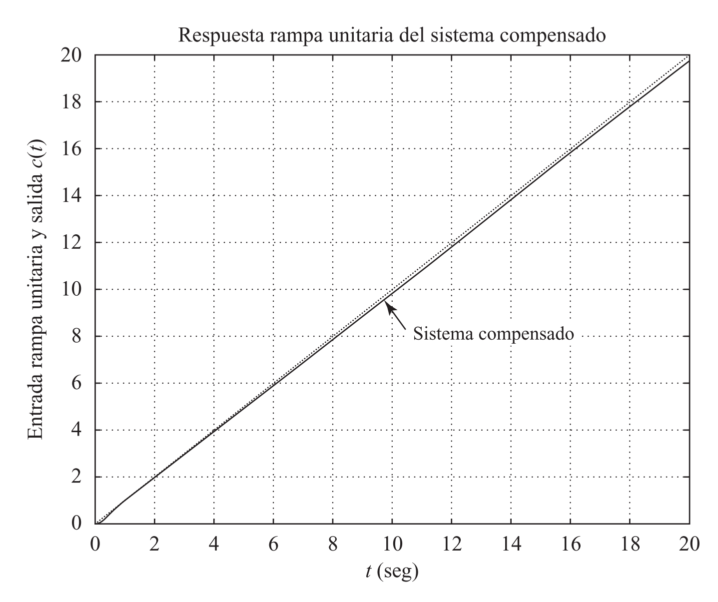


Figura 8-18. Respuesta a una entrada de referencia en rampa unitaria y la curva de salida.

8-4 Diseño de controladores PID mediante el método de optimización computacional

En esta sección se explorará cómo obtener un conjunto óptimo (o conjuntos óptimos) de valores de parámetros de los controladores PID que satisfagan la especificación de respuesta transitoria mediante el uso de MATLAB. Se presentarán dos ejemplos para ilustrar el método.

EJEMPLO 8-2 Sea el sistema que se muestra en la Figura 8-19 que está controlado por un controlador PID. El controlador PID está dado por

$$G_c(s) = K\frac{(s+a)^2}{s}$$

Se desea encontrar una combinación de K y a tal que el sistema en lazo cerrado sea sobreamortiguado y su sobreelongación máxima en la respuesta a un escalón unitario sea menor que el 10%. (En este problema no se incluirán otras condiciones. No obstante, se pueden incluir facilmente otras condiciones, como que el tiempo de asentamiento sea menor que un cierto valor especificado. Véase el Ejemplo 8-3).

Pueden haber más de un conjunto de parámetros que cumplan las especificaciones. En este ejemplo se obtendrán todos los conjuntos de parámetros que verifiquen las especificaciones dadas.

Para resolver este problema con MATLAB, primero se especifica la región para buscar valores adecuados de K y a. A continuación se escribe un programa MATLAB tal que en la respuesta a un escalón unitario se pueda encontrar una combinación de K y a que satisfagan el criterio de que la sobreelongación máxima sea menor que el 10%.

Obsérvese que la ganancia K no debería ser demasiado grande para evitar que el sistema necesite una innecesaria unidad de potencia.

Se supone que la región para buscar K y a está acotada por

$$2 \leqslant K \leqslant 3 \quad \text{y} \quad 0.5 \leqslant a \leqslant 1.5$$

Si en esta región no existe una solución será necesario ampliarla. Sin embargo, en algunos problemas independientemente de la región de búsqueda no hay solución.

En el método computacional es necesario determinar el tamaño del paso de cálculo para cada K y a. En el proceso de diseño real es necesario escoger tamaños de paso de cálculo bastante pequeños. Sin embargo, en este ejemplo, para evitar un tiempo de cálculo excesivamente grande, se escoge el tamaño del paso de cálculo a un valor razonable —por ejemplo, 0.2 para K y a.

Para resolver este problema, es posible escribir muchos programas diferentes en MATLAB. El Programa 8-6 de MATLAB es uno de estos posibles programas. En este programa observe que se utilizan dos bucles «for». Se comienza el programa con el bucle externo para variar los valores de «K». A continuación se varían los valores de «a» en el bucle interno. Se procede escribiendo un programa en MATLAB tal que los bucles anidados en el programa comienzan con los valores más pequeños de «K» y «a» y continúa el cálculo con los valores más grandes. Observe que, dependiendo del sistema y de los rangos de búsqueda de «K» y «a» y del incremento del paso MATLAB, puede emplear desde algunos segundos a unos pocos minutos para calcular el conjunto de los valores deseados.

En este programa, la sentencia

```
solution(k,:) = [K(i) a(j) m]
```

producirá una tabla de valores de K, a y m. (En el sistema que se considera hay 15 conjuntos de K y a que cumplen $m < 1.10$; esto es, la sobreelongación máxima es menor que el 10%.)

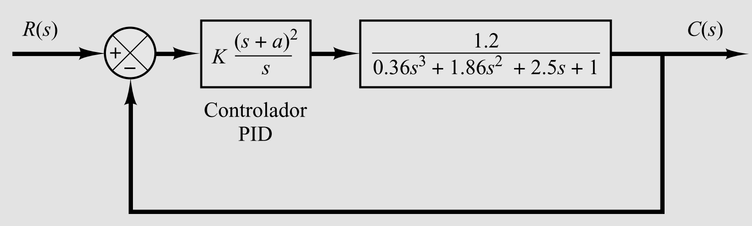


Figura 8-19. Sistema controlado con un PID.

Para ordenar los conjuntos de soluciones con respecto a la magnitud de la sobreelongación máxima (comenzando en el valor más pequeño y finalizando en el valor más grande de m en la tabla), se utiliza la orden

```
sortsolution=sortrows(solution,3)
```

MATLAB Programa 8-6

```
%'K' y 'a' valores a comprobar
K=[2.0 2.2 2.4 2.6 2.8 3.0];
a=[0.5 0.7 0.9 1.1 1.3 1.5];
% Evaluar la respuesta en lazo cerrado a un escalón unitario en cada combinación
% de 'K' y 'a' que dará la sobreelongación máxima menor que el 10%
t=0:0.01:5;
g=tf([1.2],[0.36 1.86 2.5 1]);
k=0;
for i=1:6;
   for j=1:6;
      gc=tf(K(i)*[1 2*a(j) a(j)^2],[1 0]); % controlador
        G=gc*g/(1+gc*g); % función de transferencia en lazo cerrado
        y=step(G,t);
        m=max(y);
        if m<1.10
        k=k+1;
        solution(k,:)=[K(i) a(j) m];
        end
      end
   end
solution % Imprime tabla solución
solution =
   2.0000 0.5000 0.9002
   2.0000 0.7000 0.9807
   2.0000 0.9000 1.0614
   2.2000 0.5000 0.9114
   2.2000 0.7000 0.9837
   2.2000 0.9000 1.0772
   2.4000 0.5000 0.9207
   2.4000 0.7000 0.9859
   2.4000 0.9000 1.0923
   2.6000 0.5000 0.9283
   2.6000 0.7000 0.9877
   2.8000 0.5000 0.9348
   2.8000 0.7000 1.0024
   3.0000 0.5000 0.9402
   3.0000 0.7000 1.0177
sortsolution=sortrows(solution,3) % Imprime tabla solución ordenada por
                                  % la columna 3
```

(continúa)

```
sortsolution =

   2.0000 0.5000 0.9002
   2.2000 0.5000 0.9114
   2.4000 0.5000 0.9207
   2.6000 0.5000 0.9283
   2.8000 0.5000 0.9348
   3.0000 0.5000 0.9402
   2.0000 0.7000 0.9807
   2.2000 0.7000 0.9837
   2.4000 0.7000 0.9859
   2.6000 0.7000 0.9877
   2.8000 0.7000 1.0024
   3.0000 0.7000 1.0177
   2.0000 0.9000 1.0614
   2.2000 0.9000 1.0772
   2.4000 0.9000 1.0923

% Representa la respuesta con la mayor sobreelongación que es menor que el 10%

K = sortsolution(k,1)

K =

   2.4000

a = sortsolution(k,2)

a =

   0.9000

gc = tf(K*[1 2*a a^2],[1 0]);
G = gc*g/(1 + gc*g);
step(G,t)
grid % Ver Figura 8-20

% Si desea representar la respuesta con la sobreelongación más pequeña que es
% mayor que 0%, introduzca los siguientes valores de 'K' y 'a'

K = sortsolution(11,1)

K =

   2.8000

a = sortsolution(11,2)

a =

   0.7000

gc = tf(K*[1 2*a a^2],[1 0]);
G = gc*g/(1 + gc*g);
step(G,t)
grid % Ver Figura 8-21
```

Para representar la curva de respuesta a un escalón unitario del último conjunto de los valores de K y a en la tabla ordenada, se introducen las órdenes

```
K = sortsolution(k,1)

a = sortsolution(k,2)
```

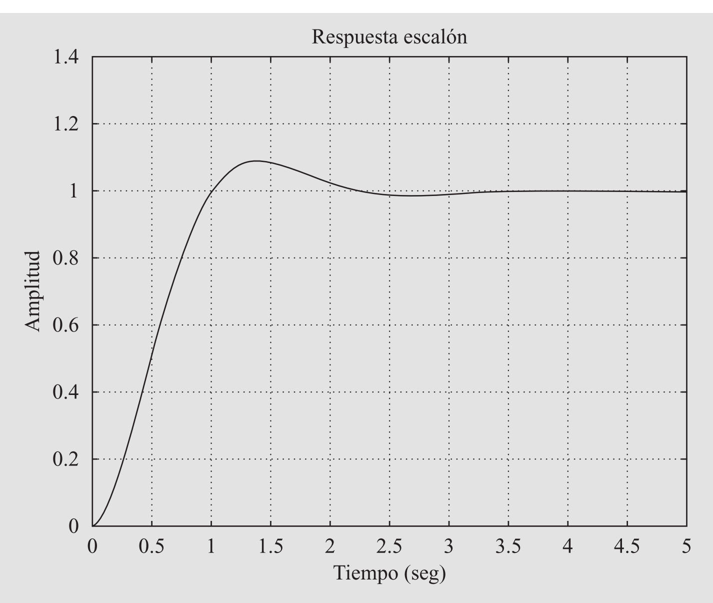


Figura 8-20. Respuesta a un escalón unitario del sistema con $K = 2.4$ y $a = 0.9$. (La máxima sobreelongación es 9.23%.)

y se utiliza la orden `step`. (En la Figura 8-20 se muestra la curva de respuesta a un escalón unitario resultante). Para representar la curva de respuesta a un escalón unitario con la sobreelongación más pequeña que es mayor que 0% encontrada en la tabla ordenada, se introducen las órdenes

```
K=sortsolution(11,1)
a=sortsolution(11,2)
```

y se utiliza la orden `step`. (En la Figura 8.21 se muestra la curva de respuesta a un escalón unitario resultante).

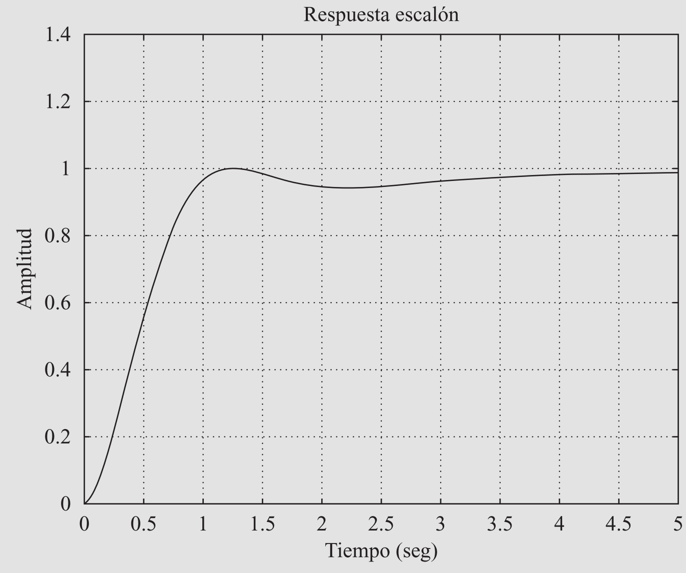


Figura 8-21. Respuesta a un escalón unitario del sistema con $K = 2.8$ y $a = 0.7$. (La máxima sobreelongación es 0.24%.)

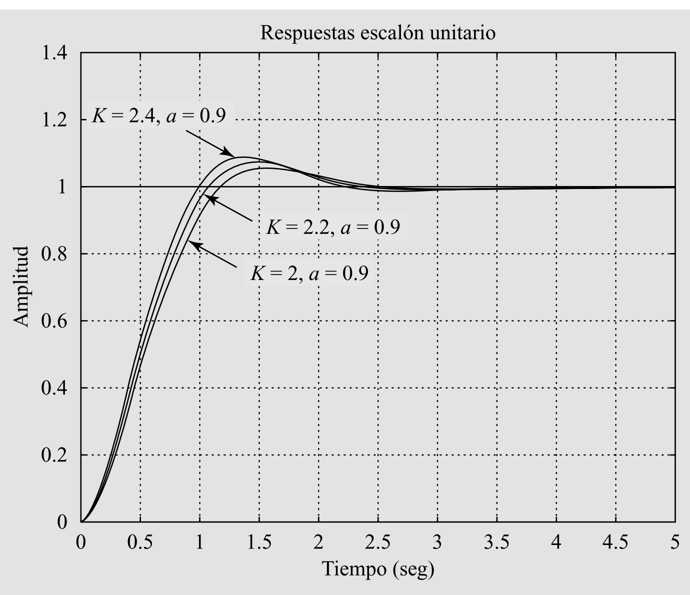


Figura 8-22. Curvas de respuesta a un escalón unitario del sistema con $K = 2$ y $a = 0.9$, $K = 2.2$ y $a = 0.9$ y $K = 2.4$ y $a = 0.9$.

Para representar la curva de respuesta a un escalón unitario del sistema con cualquier conjunto mostrado en la tabla ordenada, se especifican los valores de K y a introduciendo una orden `sortsolution` apropiada.

Observe que para una especificación de que la sobreelongación máxima esté entre el 10% y el 5%, habría tres conjuntos de soluciones:

$$K = 2.0000, \quad a = 0.9000, \quad m = 1.0614$$
$$K = 2.2000, \quad a = 0.9000, \quad m = 1.0772$$
$$K = 2.4000, \quad a = 0.9000, \quad m = 1.0923$$

En la Figura 8-22 se muestran las curvas de respuesta a un escalón unitario para estos tres casos. Observe que el sistema con la ganancia K más grande tiene un tiempo de subida menor y una sobreelongación máxima mayor. Cuál de estos tres sistemas es mejor depende del objetivo del sistema.

EJEMPLO 8-3 Sea el sistema que se muestra en la Figura 8-23. Se desean encontrar todas las combinaciones de K y a tal que el sistema en lazo cerrado tenga una sobreelongación máxima en la respuesta a un escalón unitario menor que el 15% pero mayor que el 10%. Además, el tiempo de asentamiento debe ser menor de 3 seg. En este problema, se supone que la región para buscar K y a está acotada por

$$3 \leqslant K \leqslant 5 \quad \text{y} \quad 0.1 \leqslant a \leqslant 3$$

Determine cuál es la mejor elección de los parámetros K y a.

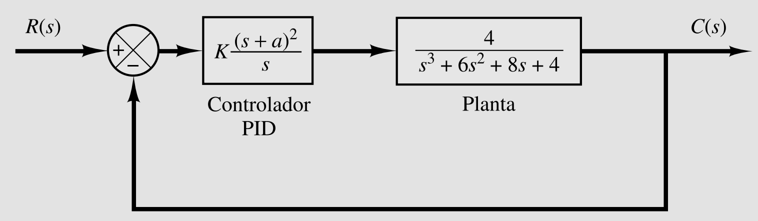


Figura 8-23. Sistema controlado con un PID simplificado.

En este problema se escoge el tamaño del paso de cálculo a un valor razonable —por ejemplo, 0.2 para K y 0.1 para a. El Programa MATLAB 8-7 genera la solución de este problema. De la tabla sortsolution parece que la primera fila es una buena elección. En la Figura 8-24 se muestra la respuesta a un escalón unitario para $K = 3.2$ y $a = 0.9$. Como esta elección requiere un valor de K menor que el resto de opciones, se decide que la primera fila es la mejor opción.

MATLAB Programa 8-7

```
t=0:0.01:8;
k=0;
for K=3:0.2:5;
   for a=0.1:0.1:3;
      num=[4*K 8*K*a 4*K*a^2];
      den=[1  6  8+4*K  4+8*K*a  4*K*a^2];
         y = step(num,den,t);
         s=801;while y(s)>0.98 & y(s)<1.02; s=s-1;end;
      ts=(s-1)*0.01; % ts=settling time;
      m=max(y);
      if m<1.15 & m>1.10; if ts<3.00;
         k=k+1;
         solution(k,:)=[K  a  m  ts];
        end
      end
     end
   end
   solution
solution=
      3.0000  1.0000  1.1469  2.7700
      3.2000  0.9000  1.1065  2.8300
      3.4000  0.9000  1.1181  2.7000
      3.6000  0.9000  1.1291  2.5800
      3.8000  0.9000  1.1396  2.4700
      4.0000  0.9000  1.1497  2.3800
      4.2000  0.8000  1.1107  2.8300
      4.4000  0.8000  1.1208  2.5900
      4.6000  0.8000  1.1304  2.4300
      4.8000  0.8000  1.1396  2.3100
      5.0000  0.8000  1.1485  2.2100
sortsolution=sortrows(solution,3)

sortsolution=

   3.2000  0.9000  1.1065  2.8300
   4.2000  0.8000  1.1107  2.8300
   3.4000  0.9000  1.1181  2.7000
   4.4000  0.8000  1.1208  2.5900
   3.6000  0.9000  1.1291  2.5800
   4.6000  0.8000  1.1304  2.4300
   4.8000  0.8000  1.1396  2.3100
   3.8000  0.9000  1.1396  2.4700
```

(continúa)

```
   3.0000  1.0000  1.1469  2.7700
   5.0000  0.8000  1.1485  2.2100
   4.0000  0.9000  1.1497  2.3800

% Representa la respuesta con la menor sobreelongación que aparece
% en la tabla sortsolution

   K=sortsolution(1,1), a=sortsolution(1,2)

K=

   3.200

a=

   0.9000
   num=[4*K  8*K*a  4*K*a^2];
   den=[1  6  8+4*K  4+8*K*a  4*K*a^2];
   num

num=

   12.8000  23.0400  10.3680
   den

den=

   1.0000  6.0000  20.8000  27.0400  10.3680

   y=step(num,den,t);
   plot(t,y) % Véase la Figura 8-24
   grid
   title('Respuesta escalón unitario')
   xlabel('t seg')
   ylabel('Salida y(t)')
```

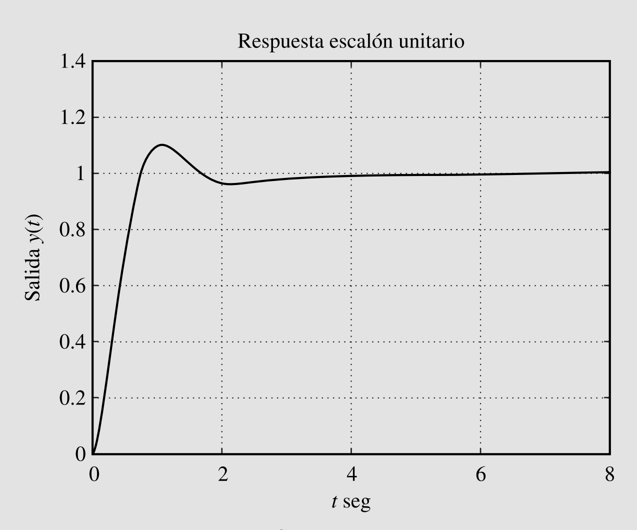


Figura 8-24. Respuesta a un escalón unitario del sistema con $K = 3.2$ y $a = 0.9$.

8-5 Modificaciones de los esquemas de control PID

Sea el sistema de control PID básico que se muestra en la Figura 8-25(a), donde el sistema está sujeto a perturbaciones y ruido. La Figura 8-25(b) es un diagrama de bloques modificado del mismo sistema. En el sistema de control PID básico, como el de la Figura 8-25(b), si la entrada de referencia es una función escalón, debido a la presencia del término derivativo en la acción de control, la variable manipulada $u(t)$ contendrá una función impulso (una función delta). En un controlador PID real, en lugar del término derivativo puro $T_d s$ se emplea

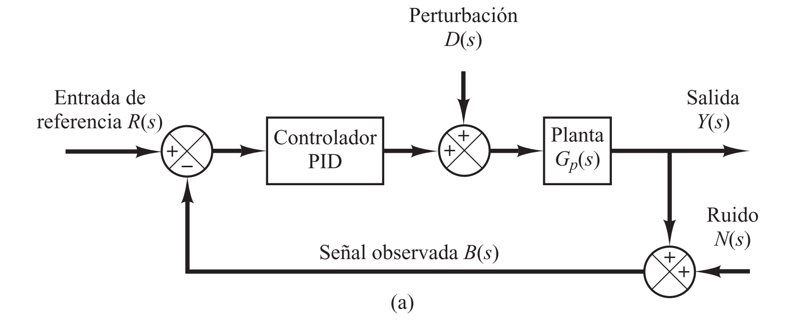
$$\frac{T_d s}{1 + \gamma T_d s}$$

donde el parámetro γ toma un valor alrededor de 0.1. Por tanto, cuando la entrada de referencia es una función escalón, la variable manipulada $u(t)$ no contendrá una función impulso, sino una función en forma de un pulso estrecho. Tal fenómeno se denomina *patada en el punto de consigna*.

Control PI-D. Para evitar el fenómeno de la patada en el punto de consigna, se puede operar la acción derivativa sólo en el camino de realimentación, a fin de que la diferenciación ocurra únicamente en la señal de realimentación y no en la señal de referencia. El esquema de control dispuesto de esta forma se denomina control PI-D. La Figura 8-26 muestra un sistema con un control PI-D.

A partir de la Figura 8-26, se observa que la señal manipulada $U(s)$ está dada por

$$U(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)R(s) - K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)B(s)$$



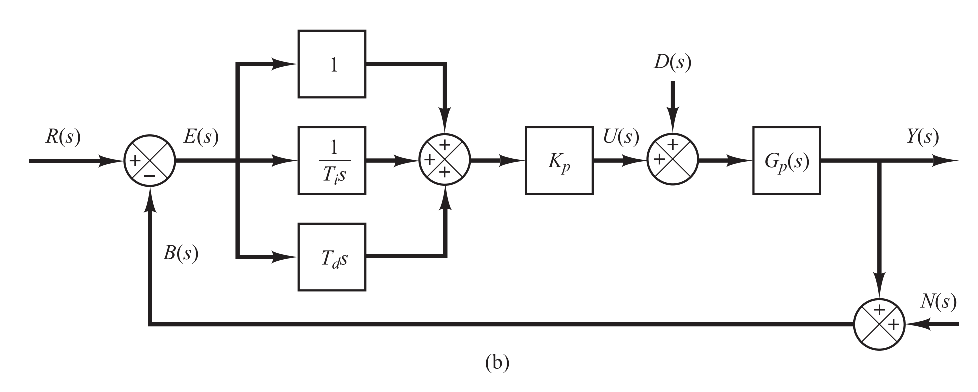


Figura 8-25. (a) Sistema controlado PID; (b) diagrama de bloques equivalente.

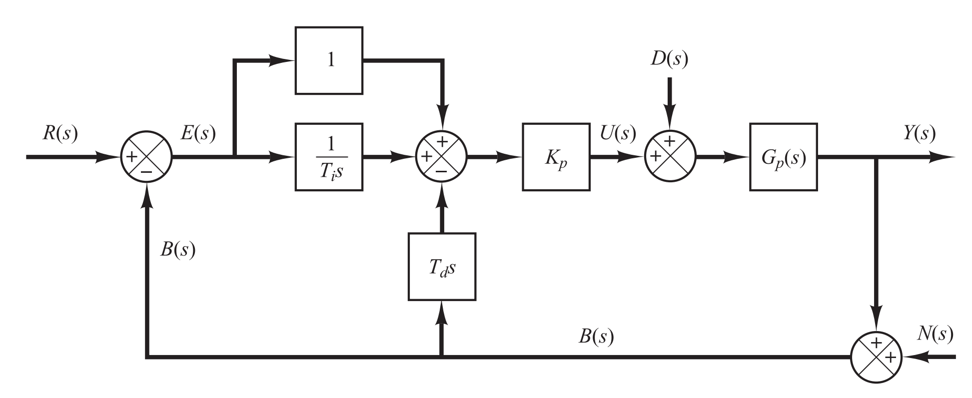


Figura 8-26. Sistema de control PI-D.

Obsérvese que, en ausencia de perturbaciones y ruido, la función de transferencia en lazo cerrado del sistema de control PID básico [que se muestra en la Figura 8-25(b)] y el sistema de control PI-D (de la Figura 8-26) se obtienen, respectivamente, mediante

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + \left(1 + \dfrac{1}{T_i s} + T_d s\right) K_p G_p(s)}$$

y

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + \left(1 + \dfrac{1}{T_i s} + T_d s\right) K_p G_p(s)}$$

Es importante señalar que, en ausencia de la entrada de referencia y de ruido, la función de transferencia en lazo cerrado entre la perturbación $D(s)$ y la salida $Y(s)$ es igual en cualquier caso y se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)\left(1 + \dfrac{1}{T_i s} + T_d s\right)}$$

Control I-PD. Se considera otra vez el caso en el que la entrada de referencia es una función escalón. Tanto el control PID como el control PI-D implican una función escalón en la señal manipulada. En muchas ocasiones, tal cambio escalón en la señal manipulada puede no resultar conveniente. Por tanto, puede convenir mover la acción proporcional y la acción derivativa al camino de realimentación, a fin de que estas acciones sólo afecten a la señal de realimentación. La Figura 8-27 muestra tal esquema de control, que se denomina control I-PD. La señal manipulada está dada por

$$U(s) = K_p \frac{1}{T_i s} R(s) - K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) B(s)$$

Obsérvese que la entrada de referencia $R(s)$ sólo aparece en la parte de control integral. Por tanto, en el control I-PD es imprescindible tener la acción de control integral para una operación adecuada del sistema de control.

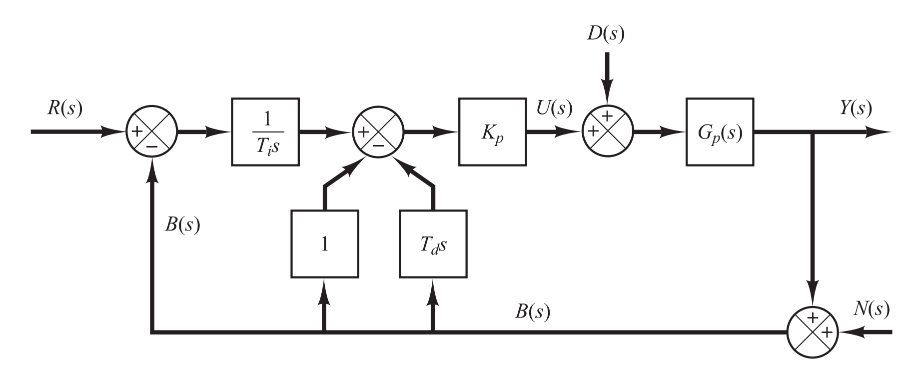


Figura 8-27. Sistema de control I-PD.

La función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$ en ausencia de las entradas de perturbación y ruido es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(\frac{1}{T_i s}\right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)\left(1 + \dfrac{1}{T_i s} + T_d s\right)}$$

Se observa que, en ausencia de la entrada de referencia y de ruido, la función de transferencia en lazo cerrado entre la entrada de perturbación y la salida viene dada por

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)\left(1 + \dfrac{1}{T_i s} + T_d s\right)}$$

Esta expresión es la misma que para el control PID o el control PI-D.

Control PID con dos grados de libertad. Se ha demostrado que el control PI-D se obtiene moviendo la acción de control derivativa al camino de realimentación y que el control I-PD se obtiene moviendo las acciones de control proporcional y derivativa al camino de realimentación. En lugar de mover la acción de control derivativa completa o la acción de control proporcional al camino de realimentación, es posible mover sólo partes de estas acciones de control al camino de realimentación, conservando las partes restantes en el camino directo. En la literatura se ha propuesto un control PI-PD, cuyas características se encuentran entre el control PID y el control I-PD. Asimismo, se puede considerar un control PID-PD. En estos esquemas de control se tiene un controlador en el camino directo y otro en el camino de realimentación. Tales esquemas de control conducen a un esquema de control más general con dos grados de libertad. Se analizarán los detalles de tal esquema de control con dos grados de libertad en secciones subsiguientes de este capítulo.

8-6 Control con dos grados de libertad

Sea el sistema de la Figura 8-28, en el cual el sistema está sujeto a la entrada de perturbación $D(s)$ y a la entrada de ruido $N(s)$ además de la entrada de referencia $R(s)$. $G_c(s)$ es la función de transferencia del controlador y $G_p(s)$ es la función de transferencia de la planta. Se supone que $G_p(s)$ es fija e inalterable.

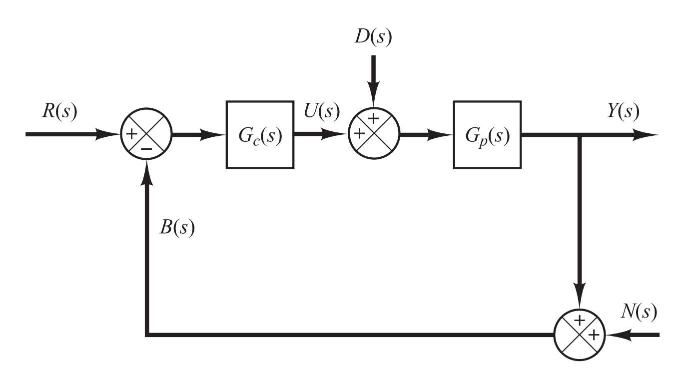


Figura 8-28. Sistema de control de un grado de libertad.

Para este sistema, se pueden deducir tres funciones de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s) = G_{yr}$, $Y(s)/D(s) = G_{yd}$ e $Y(s)/N(s) = G_{yn}$. Son

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_c G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$

[Al deducir $Y(s)/R(s)$ se supuso que $D(s) = 0$ y $N(s) = 0$. Se aplican comentarios análogos a las obtenciones de $Y(s)/D(s)$ e $Y(s)/N(s)$.] Los grados de libertad del sistema de control se refieren al número de funciones de transferencia en lazo cerrado que son independientes. En el caso actual se tiene que

$$G_{yr} = \frac{G_p - G_{yd}}{G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

Si una de las tres funciones de transferencia en lazo cerrado G_{yr}, G_{yn} y G_{yd} está dada, las dos restantes están fijas. Esto significa que el sistema de la Figura 8-28 es un sistema de control de un grado de libertad.

A continuación se considera el sistema que se muestra en la Figura 8-29, donde $G_p(s)$ es la función de transferencia de la planta. Para este sistema, las funciones de transferencia en lazo cerrado G_{yr}, G_{yn} y G_{yd} están dadas, respectivamente, por

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{c1} G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2}) G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2}) G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{(G_{c1} + G_{c2}) G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2}) G_p}$$

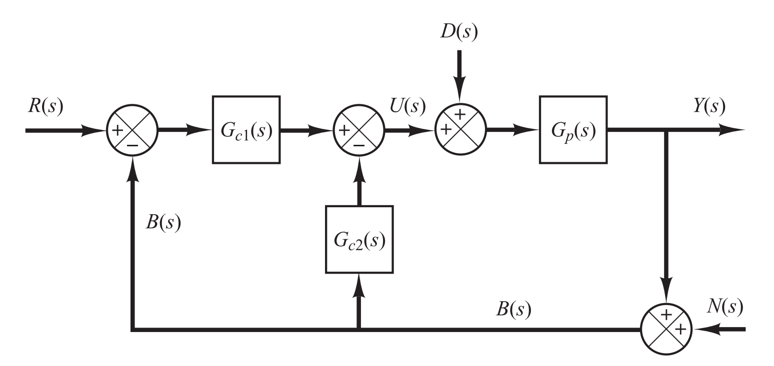


Figura 8-29. Sistema de control con dos grados de libertad.

Por tanto, se tiene que

$$G_{yr} = G_{c1}G_{yd}$$

$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

En este caso, si G_{yd} está dada, entonces G_{yn} está fija, pero G_{yr} no lo está, porque G_{c1} es independiente de G_{yd}. Así, dos funciones de transferencia en lazo cerrado entre las tres funciones de transferencia en lazo cerrado G_{yr}, G_{yn} y G_{yd} son independientes. En este caso, se trata de un sistema de control con dos grados de libertad.

Análogamente, el sistema que se muestra en la Figura 8-30 también es un sistema de control con dos grados de libertad, porque, para este sistema,

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{c1}G_p}{1 + G_{c1}G_p} + \frac{G_{c2}G_p}{1 + G_{c1}G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_{c1}G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{G_{c1}G_p}{1 + G_{c1}G_p}$$

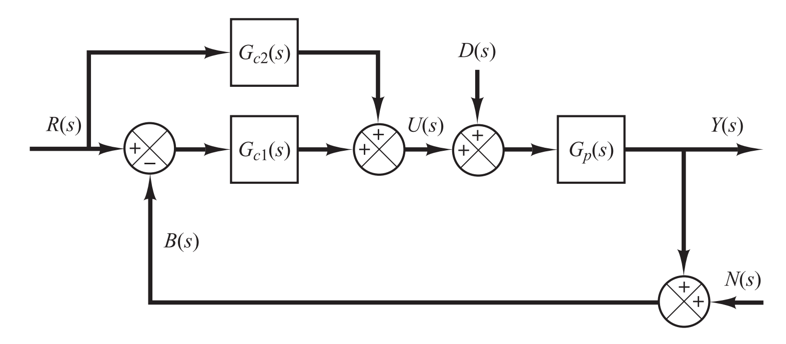


Figura 8-30. Sistema de control con dos grados de libertad.

Por tanto,

$$G_{yr} = G_{c2}G_{yd} + \frac{G_p - G_{yd}}{G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

Es evidente que, si se da G_{yd}, entonces G_{yn} está fija, pero G_{yr} no lo está, porque G_{c2} es independiente de G_{yd}.

En la Sección 8-7 se verá que, en tal sistema de control con dos grados de libertad, las características en lazo cerrado y las características de realimentación se pueden ajustar de forma independiente para mejorar el comportamiento en la respuesta del sistema.

8-7 Método de asignación de ceros para mejorar las características de respuesta

Se demostrará que utilizando el método de asignación de ceros que se presenta en esta sección se puede conseguir lo siguiente:

> Las respuestas a las entradas de referencia en rampa y aceleración no presentan errores en estado estacionario.

En sistemas de control de elevadas prestaciones se desea siempre que la salida del sistema siga a una entrada que varía con error mínimo. Para entradas en escalón, rampa y aceleración se pretende que la salida del sistema no tenga error en estado estacionario.

En lo que sigue, se demostrará cómo diseñar sistemas de control que no poseen errores en estado estacionario en el seguimiento de entradas tipo rampa y aceleración y al mismo tiempo hace que la respuesta a una entrada de perturbación en escalón tienda a cero rápidamente.

Sea el sistema de control con dos grados de libertad que se muestra en la Figura 8-31. Se supone que la función de transferencia de la planta $G_p(s)$ es una función de transferencia de fase mínima que está dada por

$$G_p(s) = K\frac{A(s)}{B(s)}$$

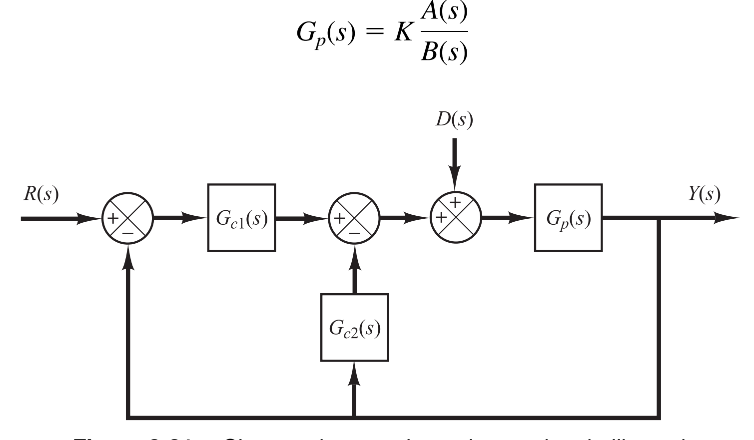


Figura 8-31. Sistema de control con dos grados de libertad.

donde

$$A(s) = (s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)$$

$$B(s) = s^N(s + p_{N+1})(s + p_{N+2}) \cdots (s + p_n)$$

donde N puede ser 0, 1, 2 y $n \geqslant m$. Se supone también que G_{c1} es un controlador PID seguido por un filtro $1/A(s)$, o bien

$$G_{c1}(s) = \frac{\alpha_1 s + \beta_1 + \gamma_1 s^2}{s} \frac{1}{A(s)}$$

y G_{c2} es un controlador PID, PI, PD, I, D o P seguido por un filtro $1/A(s)$. Esto es,

$$G_{c2}(s) = \frac{\alpha_2 s + \beta_2 + \gamma_2 s^2}{s} \frac{1}{A(s)}$$

donde algunas de las α_2, β_2 y γ_2 pueden ser cero. Entonces es posible escribir $G_{c1} + G_{c2}$ como

$$G_{c1} + G_{c2} = \frac{\alpha s + \beta + \gamma s^2}{s} \frac{1}{A(s)} \tag{8-3}$$

donde α, β y γ son constantes. Entonces,

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p} = \frac{K\dfrac{A(s)}{B(s)}}{1 + \dfrac{\alpha s + \beta + \gamma s^2}{s} \dfrac{K}{B(s)}}$$

$$= \frac{sKA(s)}{sB(s) + (\alpha s + \beta + \gamma s^2)K}$$

Debido a la presencia de s en el numerador, la respuesta $y(t)$ a una entrada de perturbación en escalón tiende a cero cuando t tiende a infinito, tal como se muestra a continuación. Como

$$Y(s) = \frac{sKA(s)}{sB(s) + (\alpha s + \beta + \gamma s^2)K} D(s)$$

si la entrada de perturbación es una función escalón de magnitud d, o bien

$$D(s) = \frac{d}{s}$$

y suponiendo que el sistema es estable, entonces

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s\left[\frac{sKA(s)}{sB(s) + (\alpha s + \beta + \gamma s^2)K}\right]\frac{d}{s}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{sKA(0)d}{sB(0) + \beta K}$$

$$= 0$$

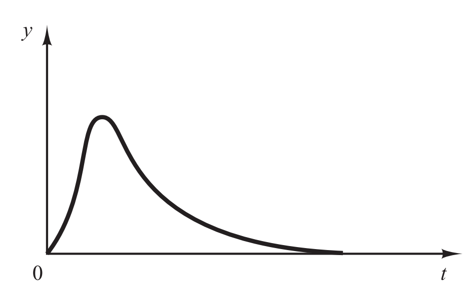


Figura 8-32. Curva de respuesta típica a una entrada de perturbación en escalón.

La respuesta $y(t)$ a una entrada de perturbación tendrá la forma general que se muestra en la Figura 8-32.

$Y(s)/R(s)$ e $Y(s)/D(s)$ vienen dadas por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{c1}G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p}, \qquad \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p}$$

Obsérvese que los denominadores de $Y(s)/R(s)$ e $Y(s)/D(s)$ son el mismo. Antes de seleccionar los polos de $Y(s)/R(s)$, se necesita colocar los ceros de $Y(s)/R(s)$.

Asignación de ceros. Sea el sistema

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{p(s)}{s^{n+1} + a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Si se escoge $p(s)$ como

$$p(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = a_2(s + s_1)(s + s_2)$$

esto es, se seleccionan los ceros $s = -s_1$ y $s = -s_2$ tal que, juntos con a_2, el polinomio numerador $p(s)$ es igual a la suma de los tres últimos términos del polinomio del denominador —entonces el sistema no presentará errores en estado estacionario en respuesta a las entradas en escalón, rampa y aceleración.

Requisito impuesto sobre las características de respuesta del sistema. Se supone que se desea que la sobreelongación máxima en la respuesta a la entrada de referencia de escalón unitario se seleccione arbitrariamente entre los límites superior e inferior; por ejemplo,

$$2\% < \text{sobreelongación máxima} < 10\%$$

donde se escoge el límite inferior de forma que esté ligeramente por encima de cero para evitar tener sistemas subamortiguados. Cuanto más pequeño sea el límite inferior, más difícil es determinar los coeficientes a. En algunos casos, puede no existir ninguna combinación de las a que satisfaga la especificación, de manera que se debe permitir un límite superior más elevado para la sobreelongación máxima. Se utiliza MATLAB para buscar al menos un conjunto de la a que cumpla la especificación. Como cuestión práctica desde el punto de vista computacional, en lugar de buscar las a se intenta obtener polos en lazo cerrado aceptables buscando en una región razonable en el semiplano izquierdo s para cada polo en lazo cerrado. Una vez que se han determinado todos los polos en lazo cerrado, entonces se calculan todos los coeficientes a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0.

Determinación de G_{c2}. Ahora que todos los coeficientes de la función de transferencia $Y(s)/R(s)$ se conocen, esta función de transferencia está dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^{n+1} + a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{8-4}$$

se tiene que

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_{c1} \frac{Y(s)}{D(s)}$$

$$= \frac{G_{c1} sKA(s)}{sB(s) + (\alpha s + \beta + \gamma s^2)K}$$

$$= \frac{G_{c1} sKA(s)}{s^{n+1} + a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Como G_{c1} es un controlador PID y está dado por

$$G_{c1} = \frac{\alpha_1 s + \beta_1 + \gamma_1 s^2}{s} \frac{1}{A(s)}$$

$Y(s)/R(s)$ se puede escribir como

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(\alpha_1 s + \beta_1 + \gamma_1 s^2)}{s^{n+1} + a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Por lo tanto, se escoge

$$K\gamma_1 = a_2, \qquad K\alpha_1 = a_1, \qquad K\beta_1 = a_0$$

de forma que

$$G_{c1} = \frac{a_1 s + a_0 + a_2 s^2}{Ks} \frac{1}{A(s)} \tag{8-5}$$

La respuesta de este sistema a una entrada de referencia en escalón unitario puede hacerse que exhiba la sobreelongación máxima entre los límites superior e inferior escogidos, tal como

$$2\% < \text{sobreelongación máxima} < 10\%$$

La respuesta del sistema a las entradas de referencia en rampa o en aceleración puede hacerse que no presente error en estado estacionario. La característica del sistema dado en la Ecuación 8-4 es la de tener generalmente un tiempo de asentamiento pequeño. Si se desea acortar aún más este tiempo de asentamiento, entonces hay que permitir una mayor sobreelongación máxima; por ejemplo,

$$2\% < \text{sobreelongación máxima} < 20\%$$

El controlador G_{c2} se puede determinar ahora a partir de las Ecuaciones (8-3) y (8-5). Como

$$G_{c1} + G_{c2} = \frac{\alpha s + \beta + \gamma s^2}{s} \frac{1}{A(s)}$$

se tiene que

$$G_{c2} = \left[\frac{\alpha s + \beta + \gamma s^2}{s} - \frac{a_1 s + a_0 + a_2 s^2}{Ks}\right]\frac{1}{A(s)}$$

$$= \frac{(K\alpha - a_1)s + (K\beta - a_0) + (K\gamma - a_2)s^2}{Ks}\frac{1}{A(s)} \quad (8\text{-}6)$$

Los dos controladores G_{c1} y G_{c2} están dados, respectivamente, por las Ecuaciones (8-5) y (8-6).

EJEMPLO 8-4 Sea el sistema de control con dos grados de libertad que se muestra en la Figura 8-33. La función de transferencia de la planta $G_p(s)$ viene dada por

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Diseñe controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ tales que la sobreelongación máxima en la respuesta a la entrada de referencia en escalón unitario sea menor que el 19%, pero mayor que el 2%, y el tiempo de asentamiento sea inferior a 1 seg. Se desea que los errores en estado estacionario en el seguimiento a entrada de referencia en rampa y aceleración sea cero. La respuesta a la entrada de perturbación en escalón unitario debería tener una amplitud pequeña y tender a cero rápidamente.

Para diseñar controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ apropiados, conviene observar en primer lugar que

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_p(G_{c1} + G_{c2})}$$

Para simplificar la notación, se define

$$G_c = G_{c1} + G_{c2}$$

Entonces,

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_p G_c} = \frac{\dfrac{10}{s(s+1)}}{1 + \dfrac{10}{s(s+1)}G_c}$$

$$= \frac{10}{s(s+1) + 10G_c}$$

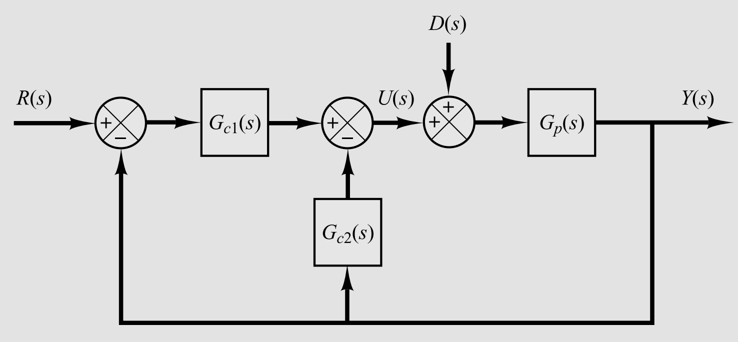


Figura 8-33. Sistema de control con dos grados de libertad.

En segundo lugar se tiene que

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_p G_{c1}}{1 + G_p G_c} = \frac{10G_{c1}}{s(s+1) + 10G_c}$$

Observe que la ecuación característica para $Y(s)/D(s)$ y para $Y(s)/R(s)$ es la misma.

Se puede estar inclinado a escoger un cero de $G_c(s)$ en $s = -1$ para cancelar el polo de la planta $G_p(s)$ que está en $s = -1$. Sin embargo, el polo cancelado $s = -1$ es un polo en lazo cerrado del sistema completo, como se verá a continuación. Si se define $G_c(s)$ como un controlador PID tal que

$$G_c(s) = \frac{K(s+1)(s+\beta)}{s} \tag{8-7}$$

entonces

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{10}{s(s+1) + \dfrac{10K(s+1)(s+\beta)}{s}}$$

$$= \frac{10s}{(s+1)[s^2 + 10K(s+\beta)]}$$

El polo en lazo cerrado en $s = -1$ es un polo de respuesta lenta, y si se incluye en el sistema, el tiempo de asentamiento no será menor que 1 seg. Por tanto, no se debería escoger $G_c(s)$ como se expresa en la Ecuación (8-7).

El diseño de los controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ consta de dos pasos.

Paso de diseño 1: Se diseña $G_c(s)$ para satisfacer los requisitos sobre la respuesta a la entrada de perturbación en escalón $D(s)$. En esta etapa del diseño, se supone que la entrada de referencia es cero.

Se asume que $G_c(s)$ es un controlador PID de la forma

$$G_c(s) = \frac{K(s+\alpha)(s+\beta)}{s}$$

Entonces la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/D(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{10}{s(s+1) + 10G_c}$$

$$= \frac{10}{s(s+1) + \dfrac{10K(s+\alpha)(s+\beta)}{s}}$$

$$= \frac{10s}{s^2(s+1) + 10K(s+\alpha)(s+\beta)}$$

Observe que la presencia de «s» en el numerador de $Y(s)/D(s)$ asegura que la respuesta en estado estacionario a la entrada de perturbación en escalón es cero.

Se supone que los polos en lazo cerrado dominantes que se desean son complejos conjugados y están dados por

$$s = -a \pm jb$$

y el polo en lazo cerrado restante es real y está localizado en

$$s = -c$$

En este problema hay tres requisitos. El primero es que la respuesta a la entrada de perturbación en escalón se amortigua rápidamente. El segundo es que la sobreelongación máxima en la respuesta a la entrada de referencia en escalón unitario esté entre el 19% y el 2% y que el tiempo de asentamiento sea menor que 1 seg. El tercero es que los errores en estado estacionario en las respuestas a entradas de referencia en rampa y aceleración sean cero.

Debe buscarse un conjunto (o conjuntos) de valores razonables de a, b y c utilizando un enfoque computacional. Para satisfacer el primer requisito, se escoge la región de búsqueda para a, b y c como

$$2 \leqslant a \leqslant 6, \qquad 2 \leqslant b \leqslant 6, \qquad 6 \leqslant c \leqslant 12$$

En la Figura 8-34 se muestra esta región. Si los polos en lazo cerrado dominantes $s = -a \pm jb$ están localizados en cualquier parte en la zona sombreada, la respuesta a una entrada de perturbación en escalón se amortiguará rápidamente. (El primer requisito se cumplirá.)

Observe que el denominador de $Y(s)/D(s)$ se puede escribir como

$$s^2(s + 1) + 10K(s + \alpha)(s + \beta)$$

$$= s^3 + (1 + 10K)s^2 + 10K(\alpha + \beta)s + 10K\alpha\beta$$

$$= (s + a + jb)(s + a - jb)(s + c)$$

$$= s^3 + (2a + c)s^2 + (a^2 + b^2 + 2ac)s + (a^2 + b^2)c$$

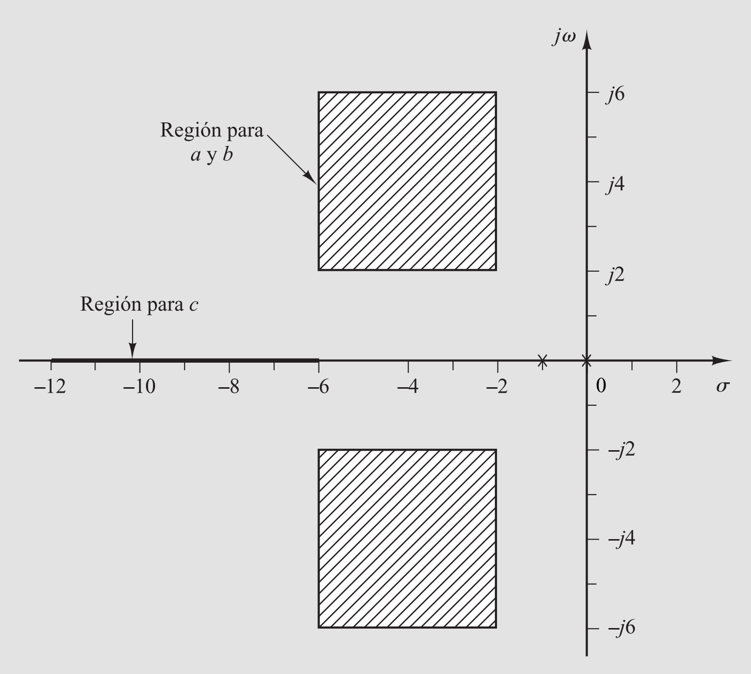


Figura 8-34. Región de búsqueda para *a*, *b* y *c*.

Como los denominadores de $Y(s)/D(s)$ e $Y(s)/R(s)$ son el mismo, el denominador de $Y(s)/D(s)$ determina también las características de respuesta para la entrada de referencia. Para satisfacer el tercer requisito, se utiliza el método de asignación de ceros y se escoge la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$ de la forma siguiente:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(2a + c)s^2 + (a^2 + b^2 + 2ac)s + (a^2 + b^2)c}{s^3 + (2a + c)s^2 + (a^2 + b^2 + 2ac)s + (a^2 + b^2)c}$$

en cuyo caso el tercer requisito se satisface automáticamente.

El problema entonces se convierte en una búsqueda de un conjunto o conjuntos de polos en lazo cerrado deseados en términos de a, b y c en la región especificada, tal que el sistema cumplirá el requisito sobre la respuesta a la entrada de referencia en escalón unitario de que la máxima sobreelongación se encuentre entre el 19% y el 2% y que el tiempo de asentamiento sea menor que 1 seg. (Si no se puede encontrar un conjunto aceptable en la región de búsqueda, se tendrá que ampliar dicha región.)

En la búsqueda computacional hay que suponer un valor del incremento del paso que sea razonable. En este problema se ha tomado 0.2.

El Programa 8-8 de MATLAB genera una tabla de conjuntos de valores aceptables de a, b y c. Utilizando este programa, se encuentra que el requisito sobre la respuesta a la entrada de referencia en escalón unitario se satisface por cualquiera de los 23 conjuntos que se muestran en la tabla del Programa 8-8 de MATLAB. Observe que la última fila en la tabla corresponde al último punto de búsqueda. Este punto no satisface el requisito y, por lo tanto, se debería pasar por alto. (En el programa escrito, el último punto de búsqueda produce la última fila de la tabla, satisfaga o no el requisito.)

MATLAB Programa 8-8

```
t=0:0.01:4;
k=0;
for i=1:21;
  a(i)=6.2i*0.2;
  for j=1:21;
    b(j)=6.2-j*0.2;
    for h=1:31;
      c(h)=12.2-h*0.2;
    num=[0 2*a(i)+c(h) a(i)^2+b(j)^2+2*a(i)*c(h) (a(i)^2+b(j)^2)*c(h)];
    den=[1 2*a(i)+c(h) a(i)^2+b(j)^2+2*a(i)*c(h) (a(i)^2+b(j)^2)*c(h)];
        y=step(num,den,t);
        m=max(y);
        s=401; while y(s)>0.98 & y(s)<1.02;
        s=s-1; end;
        ts=(s-1)*0.01;
      if m<1.19 & m>1.02 & ts<1.0;
      k=k+1;
      table(k,:)=[a(i)  b(j)  c(h)  m  ts];
      end
    end
  end
 end
```

(continúa)

```
table(k,:)=[a(i)  b(j)  c(h)  m  ts]

table=

   4.2000  2.0000  12.0000  1.1896  0.8500
   4.0000  2.0000  12.0000  1.1881  0.8700
   4.0000  2.0000  11.8000  1.1890  0.8900
   4.0000  2.0000  11.6000  1.1899  0.9000
   3.8000  2.2000  12.0000  1.1883  0.9300
   3.8000  2.2000  11.8000  1.1894  0.9400
   3.8000  2.0000  12.0000  1.1861  0.8900
   3.8000  2.0000  11.8000  1.1872  0.9100
   3.8000  2.0000  11.6000  1.1882  0.9300
   3.8000  2.0000  11.4000  1.1892  0.9400
   3.6000  2.4000  12.0000  1.1893  0.9900
   3.6000  2.2000  12.0000  1.1867  0.9600
   3.6000  2.2000  11.8000  1.1876  0.9800
   3.6000  2.2000  11.6000  1.1886  0.9900
   3.6000  2.0000  12.0000  1.1842  0.9200
   3.6000  2.0000  11.8000  1.1852  0.9400
   3.6000  2.0000  11.6000  1.1861  0.9500
   3.6000  2.0000  11.4000  1.1872  0.9700
   3.6000  2.0000  11.2000  1.1883  0.9800
   3.4000  2.0000  12.0000  1.1820  0.9400
   3.4000  2.0000  11.8000  1.1831  0.9600
   3.4000  2.0000  11.6000  1.1842  0.9800
   3.2000  2.0000  12.0000  1.1797  0.9600
   2.0000  2.0000   6.0000  1.2163  1.8900
```

Como se ha dicho ya, 23 conjuntos de variables a, b y c satisfacen el requisito. Las curvas de respuesta a un escalón unitario del sistema con cualquiera de los 23 conjuntos son parecidas. En la Figura 8-35(a) se muestra la curva de respuesta a un escalón unitario con

$$a = 4.2, \quad b = 2, \qquad c = 12$$

La sobreelongación máxima es 18.96% y el tiempo de asentamiento es 0.85 seg. Utilizando estos valores de a, b y c los polos en lazo cerrado deseados se localizan en

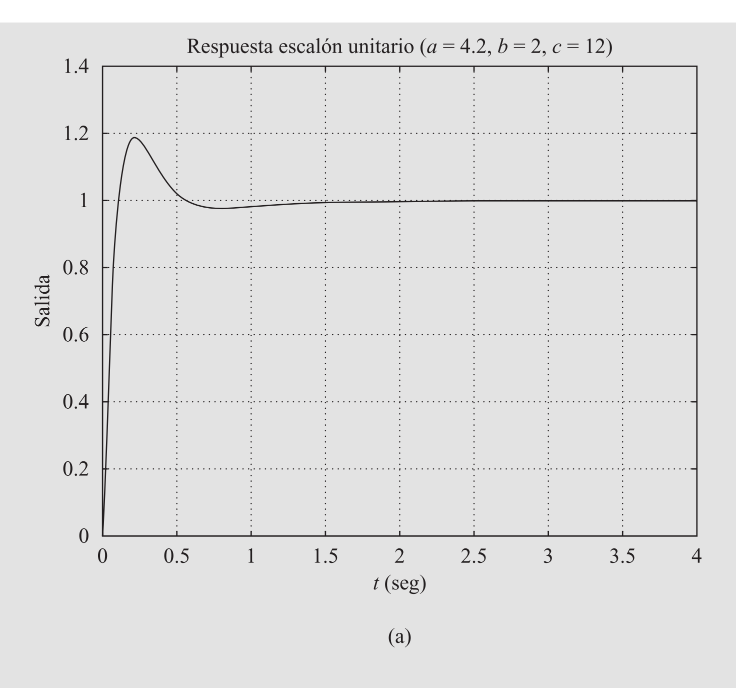
$$s = -4.2 \pm j2, \qquad s = -12$$

Utilizando estos polos en lazo cerrado, el denominador de $Y(s)/D(s)$ es

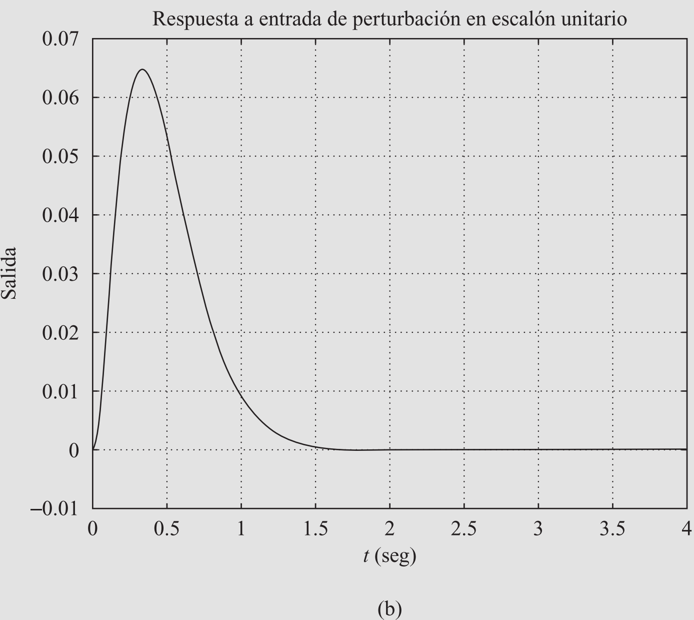
$$s^2(s+1) + 10K(s+\alpha)(s+\beta) = (s+4.2+j2)(s+4.2-j2)(s+12)$$

o bien

$$s^3 + (1+10K)s^2 + 10K(\alpha+\beta)s + 10K\alpha\beta = s^3 + 20.4s^2 + 122.44s + 259.68$$



(a)



(b)

Figura 8-35. (a) Respuesta a una entrada de referencia en escalón unitario ($a = 4.2$, $b = 2$, $c = 12$); (b) respuesta a una entrada de perturbación en escalón unitario ($a = 4.2$, $b = 2$, $c = 12$).

Igualando los coeficientes de potencias iguales en s en ambos lados de esta última ecuación, se obtiene

$$1 + 10K = 20.4$$

$$10K(\alpha + \beta) = 122.44$$

$$10K\alpha\beta = 259.68$$

Por tanto,

$$K = 1.94, \qquad \alpha + \beta = \frac{122.44}{19.4}, \qquad \alpha\beta = \frac{259.68}{19.4}$$

Entonces $G_c(s)$ se puede escribir como

$$G_c(s) = K\frac{(s+\alpha)(s+\beta)}{s}$$

$$= \frac{K[s^2 + (\alpha+\beta)s + \alpha\beta]}{s}$$

$$= \frac{1.94s^2 + 12.244s + 25.968}{s}$$

La función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/D(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{10}{s(s+1) + 10G_c}$$

$$= \frac{10}{s(s+1) + 10\,\dfrac{1.94s^2 + 12.244s + 25.968}{s}}$$

$$= \frac{10s}{s^3 + 20.4s^2 + 122.44s + 259.68}$$

Utilizando esta expresión, la respuesta $y(t)$ a una entrada de perturbación en escalón unitario se puede obtener tal como se muestra en la Figura 8-35(b).

La Figura 8-36(a) muestra la respuesta del sistema a la entrada de referencia en escalón unitario cuando a, b y c se escogen como

$$a = 3.2, \qquad b = 2, \qquad c = 12$$

La Figura 8-36(b) muestra la respuesta de este sistema cuando está sujeto a una entrada de perturbación en escalón unitario. Si se comparan las Figuras 8-35(a) y 8-36(a), se ve que son muy parecidas. Sin embargo, al comparar las Figuras 8-35(b) y 8-36(b), se comprueba que la primera es un poco mejor que la segunda. Al comparar la respuesta de los sistemas con cada conjunto en la tabla, se concluye que el primer conjunto de valores ($a = 4.2$, $b = 2$, $c = 12$) es el mejor. Por tanto, como solución a este problema se elige

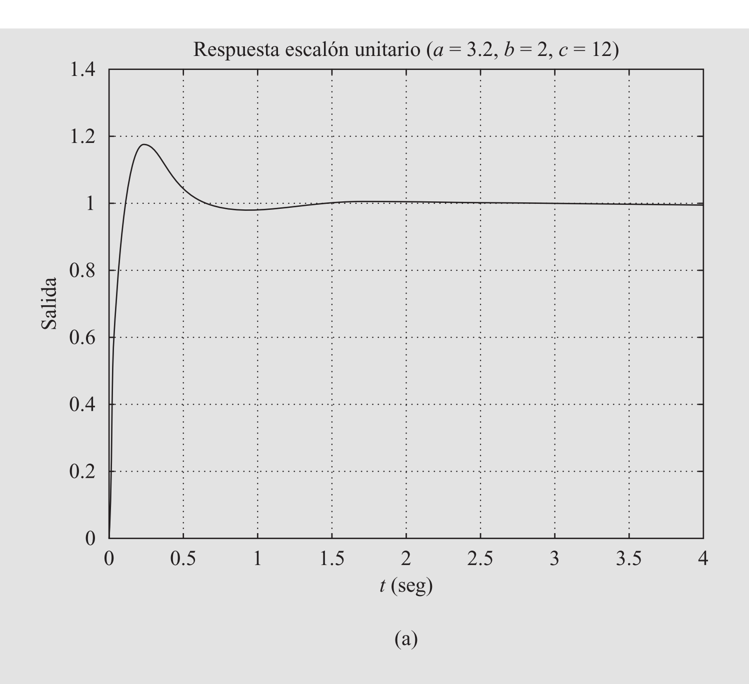
$$a = 4.2, \qquad b = 2, \qquad c = 12$$

Paso de diseño 2: A continuación se determina G_{c1}. Como $Y(s)/R(s)$ se puede expresar por

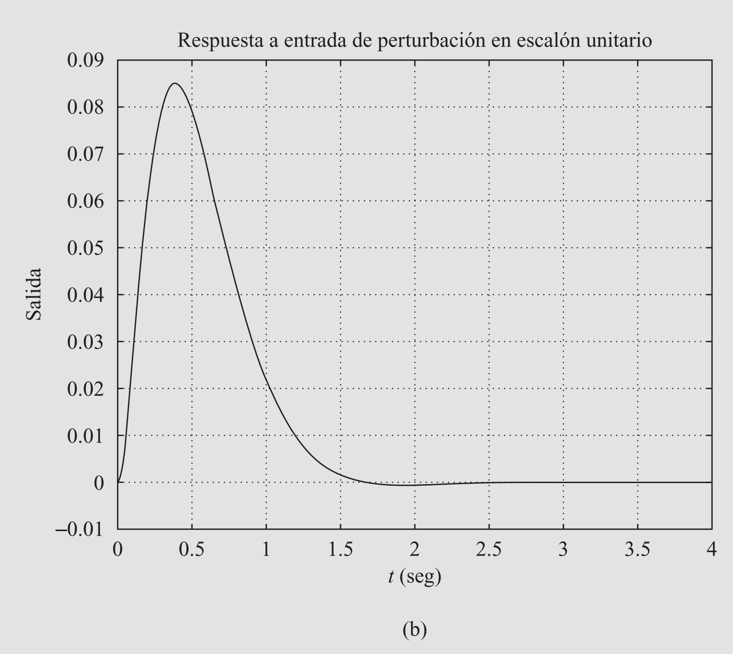
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_p G_{c1}}{1 + G_p G_c}$$

$$= \frac{\dfrac{10}{s(s+1)}\,G_{c1}}{1 + \dfrac{10}{s(s+1)}\,\dfrac{1.94s^2 + 12.244s + 25.968}{s}}$$

$$= \frac{10sG_{c1}}{s^3 + 20.4s^2 + 122.44s + 259.68}$$



(a)



(b)

Figura 8-36. (a) Respuesta a una entrada de referencia en escalón unitario ($a = 3.2$, $b = 2$, $c = 12$); (b) respuesta a una entrada de perturbación en escalón unitario ($a = 3.2$, $b = 2$, $c = 12$).

el problema se transforma en diseñar $G_{c1}(s)$ para satisfacer los requisitos sobre las respuestas a las entradas en escalón, rampa y aceleración.

Como el numerador contiene «s», $G_{c1}(s)$ debe incluir un integrador para cancelar esta «s». [Aunque se necesita «s» en el numerador de la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/D(s)$ para obtener error en estado estacionario cero para la entrada de perturbación en escalón, no se

precisa tener «s» en el numerador de la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$.] Para eliminar el error en la respuesta a la entrada de referencia en salto y eliminar los errores en estado estacionario en el seguimiento a las entradas de referencia en rampa y aceleración, el numerador de $Y(s)/R(s)$ debe ser igual a los tres últimos términos del denominador, como se señaló anteriormente. Esto es,

$$10sG_{c1}(s) = 20.4s^2 + 122.44s + 259.68$$

o bien

$$G_{c1}(s) = 2.04s + 12.244 + \frac{25.968}{s}$$

Así, $G_{c1}(s)$ es un controlador PID. Como $G_c(s)$ está dado por

$$G_c(s) = G_{c1}(s) + G_{c2}(s) = \frac{1.94s^2 + 12.244s + 25.968}{s}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} G_{c2}(s) &= G_c(s) - G_{c1}(s) \\ &= \left(1.94s + 12.244 + \frac{25.968}{s}\right) - \left(2.04s + 12.244 + \frac{25.968}{s}\right) \\ &= -0.1s \end{aligned}$$

Así, $G_{c2}(s)$ es un controlador derivativo. En la Figura 8-37 se muestra un diagrama de bloques del sistema diseñado.

La función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$ es ahora

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20.4s^2 + 122.44s + 259.68}{s^3 + 20.4s^2 + 122.44s + 259.68}$$

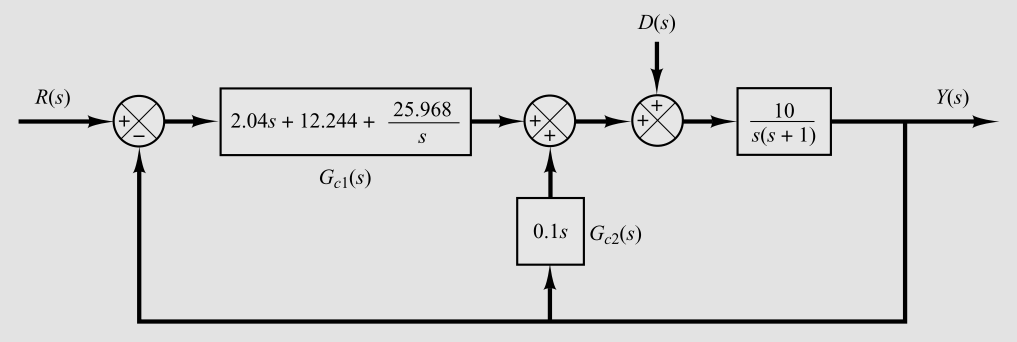


Figura 8-37. Diagrama de bloques del sistema diseñado.

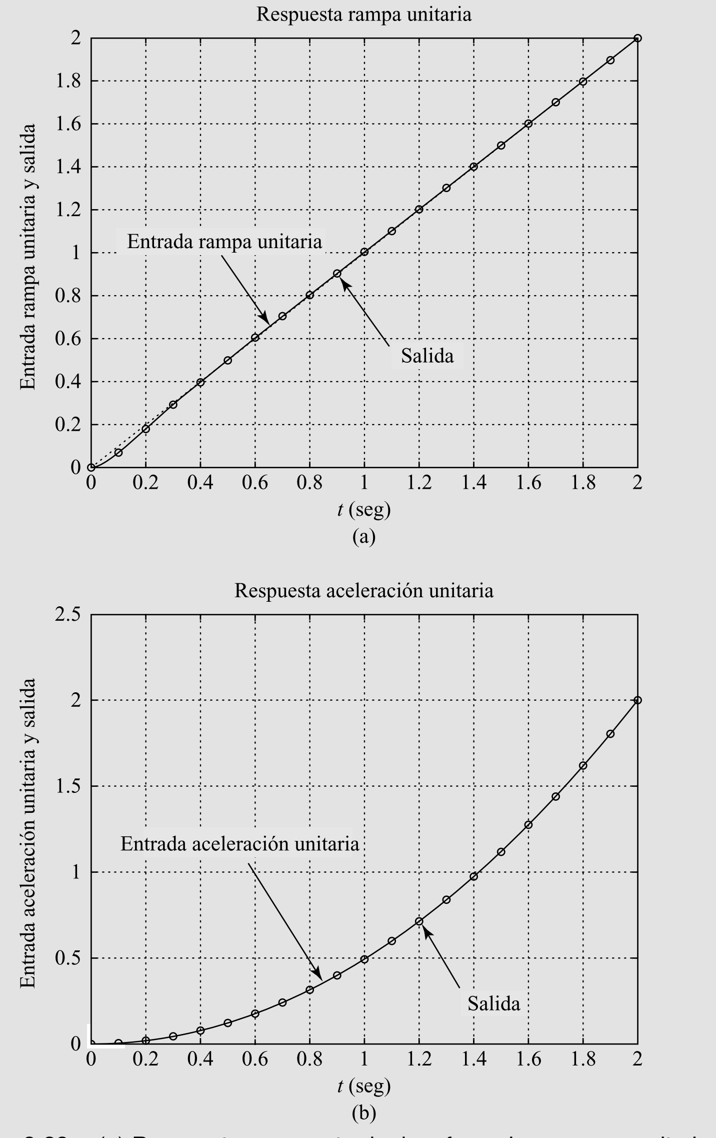


Figura 8-38. (a) Respuesta a una entrada de referencia en rampa unitaria; (b) respuesta a una entrada de referencia en aceleración unitaria.

En las Figuras 8-38(a) y (b) se muestran la respuesta a la entrada de referencia en rampa unitaria y a la entrada de referencia de aceleración unitaria, respectivamente. Los errores en estado estacionario en el seguimiento a las entradas en rampa y aceleración son cero. Así, se satisfacen todos los requisitos del problema. Por tanto, los controladores diseñados $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ son aceptables.

EJEMPLO 8-5 Sea el sistema de control que se muestra en la Figura 8-39. Es un sistema con dos grados de libertad. En el problema de diseño considerado aquí, se supone que la entrada de ruido $N(s)$ es cero. Se supone también que la función de transferencia de la planta $G_p(s)$ está dada por

$$G_p(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

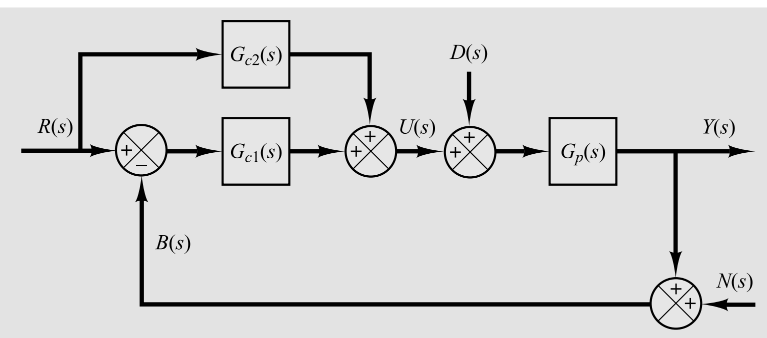


Figura 8-39. Sistema de control con dos grados de libertad.

También se supone que el controlador $G_{c1}(s)$ es del tipo PID. Esto es,

$$G_{c1}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

El controlador $G_{c2}(s)$ es de tipo P o PD. [Si $G_{c2}(s)$ contiene acción de control integral, entonces esto introducirá una componente en rampa en la señal de entrada que no es deseable. Por tanto, $G_{c2}(s)$ no debería incluir la acción integral.] Así, se supone que

$$G_{c2}(s) = \hat{K}_p(1 + \hat{T}_d s)$$

donde $\hat{T}_d$ puede ser cero.

Se diseñan los controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ de forma que las respuestas a las entradas de perturbación y de referencia en salto son de «características deseables» en el sentido de que:

1. La respuesta a la entrada de perturbación en salto tendrá un pequeño pico y eventualmente tenderá a cero. (Esto es, no habrá error en estado estacionario.)
2. La respuesta a la entrada de referencia escalón presentará una sobreelongación menor que el 25% con un tiempo de asentamiento menor que 2 seg. Los errores en estado estacionario a las entradas de referencia en rampa y aceleración deberían ser cero.

El diseño de este sistema de control con dos grados de libertad se puede realizar siguiendo los pasos 1 y 2 que se dan a continuación.

1. Determinar $G_{c1}(s)$ de forma que la respuesta a la entrada de perturbación en escalón es de características deseables.
2. Diseñar $G_{c2}(s)$ de forma que las respuestas a las entradas de referencia son de características deseables sin cambiar la respuesta a la perturbación en escalón considerada en el paso 1.

Diseño de $G_{c1}(s)$: En primer lugar, observe que se supuso que la entrada de ruido $N(s)$ era cero. Para obtener la respuesta a la entrada de perturbación en escalón, se supone que la entrada de referencia es cero. Entonces se puede dibujar, tal como se muestra en la Figura 8-40, el diagrama de bloques que relaciona $Y(s)$ y $D(s)$. La función de transferencia $Y(s)/D(s)$ está dada por

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_{c1}G_p}$$

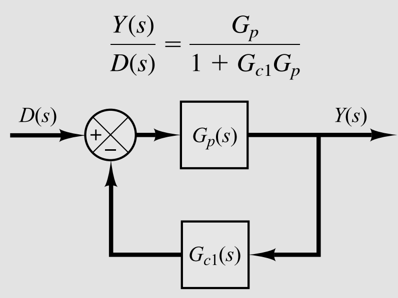


Figura 8-40. Sistema de control.

donde

$$G_{c1}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

Este controlador contiene un polo en el origen y dos ceros. Si se supone que los dos ceros están localizados en el mismo lugar (un cero doble), entonces $G_{c1}(s)$ se puede escribir como

$$G_{c1}(s) = K\frac{(s+a)^2}{s}$$

La ecuación característica para el sistema resulta ser

$$1 + G_{c1}(s)G_p(s) = 1 + \frac{K(s+a)^2}{s}\,\frac{5}{(s+1)(s+5)} = 0$$

o bien

$$s(s+1)(s+5) + 5K(s+a)^2 = 0$$

que se puede reescribir como

$$s^3 + (6+5K)s^2 + (5+10Ka)s + 5Ka^2 = 0 \qquad (8\text{-}8)$$

Si se coloca el cero doble entre $s = -3$ y $s = -6$, entonces el diagrama del lugar de las raíces de $G_{c1}(s)G_p(s)$ es el que se muestra en la Figura 8-41. La velocidad de respuesta debería ser rápida, pero no más de lo necesario, porque una respuesta excesivamente rápida generalmente implica componentes más grandes y costosos. Por tanto, se pueden escoger los polos en lazo cerrado dominantes en

$$s = -3 \pm j2$$

(Observe que esta elección no es única. Hay infinitas posibilidades de elección de los polos en lazo cerrado.)

Como el sistema es de tercer orden, hay tres polos en lazo cerrado. El tercero se localiza sobre el eje real negativo a la izquierda del punto $s = -5$.

Sustituyendo $s = -3 + j2$ en la Ecuación (8-8),

$$(-3+j2)^3 + (6+5K)(-3+j2)^2 + (5+10Ka)(-3+j2) + 5Ka^2 = 0$$

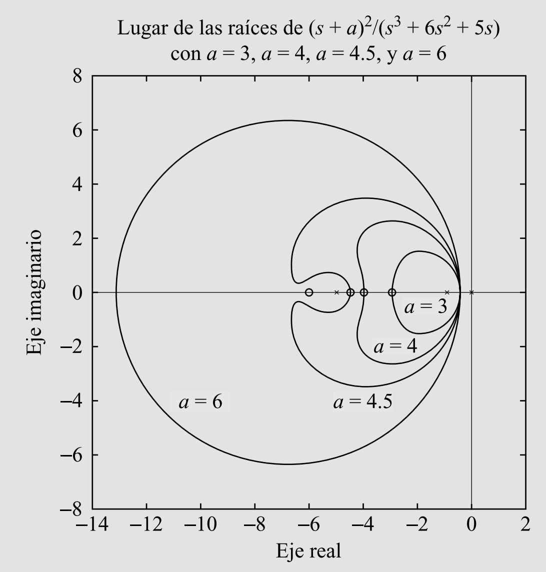


Figura 8-41. Lugar de las raíces de $5K(s+a)^2/[s(s+1)(s+5)]$ cuando $a = 3$, $a = 4$, $a = 4.5$ y $a = 6$.

que se puede simplificar a

$$24 + 25K - 30Ka + 5Ka^2 + j(-16 - 60K + 20Ka) = 0$$

Igualando la parte real y la parte imaginaria a cero respectivamente, se obtiene

$$24 + 25K - 30Ka + 5Ka^2 = 0 \qquad (8\text{-}9)$$

$$-16 - 60K + 20Ka = 0 \qquad (8\text{-}10)$$

De la Ecuación (8-10) se tiene que

$$K = \frac{4}{5a - 15} \qquad (8\text{-}11)$$

Sustituyendo la Ecuación (8-11) en la Ecuación (8-9), se obtiene

$$a^2 = 13$$

o bien $a = 3.6056$ o -3.6056. Observe que los valores de K son

$$K = 1.3210 \qquad \text{para } a = 3.6056$$
$$K = -0.1211 \qquad \text{para } a = -3.6056$$

Como $G_{c1}(s)$ está en el camino directo, la ganancia K debería ser positiva. Por tanto, se escoge

$$K = 1.3210, \qquad a = 3.6056$$

Entonces $G_{c1}(s)$ está dado por

$$G_{c1}(s) = K\frac{(s+a)^2}{s}$$
$$= 1.3210\frac{(s+3.6056)^2}{s}$$
$$= \frac{1.3210s^2 + 9.5260s + 17.1735}{s}$$

Para determinar K_p, T_i y T_d se procede como sigue:

$$G_{c1}(s) = \frac{1.3210(s^2 + 7.2112s + 13)}{s}$$
$$= 9.5260\left(1 + \frac{1}{0.5547s} + 0.1387s\right) \qquad (8\text{-}12)$$

Así,

$$K_p = 9.5260, \qquad T_i = 0.5547, \qquad T_d = 0.1387$$

Para comprobar la respuesta a una entrada de perturbación en escalón unitario, se obtiene la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/D(s)$.

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_{c1}G_p}$$
$$= \frac{5s}{s(s+1)(s+5) + 5K(s+a)^2}$$
$$= \frac{5s}{s^3 + 12.605s^2 + 52.63s + 85.8673}$$

En la Figura 8-42 se muestra la respuesta a la entrada de perturbación en escalón unitario. La curva de respuesta parece aceptable. Observe que los polos en lazo cerrado se localizan en $s = -3 \pm j2$ y $s = -6.6051$. Los polos en lazo cerrado complejos conjugados actúan como polos en lazo cerrado dominantes.

Diseño de $G_{c2}(s)$: Ahora se diseña $G_{c2}(s)$ para obtener las respuestas deseadas a las entradas de referencia. La función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$ está dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(G_{c1} + G_{c2})G_p}{1 + G_{c1}G_p}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{1.321s^2 + 9.526s + 17.1735}{s} + \hat{K}_p(1 + \hat{T}_d s)\right]\dfrac{5}{(s+1)(s+5)}}{1 + \dfrac{1.321s^2 + 9.526s + 17.1735}{s}\dfrac{5}{(s+1)(s+5)}}$$

$$= \frac{(6.6051 + 5\hat{K}_p\hat{T}_d)s^2 + (47.63 + 5\hat{K}_p)s + 85.8673}{s^3 + 12.6051s^2 + 52.63s + 85.8673}$$

Asignación de ceros: Se colocan los dos ceros juntos con la ganancia de forma tal que el numerador es el mismo que la suma de los tres últimos términos del denominador. Esto es,

$$(6.6051 + 5\hat{K}_p\hat{T}_d)s^2 + (47.63 + 5\hat{K}_p)s + 85.8673 = 12.6051s^2 + 52.63s + 85.8673$$

Igualando los coeficientes de los términos en s^2 y s en ambos miembros de esta última ecuación,

$$6.6051 + 5\hat{K}_p\hat{T}_d = 12.6051$$

$$47.63 + 5\hat{K}_p = 52.63$$

de donde se obtiene

$$\hat{K}_p = 1, \qquad \hat{T}_d = 1.2$$

Por tanto,

$$G_{c2}(s) = 1 + 1.2s \tag{8-13}$$

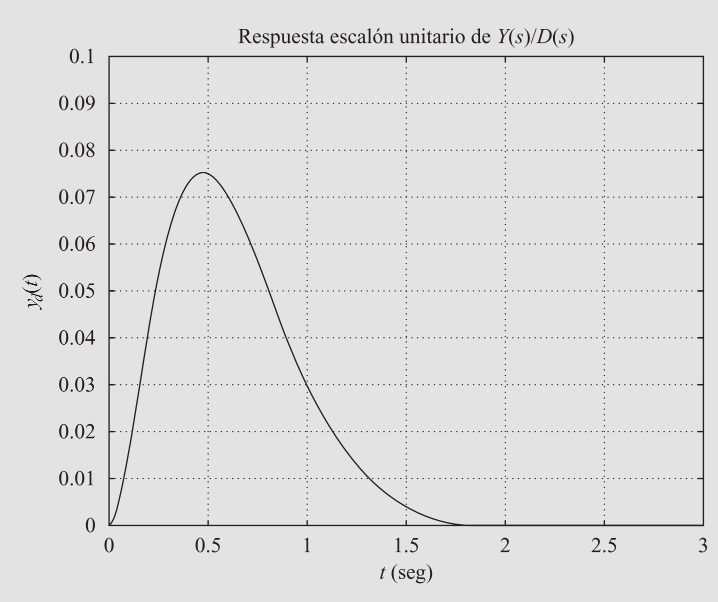
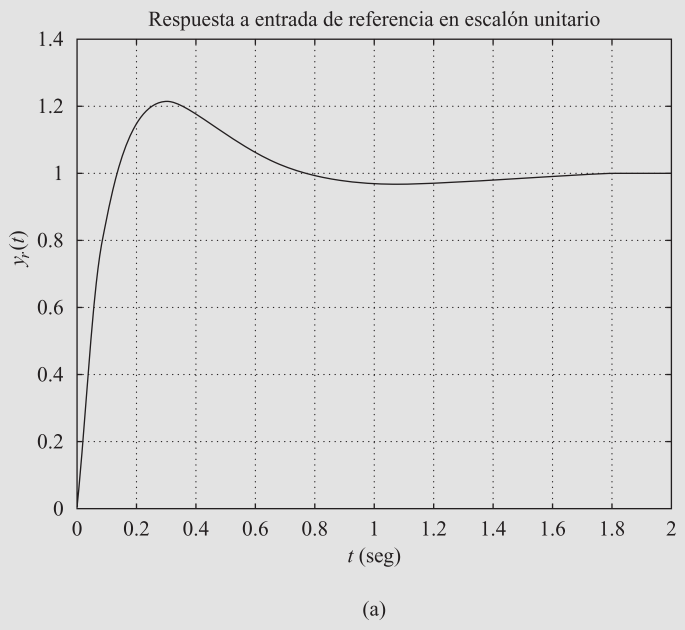


Figura 8-42. Respuesta a una entrada de perturbación en escalón unitario.

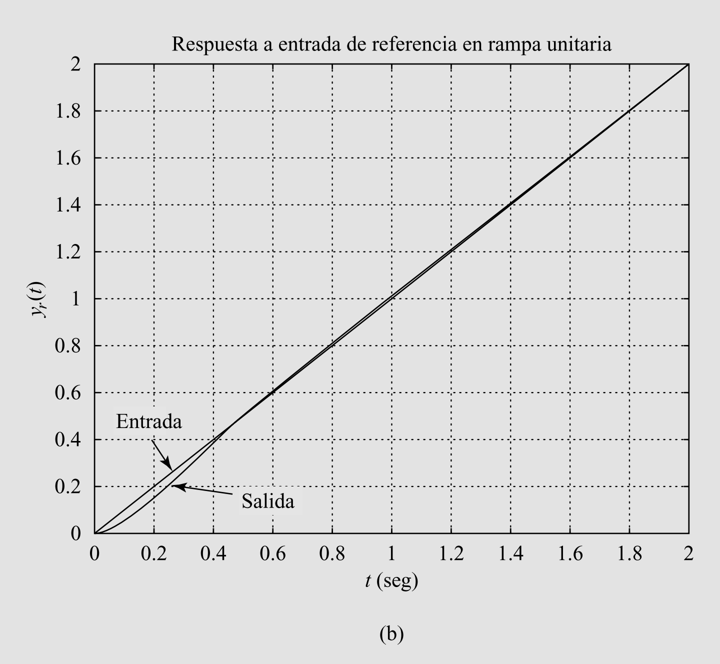
Con este controlador $G_{c2}(s)$, la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{12.6051s^2 + 52.63s + 85.8673}{s^3 + 12.6051s^2 + 52.63s + 5.8673}$$

La respuesta a la entrada de referencia en escalón unitario resulta tal como se muestra en la Figura 8-43(a).

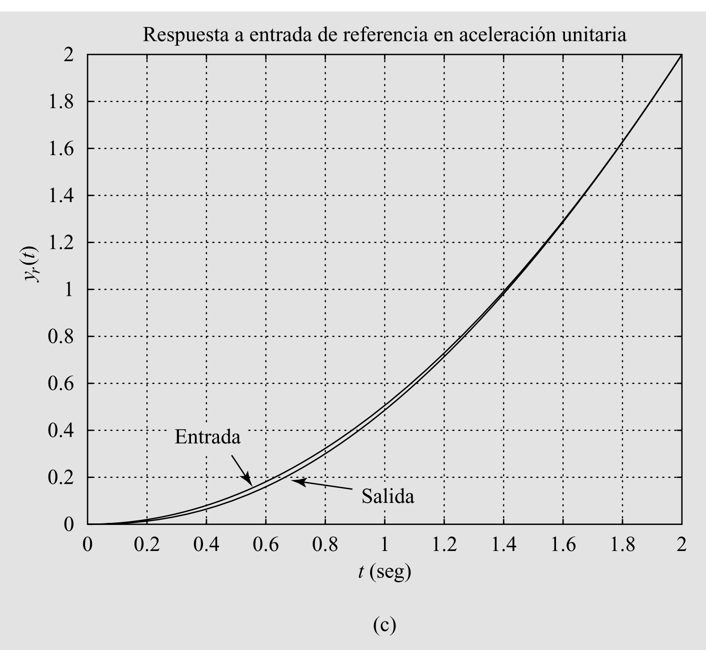


(a)



(b)

Figura 8-43. (a) Respuesta a una entrada de referencia en escalón unitario; (b) respuesta a una entrada de referencia en rampa unitaria; (c) respuesta a una entrada de referencia en aceleración unitaria.



(c)

Figura 8-43. *(continuación).*

La respuesta presenta una sobreelongación máxima del 21% y un tiempo de asentamiento de aproximadamente 1.6 seg. Las Figuras 8-43(b) y (c) muestran la respuesta en rampa y aceleración. Los errores en estado estacionario en ambas respuestas son cero. La respuesta a la perturbación en escalón fue satisfactoria, de forma que los controladores diseñados $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$, dados por las Ecuaciones (8-12) y (8-13) respectivamente, son aceptables.

Si las características de respuesta a la entrada de referencia en escalón unitario no son satisfactorias, se tiene que cambiar la localización de los polos en lazo cerrado dominantes y repetir el proceso de diseño. Los polos en lazo cerrado dominantes deben estar en una cierta región del semiplano izquierdo s (como $2 \leqslant a \leqslant 6$, $2 \leqslant b \leqslant 6$, $6 \leqslant c \leqslant 12$). Si se desea una búsqueda computacional, escriba un programa (similar al Programa 8-8 de MATLAB) y ejecute el proceso de búsqueda. Entonces se pueden encontrar un conjunto o conjuntos deseados de valores de a, b y c tales que la respuesta del sistema a la entrada de referencia en escalón unitario cumpla todos los requisitos de sobreelongación máxima y tiempo de asentamiento.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-8-1. Describa brevemente las características dinámicas del controlador PI, del controlador PD y del controlador PID.

Solución. El controlador PI se caracteriza por la función de transferencia

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

El controlador PI es un compensador de atraso. Tiene un cero en $s = -1/T_i$ y un polo en $s = 0$. Por tanto, la característica del controlador PI es de ganancia infinita a una frecuencia cero. Esto mejora las características en estado estacionario. Sin embargo, la inclusión de la acción de control

PI en el sistema incrementa en 1 el tipo del sistema compensado, y esto provoca que el sistema compensado sea menos estable o, incluso, que se pueda hacer inestable. Por tanto, deben elegirse con cuidado los valores de K_p y T_i para asegurar una respuesta transitoria adecuada. Si el controlador PI se diseña adecuadamente, es posible hacer que la respuesta transitoria para una entrada escalón no presente ninguna sobreelongación o presente una relativamente pequeña. Sin embargo, la velocidad de respuesta se hace mucho más lenta, debido a que el controlador PI, al ser un filtro paso baja, atenúa las componentes de frecuencia alta de la señal.

El controlador PD es una versión simplificada del compensador de adelanto; tiene la función de transferencia $G_c(s)$, donde

$$G_c(s) = K_p(1 + T_d s)$$

Por lo general, el valor de K_p se determina para satisfacer los requisitos en estado estacionario. La frecuencia de esquina $1/T_d$ se escoge de modo que el adelanto de fase ocurra en la cercanía de la frecuencia de cruce de ganancia. Aunque el margen de fase puede aumentar, la magnitud del compensador sigue incrementándose para la región de frecuencia $1/T_d < \omega$. (Por tanto, el controlador PD es un filtro paso alta.) Tal incremento continuo de la magnitud no es deseable, porque amplifica el ruido de alta frecuencia que puede estar presente en el sistema. En este caso, se prefiere una compensación de adelanto a un control PD. La compensación de adelanto ofrece un adelanto de fase suficiente, en tanto que el incremento de la magnitud para la región de frecuencias altas es mucho más pequeño que para el control PD.

Debido a que la función de transferencia del controlador PD contiene un cero pero ningún polo, no es posible realizarla eléctricamente sólo mediante elementos RLC pasivos. Es posible la realización del controlador PD utilizando amplificadores operacionales, resistencias y condensadores, pero, debido a que el controlador PD es un filtro paso alta, como se dijo antes, el proceso de diferenciación implícito puede provocar serios problemas de ruido en algunos casos. Sin embargo, no hay problema si el controlador PD se realiza usando los elementos hidráulicos o neumáticos.

El control PD, como en el caso del compensador de adelanto, mejora las características de respuesta transitoria, mejora la estabilidad del sistema e incrementa el ancho de banda del sistema, lo que implica un tiempo de asentamiento pequeño.

El controlador PID es una combinación de los controladores PI y PD. Es un compensador de atraso-adelanto. Observe que la acción de control PI y la acción de control PD ocurren en regiones de frecuencia diferentes: la acción de control PI ocurre en la región de frecuencias bajas y la acción de control PD en la de frecuencias altas. El control PID se utiliza cuando el sistema requiere mejoras tanto en el comportamiento transitorio como en el estado estacionario.

A-8-2. Demuestre que la función de transferencia $U(s)/E(s)$ del controlador PID de la Figura 8-44 es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_0 \frac{T_1 + T_2}{T_1} \left[1 + \frac{1}{(T_1 + T_2)s} + \frac{T_1 T_2 s}{T_1 + T_2} \right]$$

Suponga que la ganancia K es muy grande en comparación con la unidad, o sea, que $K \gg 1$.

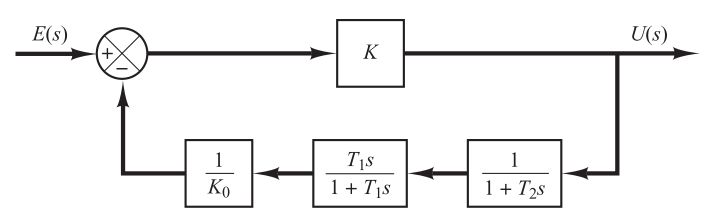


Figura 8-44. Controlador PID.

Solución.

$$
\begin{aligned}
\frac{U(s)}{E(s)} &= \frac{K}{1 + K\left(\dfrac{1}{K_0}\,\dfrac{T_1 s}{1 + T_1 s}\,\dfrac{1}{1 + T_2 s}\right)} \\
&\doteq \frac{K}{K\left(\dfrac{1}{K_0}\,\dfrac{T_1 s}{1 + T_1 s}\,\dfrac{1}{1 + T_2 s}\right)} \\
&= \frac{K_0(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{T_1 s} \\
&= K_0\left(1 + \frac{1}{T_1 s}\right)(1 + T_2 s) \\
&= K_0\left(1 + \frac{1}{T_1 s} + T_2 s + \frac{T_2}{T_1}\right) \\
&= K_0\,\frac{T_1 + T_2}{T_1}\left[1 + \frac{1}{(T_1 + T_2)s} + \frac{T_1 T_2 s}{T_1 + T_2}\right]
\end{aligned}
$$

A-8-3. Sea el circuito electrónico con dos amplificadores operacionales que se muestra en la Figura 8-45. Se trata de un controlador PID modificado, en el que la función de transferencia contiene un integrador y un término de retraso de primer orden. Obtenga la función de transferencia de este controlador PID.

Solución. Como

$$
Z_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + C_1 s} + R_3 = \frac{R_1 + R_3 + R_1 R_3 C_1 s}{1 + R_1 C_1 s}
$$

y

$$
Z_2 = R_2 + \frac{1}{C_2 s}
$$

se tiene que

$$
\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{(R_2 C_2 + 1)(R_1 C_1 s + 1)}{C_2 s(R_1 + R_3 + R_1 R_3 C_1 s)}
$$

Asimismo,

$$
\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_5}{R_4}
$$

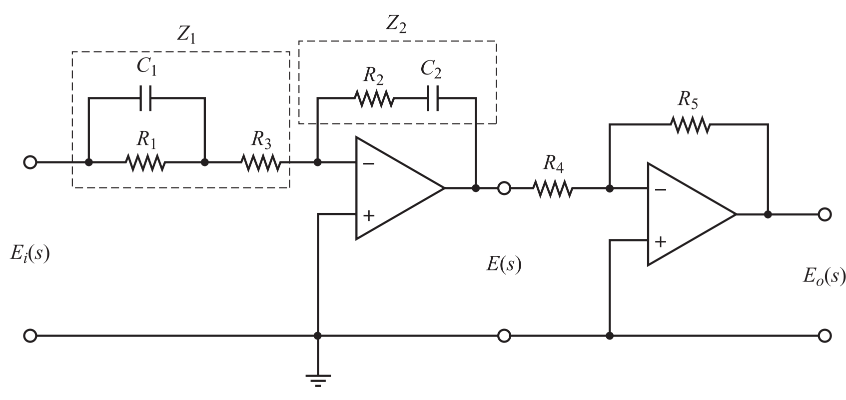


Figura 8-45. Controlador PID modificado.

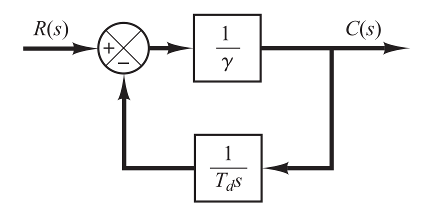


Figura 8-46. Diferenciador aproximado.

En consecuencia,

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{E_o(s)}{E(s)}\frac{E(s)}{E_i(s)} = \frac{R_5}{R_4(R_1 + R_3)C_2}\frac{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{s\left(\dfrac{R_1R_3}{R_1 + R_3}C_1s + 1\right)}$$

$$= \frac{R_5R_2}{R_4R_3}\frac{\left(s + \dfrac{1}{R_1C_1}\right)\left(s + \dfrac{1}{R_2C_2}\right)}{s\left(s + \dfrac{R_1 + R_3}{R_1R_3C_1}\right)}$$

Observe que R_1C_1 y R_2C_2 determinan las localizaciones de los ceros del controlador, mientras que R_1, R_3 y C_1 afectan a la localización del polo en el eje real negativo. R_5/R_4 ajusta la ganancia del controlador.

A-8-4. En la práctica, es imposible realizar un verdadero diferenciador. Por tanto, es necesario aproximar el diferenciador verdadero T_ds mediante

$$\frac{T_ds}{1 + \gamma T_ds}$$

Una forma de realizar un diferenciador aproximado es utilizar un integrador en el camino de realimentación. Demuestre que la función de transferencia en lazo cerrado del sistema de la Figura 8-46 se obtiene mediante la expresión anterior. (En los diferenciadores que se encuentran disponibles comercialmente, el valor de γ se establece como 0.1.)

Solución. La función de transferencia en lazo cerrado del sistema de la Figura 8-46 es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{1}{\gamma}}{1 + \dfrac{1}{\gamma T_ds}} = \frac{T_ds}{1 + \gamma T_ds}$$

Observe que semejante diferenciador con un retraso de primer orden reduce el ancho de banda del sistema de control en lazo cerrado y el efecto nocivo de las señales de ruido.

A-8-5. Sea el sistema de la Figura 8-47. Se trata de un control PID de una planta de segundo orden $G(s)$. Suponga que las perturbaciones $D(s)$ entran al sistema tal como se muestra en el diagrama. Suponga también que la entrada de referencia $R(s)$ normalmente se mantiene constante y que las

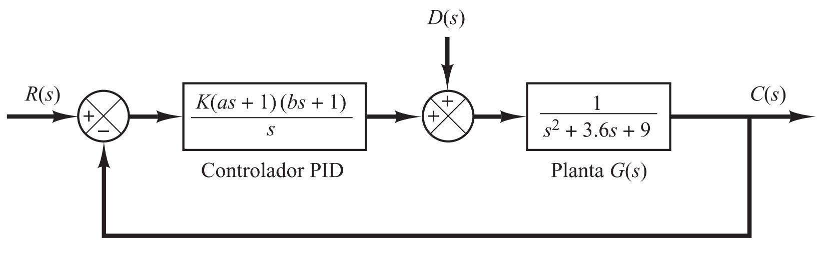


Figura 8-47. Sistema de control PID.

características de respuesta a las perturbaciones son una consideración muy importante en este sistema.

Diseñe un sistema de control tal que la respuesta ante cualquier perturbación escalón se amortigüe con rapidez (en 2 a 3 seg en términos del tiempo de asentamiento de 2%). Elija la configuración de los polos en lazo cerrado tal que exista un par de polos dominantes en lazo cerrado. A continuación obtenga la respuesta para la entrada de perturbación escalón unitario. También obtenga la respuesta para la entrada de referencia escalón unitario.

Solución. El controlador PID tiene la función de transferencia

$$G_c(s) = \frac{K(as + 1)(bs + 1)}{s}$$

Para la entrada de perturbación, en ausencia de la entrada de referencia, la función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C_d(s)}{D(s)} = \frac{s}{s(s^2 + 3.6s + 9) + K(as + 1)(bs + 1)}$$

$$= \frac{s}{s^3 + (3.6 + Kab)s^2 + (9 + Ka + Kb)s + K} \qquad (8\text{-}14)$$

La especificación requiere que la respuesta a la perturbación escalón unitario sea tal que el tiempo de asentamiento sea de 2 a 3 segundos y que el sistema tenga un amortiguamiento razonable. Se puede interpretar la especificación como $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 4$ rad/seg para los polos dominantes en lazo cerrado. Se elige el tercer polo en $s = -10$, a fin de que el efecto de este polo real sobre la respuesta sea pequeño. Entonces, la ecuación característica deseada se puede escribir como

$$(s + 10)(s^2 + 2 \times 0.5 \times 4s + 4^2) = (s + 10)(s^2 + 4s + 16) = s^3 + 14s^2 + 56s + 160$$

La ecuación característica para el sistema obtenido mediante la Ecuación (8-14) es

$$s^3 + (3.6 + Kab)s^2 + (9 + Ka + Kb)s + K = 0$$

Por tanto, se requiere que

$$3.6 + Kab = 14$$
$$9 + Ka + Kb = 56$$
$$K = 160$$

que produce

$$ab = 0.065, \qquad a + b = 0.29375$$

Ahora, el controlador PID es

$$G_c(s) = \frac{K[abs^2 + (a + b)s + 1]}{s}$$

$$= \frac{160(0.065s^2 + 0.29375s + 1)}{s}$$

$$= \frac{10.4(s^2 + 4.5192s + 15.385)}{s}$$

Con este controlador PID, la respuesta a la perturbación viene dada por

$$C_d(s) = \frac{s}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160} D(s)$$

$$= \frac{s}{(s + 10)(s^2 + 4s + 16)} D(s)$$

Es evidente que, para una entrada de perturbación escalón unitario, la salida en estado estacionario es cero, porque

$$\lim_{t\to\infty} c_d(t) = \lim_{s\to 0} sC_d(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2}{(s+10)(s^2+4s+16)}\,\frac{1}{s} = 0$$

La respuesta a una entrada de perturbación escalón unitario se obtiene fácilmente con MATLAB. El Programa MATLAB 8-9 produce la curva de respuesta que se muestra en la Figura 8-48(a). A partir de la curva de respuesta, se ve que el tiempo de asentamiento es de aproximadamente 2.7 seg. La respuesta se amortigua con rapidez. Por tanto, el sistema diseñado aquí es aceptable.

MATLAB Programa 8-9

```
% ***** Respuesta a una entrada de perturbación en escalón unitario *****

numd=[1  0];
dend=[1  14  56  160];
t=0:0.01:5;
[c1,x1,t]=step(numd,dend,t);
plot(t,c1)
grid
title('Respuesta a una entrada de perturbación en escalón unitario')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salida a la perturbación de entrada')

% ***** Respuesta a una entrada de referencia en escalón unitario *****

numr=[10.4  47  160];
denr=[1  14  56  160];
[c2,x2,t]=step(numr,denr,t);
plot(t,c2)
grid
title('Respuesta a una entrada de referencia en escalón unitario')
xlabel('t Seg')
ylabel('Salida a entrada de referencia')
```

Para la entrada de referencia $r(t)$, la función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C_r(s)}{R(s)} = \frac{10.4(s^2 + 4.5192s + 15.385)}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160}$$

$$= \frac{10.4s^2 + 47s + 160}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160}$$

La respuesta para una entrada de referencia escalón unitario también se obtiene mediante el programa MATLAB 8-9. La curva de respuesta resultante se presenta en la Figura 8-48(b). La curva de respuesta muestra que la sobreelongación máxima es de 7.3% y que el tiempo de asentamiento es de 1.2 seg. El sistema tiene características de respuesta bastante aceptables.

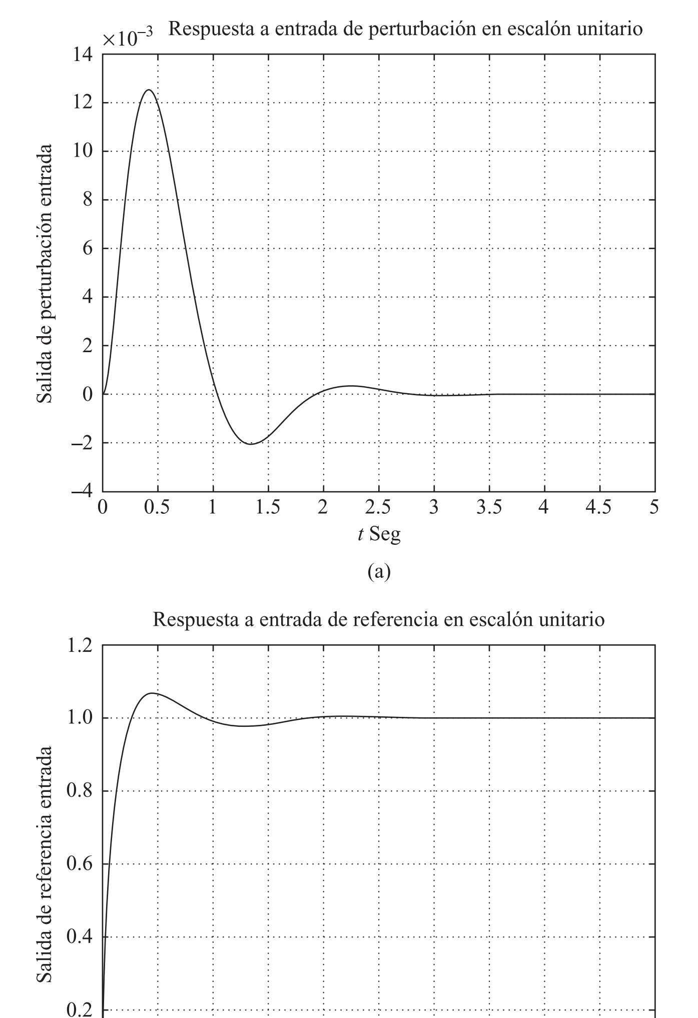


Figura 8-48. (a) Respuesta a una entrada de perturbación en escalón unitario; (b) respuesta a una entrada de referencia en escalón unitario.

A-8-6. Sea el sistema que se muestra en la Figura 8-49. Se desea diseñar un controlador PID $G_c(s)$ tal que los polos en lazo cerrado dominantes estén localizados en $s = -1 \pm j\sqrt{3}$. Para el controlador PID, seleccione $a = 1$ y entonces determine los valores de K y b. Represente el diagrama del lugar de las raíces para el sistema diseñado.

Solución. Como

$$G_c(s)G(s) = K\frac{(s+1)(s+b)}{s}\,\frac{1}{s^2+1}$$

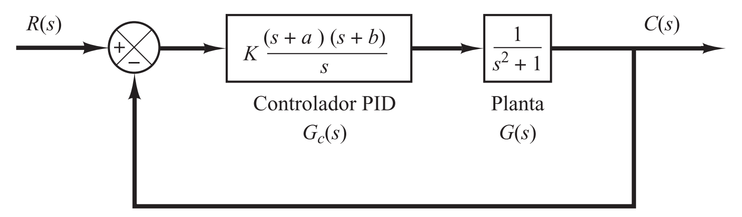


Figura 8-49. Sistema de control PID.

la suma de los ángulos en $s = -1 + j\sqrt{3}$, uno de los polos en lazo cerrado deseados desde el cero en $s = -1$ y los polos en $s = 0$, $s = j$ y $s = -j$ es

$$90^{\circ} - 143.794^{\circ} - 120^{\circ} - 110.104^{\circ} = -283.898^{\circ}$$

Por tanto, el cero en $s = -b$ debe contribuir 103.898°. Esto requiere que el cero se localice en

$$b = 0.5714$$

La ganancia constante K se puede determinar a partir de la condición de magnitud

$$\left| K \frac{(s+1)(s+0.5714)}{s} \frac{1}{s^2+1} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1$$

o bien

$$K = 2.3333$$

Entonces el compensador se puede escribir como sigue:

$$G_c(s) = 2.3333 \frac{(s+1)(s+0.5714)}{\mathrm{s}}$$

La función de transferencia en lazo abierto resulta

$$G_c(s)G(s) = \frac{2.3333(s+1)(s+0.5714)}{s} \frac{1}{s^2+1}$$

A partir de esta ecuación se puede dibujar un diagrama del lugar de las raíces para el sistema compensado. La Figura 8-50 es un diagrama del lugar de las raíces.

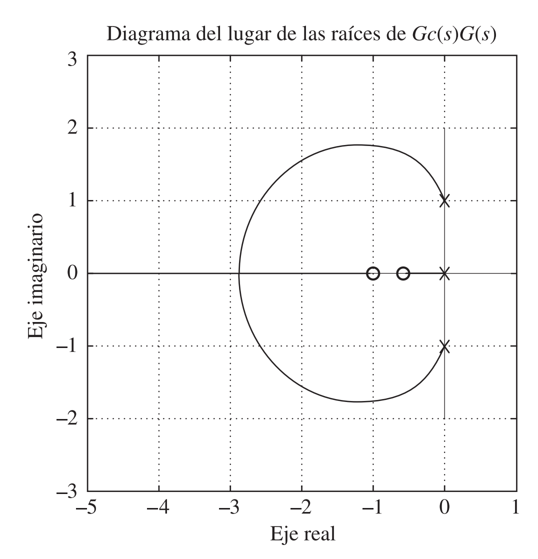


Figura 8-50. Lugar de las raíces del sistema compensado.

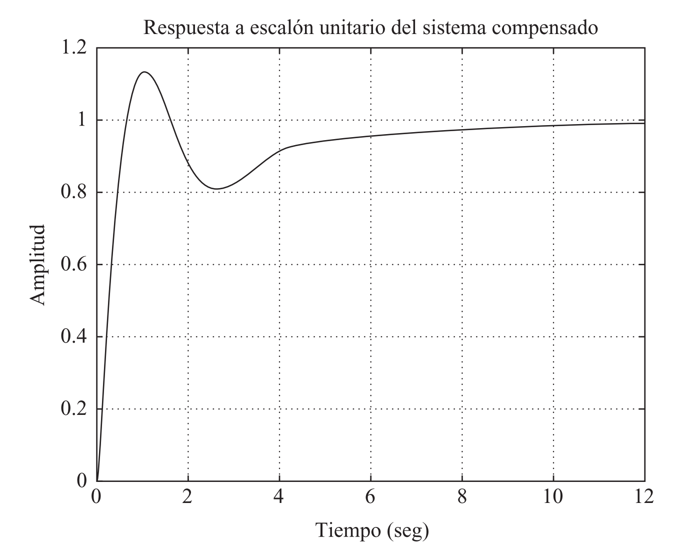


Figura 8-51. Respuesta a un escalón unitario del sistema compensado.

La función de transferencia en lazo cerrado está dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2.3333(s + 1)(s + 0.5714)}{s^3 + s + 2.3333(s + 1)(s + 0.5714)}$$

Los polos en lazo cerrado están localizados en $s = -1 \pm j\sqrt{3}$ y $s = -0.3333$. En la Figura 8-51 se muestra una curva de respuesta a un escalón unitario. El polo en lazo cerrado en $s = -0.3333$ y un cero en $s = -0.5714$ producen una larga cola de pequeña amplitud.

A-8-7. Sea el sistema que se muestra en la Figura 8-52. Diseñe un compensador tal que la constante de error estático de velocidad sea de 4 seg^{-1}, el margen de fase sea de 50° y el margen de ganancia sea de al menos 10 dB. Obtenga las curvas de respuesta a un escalón unitario y una rampa unitaria del sistema compensado con MATLAB. Dibuje también el diagrama de Nyquist del sistema compensado con MATLAB. Utilizando el criterio de estabilidad de Nyquist verifique que el sistema diseñado es estable.

Solución. Como la planta no tiene un integrador, es necesario añadir uno en el compensador. Se selecciona el compensador como

$$G_c(s) = \frac{K}{s}\hat{G}_c(s), \qquad \lim_{s\to 0} \hat{G}_c(s) = 1$$

donde $\hat{G}_c(s)$ se determina posteriormente. Como la constante de error estático de velocidad se especifica como 4 seg^{-1}, se tiene que

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)\frac{s + 0.1}{s^2 + 1} = \lim_{s\to 0} s\frac{K}{s}\hat{G}_c(s)\frac{s + 0.1}{s^2 + 1} = 0.1K = 4$$

$G_c(s)$ $\qquad \frac{s + 0.1}{s^2 + 1}$

Figura 8-52. Sistema de control.

De este modo, $K = 40$. Por tanto

$$G_c(s) = \frac{40}{s}\hat{G}_c(s)$$

A continuación, se representa el diagrama de Bode de

$$G(s) = \frac{40(s + 0.1)}{s(s^2 + 1)}$$

En la Figura 8-53 se muestra el diagrama de Bode de $G(s)$ a partir del Programa MATLAB 8-10.

MATLAB Programa 8-10

```
%***** Diagrama de Bode ****
num=[40 4];
den=[1 0.000000001 1 0];
bode(num,den)
title('Diagrama de Bode de G(s)=40(s+0.1)/[s(s^2+1)]')
```

Se necesita un margen de fase de 50° y un margen de ganancia de al menos 10 dB. Se selecciona $\hat{G}_c(s)$ tal que

$$\hat{G}_c(s) = as + 1 \qquad (a > 0)$$

Entonces $G_c(s)$ contribuirá con hasta 90° de adelanto de fase en la región de altas frecuencias. Mediante simples tanteos en MATLAB, se comprueba que $a = 0.1526$ da un margen de fase de 50° y un margen de ganancia de $+\infty$ dB.

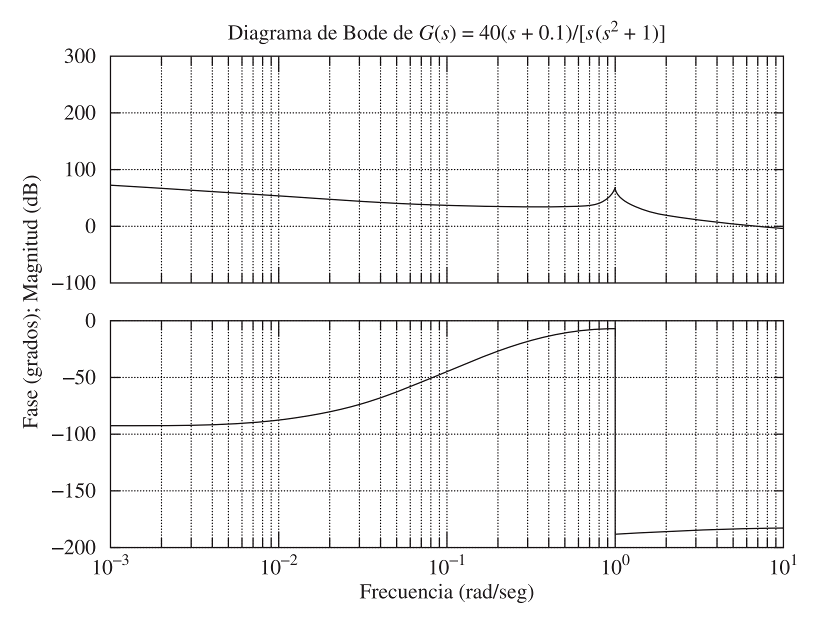


Figura 8-53. Diagrama de Bode de $G(s) = 40(s + 0.1)/[s(s^2 + 1)]$.

El Programa 8-11 de MATLAB genera el diagrama de Bode resultante que se muestra en la Figura 8-54. De este diagrama de Bode se observa que la constante de error estático de velocidad es 4 seg^{-1}, el margen de fase es 50° y el margen de ganancia es $+\infty$ dB. Por tanto, el sistema diseñado satisface todas las especificaciones.

MATLAB Programa 8-11

```
%***** Diagrama de Bode ****

num=conv([40  4],[0.1526  1]);
den=[1  0.000000001  1  0];
sys=tf(num,den);
w=logspace(-2,2,100);
bode(sys,w)
[Gm,pm,wcp,wcg]=margin(sys);
GmdB=20*log10(Gm);
[GmdB,pm,wcp,wcg]

ans=

   lnf  50.0026  NaN  8.0114

title('Diagrama de Bode de G(s)=40(s+0.1)(0.1526s+1)/[s(s^2+1)]')
```

El compensador diseñado tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{40}{s}\,\hat{G}_c(s) = \frac{40(0.1526s + 1)}{s}$$

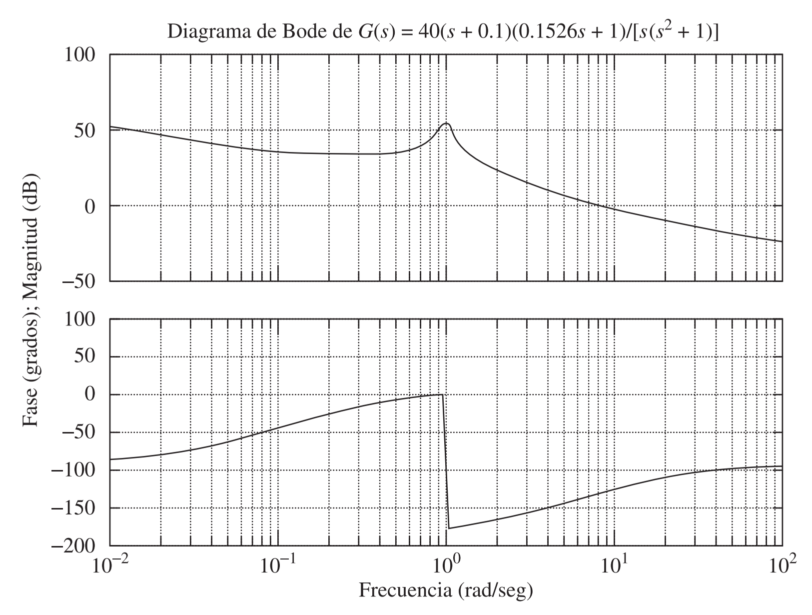


Figura 8-54. Diagrama de Bode de $G(s) = 40(s + 0.1)(0.1526s + 1)/[s(s^2 + 1)]$.

La función de transferencia en lazo abierto del sistema diseñado es

$$\text{Función de transferencia en lazo abierto} = \frac{40(0.152s + 1)}{s} \frac{s + 0.1}{s^2 + 1}$$

$$= \frac{6.104s^2 + 40.6104s + 4}{s(s^2 + 1)}$$

A continuación se obtendrán las respuestas a un escalón unitario y una rampa unitaria del sistema diseñado. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6.104s^2 + 40.6104s + 4}{s^3 + 6.104s^2 + 41.6104s + 4}$$

Los polos en lazo cerrado se encuentran en

$$s = -3.0032 + j5.6573$$
$$s = -3.0032 - j5.6573$$
$$s = -0.0975$$

El Programa 8-12 de MATLAB genera la respuesta a un escalón unitario del sistema diseñado. La Figura 8-55 muestra la gráfica resultante. Observe que el polo en lazo cerrado en s=- 0.0975 y el cero de la planta en $s = -0.1$ producen una larga cola de pequeña amplitud.

MATLAB Programa 8-12

```
%***** Respuesta a un escalón unitario ****
num=[6.104  40.6104  4];
den=[1  6.104  41.6104  4];
t=0:0.01:10;
setp(num,den,t)
grid
```

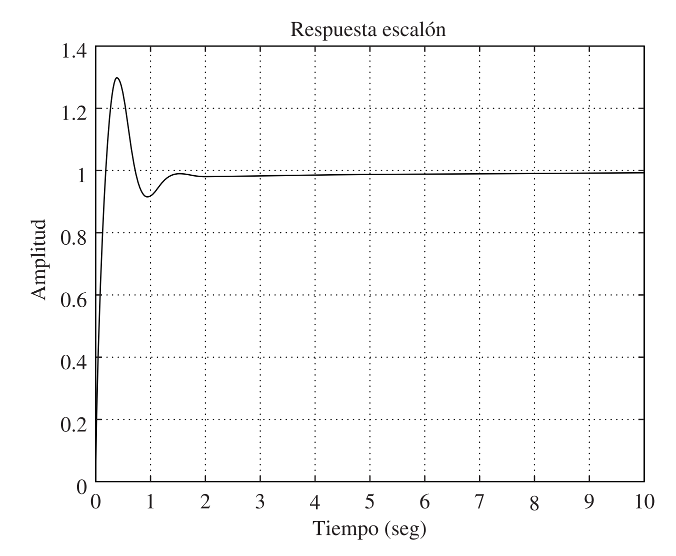


Figura 8-55. Respuesta a un escalón unitario de $C(s)/R(s) = (6.104s^2 + 406104s + 4)/(s^3 + 6.104s^2 + 41.6104s + 4)$.

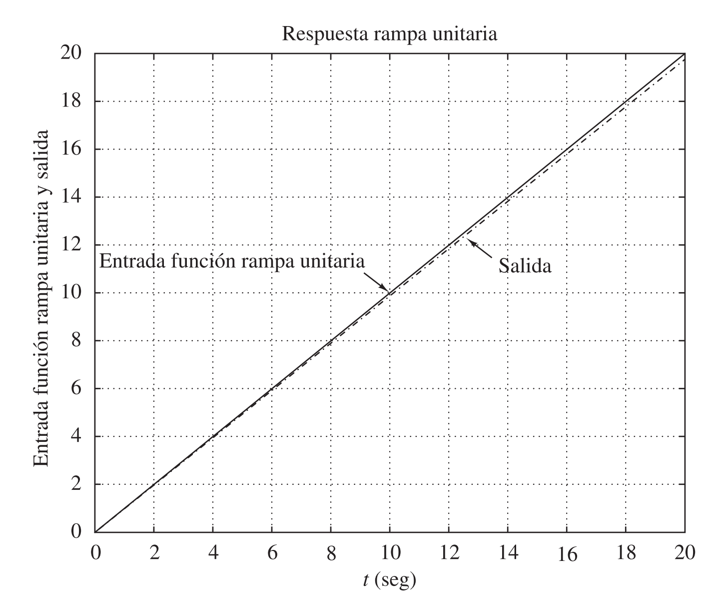


Figura 8-56. Respuesta a una rampa unitaria de $C(s)/R(s) = (6.104s^2 + 406104s + 4)/(s^3 + 6.104s^2 + 41.6104s + 4)$.

El Programa 8-13 de MATLAB genera la respuesta a una rampa unitaria del sistema diseñado. La Figura 8-56 muestra la gráfica resultante.

MATLAB Programa 8-13

```
%***** Respuesta a una rampa unitaria ****
num=[0  0  6.104  40.6104  4];
den=[1  6.104  41.6104  4  0];
t = 0:0.01:20;
c=step(num,den,t);
plot(t,c,'-.',t,t,'-')
title('Respuesta a una rampa unitaria')
xlabel('t (seg)')
ylabel('Entrada rampa unitaria y salida c(t)')
text(3,11.5,'Entrada rampa unitaria')
text(13.8,11.2,'Salida')
```

Diagrama de Nyquist. Anteriormente se comprobó que los tres polos en lazo cerrado del sistema diseñado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s. Por tanto el sistema diseñado es estable. El propósito de dibujar el diagrama de Nyquist aquí no es probar la estabilidad del sistema, sino mejorar la comprensión sobre el análisis de estabilidad de Nyquist. Para un sistema complejo, el diagrama de Nyquist resultará bastante complicado, es decir no es fácil contar el número de rodeos del punto $-1 + j0$.

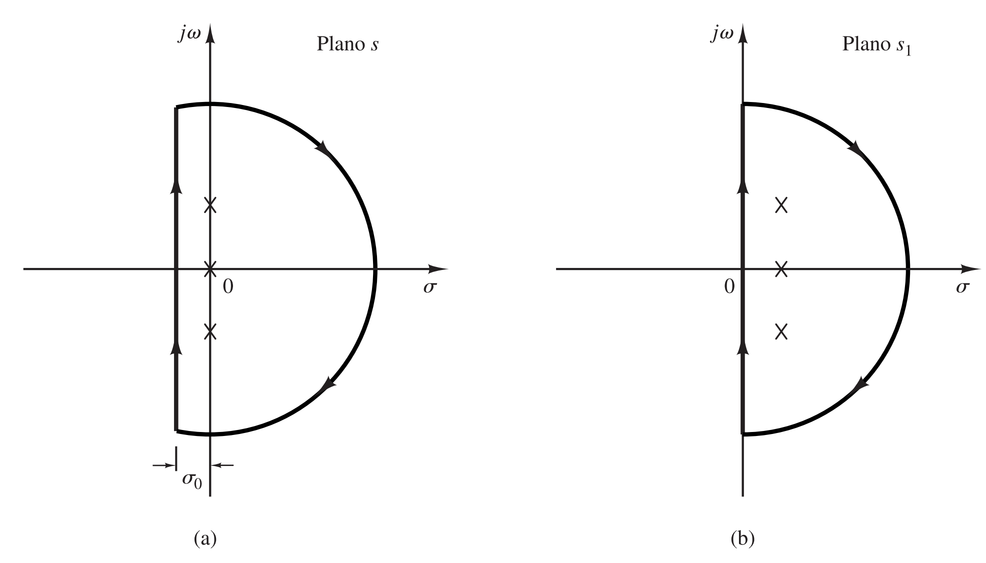


Figura 8-57. (a) Diagrama de Nyquist modificado en el plano s; (b) Diagrama de Nyquist en el plano s_1.

Como se verá a continuación, al contener el sistema diseñado tres polos sobre el eje $j\omega$ en lazo abierto, el diagrama de Nyquist parecerá bastante complicado:

Defina la función de transferencia en lazo abierto como $G(s)$. Entonces

$$G(s) = G_c(s)\,\frac{s + 0.1}{s^2 + 1} = \frac{6.104s^2 + 40.6104s + 4}{s(s^2 + 1)}$$

Escoja un diagrama de Nyquist modificado en el plano s como muestra la Figura 8-57(a). El diagrama modificado encierra los tres polos en lazo abierto ($s = 0$, $s = j1$, $s = -j1$). Ahora defina $s_1 = s + \sigma_0$. Así, La Figura 8-57(b) muestra el diagrama de Nyquist en el plano s_1. En el plano s la función de transferencia en lazo abierto tiene tres polos en el semiplano derecho.

Elija $\sigma_0 = 0.01$. Como $s = s_1 - \sigma_0$, se tiene

$$G(s) = G(s_1 - 0.01)$$

Función de transferencia en lazo abierto en el plano s_1 =

$$= \frac{6.104(s_1^2 - 0.02s_1 + 0.0001) + 40.6104(s_1 - 0.01) + 4}{(s_1 - 0.01)(s_1^2 - 0.02s_1 + 1.0001)}$$

$$= \frac{6.104s_1^2 + 40.48832s_1 + 3.5945064}{s_1^3 - 0.03s_1^2 + 1.0003s_1 + 0.010001}$$

El Programa MATLAB 8-14 genera el diagrama de Nyquist. En la Figura 8-58 se muestra el diagrama de Nyquist resultante.

MATLAB Programa 8-14

```
%***** Diagrama de Nyquist ****

num=[6.104  40.48832  3.5945064];
den=[1  -0.03  1.0003  -0.010001];
nyquist(num,den)
v=[-1500  1500  -2500  2500]; axis(v)
```

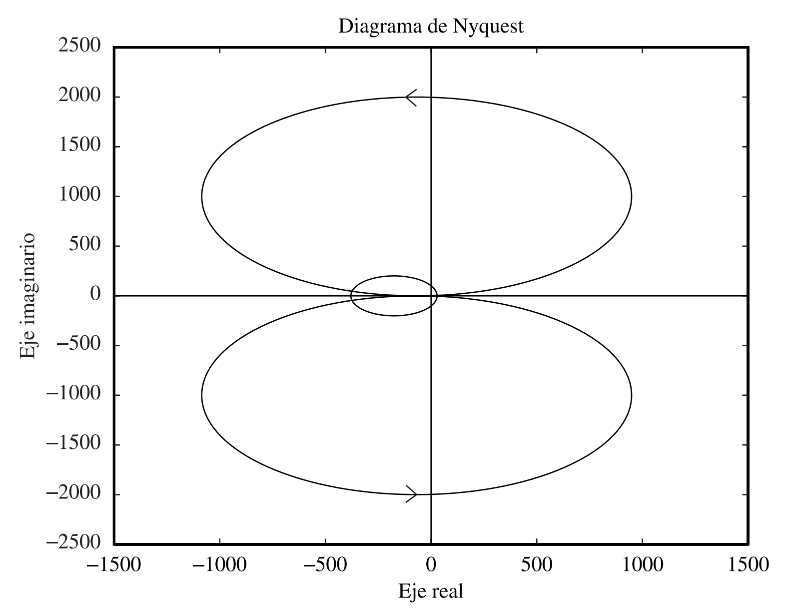


Figura 8-58. Diagrama de Nyquist.

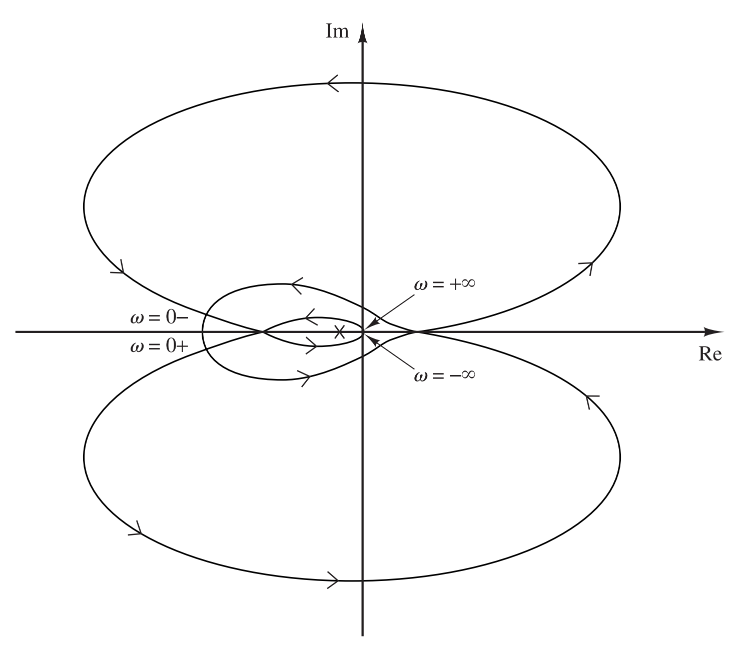


Figura 8-59. Diagrama de Nyquist redibujado.

A partir del diagrama de Nyquist obtenido aquí, no es fácil determinar el número de rodeos del punto $-1 + j0$. Por tanto, se dibuja el diagrama de Nyquist de una forma cualitativa para mostrar los detalles cerca del punto $-1 + j0$. En la Figura 8-59 se muestra este diagrama de Nyquist.

En este diagrama se comprueba que el punto $-1 + j0$ queda rodeado tres veces en sentido contrario al de las agujas del reloj. Por tanto, $N = -3$. Como la función de transferencia en lazo abierto tiene tres polos en el semiplano derecho del plano s_1, se obtiene que $P = 3$. Entonces, como $Z = N + P = 0$ significa que no hay polos del lazo cerrado en el semiplano derecho del plano s_1. Se concluye que el sistema es estable.

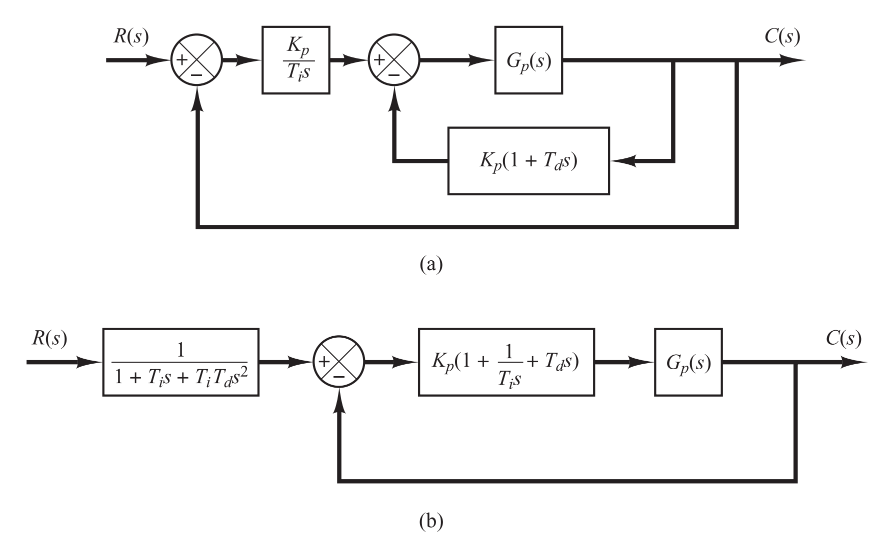


Figura 8-60. (a) Sistema de control I-PD; (b) sistema controlado PID con filtro de entrada.

A-8-8. Demuestre que el sistema con un controlador I-PD que se muestra en la Figura 8-60(a) equivale al sistema con un controlador PID con filtro de entrada que aparece en la Figura 8-60(b).

Solución. La función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ del sistema con un controlador I-PD es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_p}{T_i s} G_p(s)}{1 + K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) G_p(s)}$$

La función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ del sistema con un controlador PID con el filtro de entrada que se muestra en la Figura 8-60(b) es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + T_i s + T_i T_d s^2} \frac{K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) G_p(s)}{1 + K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) G_p(s)} = \frac{\frac{K_p}{T_i s} G_p(s)}{1 + K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) G_p(s)}$$

Las funciones de transferencia en lazo cerrado de ambos sistemas son iguales. Por tanto, los dos sistemas son equivalentes.

A-8-9. La idea básica del control I-PD es evitar las señales de control grandes (que provocan fenómenos de saturación) dentro del sistema. Si se llevan las acciones de control proporcional y derivativa al camino de realimentación, es posible elegir valores más grandes para K_p y T_d que los que son posibles mediante el esquema de control PID.

Compare cualitativamente las respuestas del sistema con un controlador PID y del sistema con un controlador I-PD ante la entrada de perturbación y la entrada de referencia.

Solución. Considere primero la respuesta del sistema con un controlador I-PD ante la entrada de perturbación. Como en el control I-PD de una planta es posible seleccionar valores más grandes para K_p y T_d que en el caso del controlador PID, el sistema con un controlador I-PD atenuará el efecto de la perturbación más rápidamente que el controlador PID.

A continuación, considere la respuesta del sistema con un controlador I-PD ante una entrada de referencia. Como el sistema con el controlador I-PD es equivalente al sistema con el controlador PID con filtro de entrada (véase el Problema **A-8-8**), el sistema con el controlador PID tendrá

respuestas más rápidas que el sistema con el controlador I-PD correspondiente, siempre y cuando en el sistema con el controlador PID no ocurra un fenómeno de saturación.

A-8-10. En algunos casos, es conveniente proporcionar un filtro de entrada como el de la Figura 8-61(a). Observe que el filtro de entrada $G_f(s)$ está fuera del lazo. Por tanto, no afecta a la estabilidad de la parte del sistema en lazo cerrado. Una ventaja del filtro de entrada es que se modifican (se cancelan o se sustituyen por otros) los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado, de manera que su respuesta sea aceptable.

Demuestre que la configuración de la Figura 8-61(a) se puede transformar en la que se muestra en la Figura 8-61(b), donde $G_d(s) = [G_f(s) - 1]G_c(s)$. La estructura de compensación de la Figura 8-61(b) se denomina algunas veces compensación de la entrada de referencia.

Solución. Para el sistema de la Figura 8-61(a), se tiene que

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_f(s) \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \tag{8-15}$$

Para el sistema de la Figura 8-61(b), se tiene que

$$U(s) = G_d(s)R(s) + G_c(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = G_p(s)U(s)$$

Por tanto,

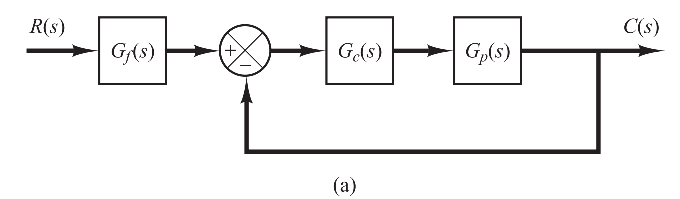
$$C(s) = G_p(s)\{G_d(s)R(s) + G_c(s)[R(s) - C(s)]\}$$

o bien

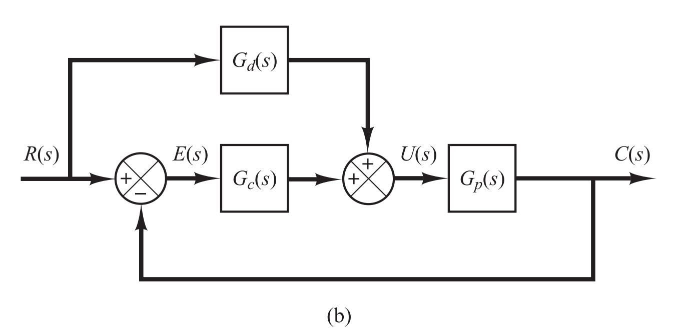
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{[G_d(s) + G_c(s)]G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \tag{8-16}$$

Sustituyendo $G_d(s) = [G_f(s) - 1]G_c(s)$ en la Ecuación (8-16), se obtiene

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{[G_f(s)G_c(s) - G_c(s) + G_c(s)]G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} = G_f(s) \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$



(a)



(b)

Figura 8-61. (a) Diagrama de bloques de sistema de control con filtro de entrada; (b) diagrama de bloques modificado.

que es igual a la Ecuación (8-15). Por tanto, se ha demostrado que los sistemas de las Figuras 8-61(a) y (b) son equivalentes.

Observe que el sistema de la Figura 8-61(b) tiene un camino de adelanto (feedforward) $G_d(s)$. En tal caso, $G_d(s)$ no afecta a la estabilidad de la parte del sistema en lazo cerrado.

A-8-11. Un sistema en lazo cerrado tiene la característica de que la función de transferencia en lazo cerrado es casi igual a la inversa de la función de transferencia de realimentación cada vez que la ganancia en lazo abierto es mucho mayor que la unidad.

La característica en lazo abierto se puede modificar agregando un lazo de realimentación interno con una característica igual a la inversa de la característica deseada en lazo abierto. Suponga que un sistema de realimentación unitaria tiene la función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Determine la función de transferencia $H(s)$ del elemento en el lazo de realimentación interno tal que el lazo interior ya no sea efectivo en frecuencias bajas y altas.

Solución. La Figura 8-62(a) muestra el sistema original. La Figura 8-62(b) contiene la adición del lazo de realimentación interna alrededor de $G(s)$. Como

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{H(s)} \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

si la ganancia alrededor del lazo interno es grande en comparación con la unidad, entonces $G(s)H(s)/[1 + G(s)H(s)]$ es aproximadamente igual a la unidad y la función de transferencia $C(s)/E(s)$ es aproximadamente igual a $1/H(s)$.

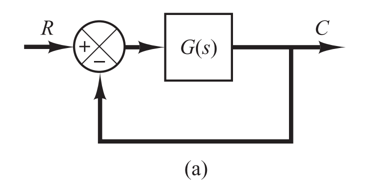
Por otra parte, si la ganancia $|G(s)H(s)|$ es mucho menor que la unidad, el lazo interior pierde su efectividad y $C(s)/E(s)$ se vuelve aproximadamente igual a $G(s)$.

Para que el lazo interior pierda su efectividad en rangos de frecuencias bajas y altas, se requiere que

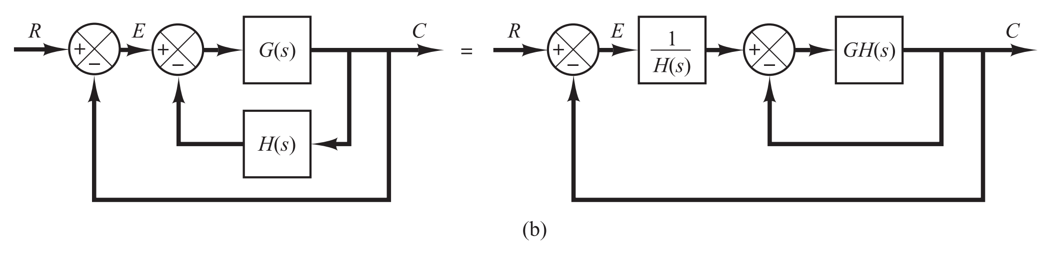
$$|G(j\omega)H(j\omega)| \ll 1, \qquad \text{para } \omega \ll 1 \text{ y } \omega \gg 1$$

Como en este problema

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$



(a)



(b)

Figura 8-62. (a) Sistema de control; (b) adición del lazo de realimentación para modificar la característica en lazo cerrado.

el requisito se satisface si $H(s)$ se selecciona como

$$H(s) = ks$$

porque

$$\lim_{\omega\to 0} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega\to 0} \frac{Kkj\omega}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} = 0$$

$$\lim_{\omega\to \infty} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega\to \infty} \frac{Kkj\omega}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} = 0$$

Así, con $H(s) = ks$ (realimentación de velocidad), el lazo interior pierde su efectividad en las regiones de frecuencias bajas y altas. Se vuelve efectivo sólo en la región de frecuencias medias.

A-8-12. Sea el sistema de control que se muestra en la Figura 8-63. Es el mismo sistema que se consideró en el Ejemplo 8-1. En ese ejemplo se diseñó un controlador PID $G_c(s)$, comenzando con el segundo método de la regla de sintonía de Ziegler-Nichols. Aquí se diseña un controlador PID utilizando el método computacional con MATLAB. Se determinarán los valores de K y a del controlador PID:

$$G_c(s) = K\frac{(s + a)^2}{s}$$

tal que la respuesta del escalón unitario muestra la sobreelongación máxima entre el 10% y el 2% ($1.02 \leqslant$ máxima salida $= 1.10$) y el tiempo de asentamiento será menor que 3 seg. La región de búsqueda es

$$2 \leqslant K \leqslant 50, \qquad 0.05 \leqslant a \leqslant 2$$

Se selecciona el incremento del paso para K como 1 y para a de 0.05.

Escriba un programa en MATLAB para encontrar el primer conjunto de variables K y a que satisfagan las especificaciones dadas. También escriba un programa en MATLAB para encontrar todos los posibles conjuntos de variables K y a que cumplen las especificaciones impuestas. Represente las curvas de respuesta a un escalón unitario del sistema diseñado con los conjuntos seleccionados de variables K y a.

Solución. La función de transferencia de la planta es

$$G_p(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 5s}$$

La función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ viene dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ks^2 + 2Kas + Ka^2}{s^4 + 6s^3 + (5 + K)s^2 + 2Kas + Ka^2}$$

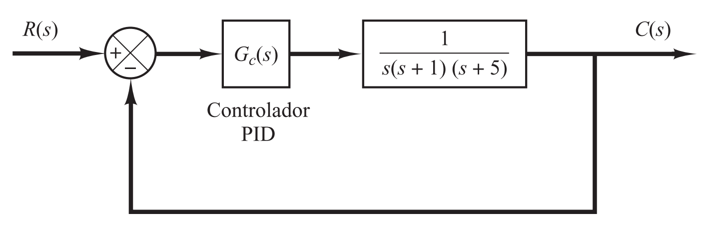


Figura 8-63. Sistema de control.

Un posible programa en MATLAB que producirá el primer conjunto de variables K y a que satisface las especificaciones dadas se da en el Programa 8-15 de MATLAB. En este programa se emplean dos bucles 'for'. La especificación para el tiempo de asentamiento se interpreta por las siguientes cuatro líneas:

```
 s = 501; while y(s) > 0.98 and y(s) < 1.02;
 s = s - 1; end;
ts = (s - 1) * 0.01
ts < 3.0
```

Observe que para t = 0:0.01:5, se tienen 501 puntos de cálculo. $s = 501$ corresponde al último punto de tiempo de cálculo.

La solución obtenida por este programa es

$$K = 32, \qquad a = 0.2$$

con la sobreelongación máxima igual a 9.69% y el tiempo de asentamiento igual a 2.64 seg. La Figura 8-64 muestra la curva de respuesta a un escalón unitario.

MATLAB Programa 8-15

```
t=0:0.01:5;
for K=50:-1:2;
   for a=2:-0.05:0.05;
      num=[K  2*K*a  K*a^2];
      den=[1  6  5+K  2*K*a  K*a^2];
        y=step(num,den,t);
        m=max(y);
        s=501; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02;
        s=s-1; end;
        ts=(s-1)*0.01;
      if m < 1.10 & m > 1.02 & ts < 3.0
      break;
      end
      end
   if m < 1.10 & m > 1.02 & ts < 3.0
   break
   end
   end
plot(t,y)
grid
title('Respuesta a un escalón unitario')
xlabel('t seg')
ylabel('Salida')
solution=[K;a;m;ts]

solution=

32.0000
 0.2000
 1.0969
 2.6400
```

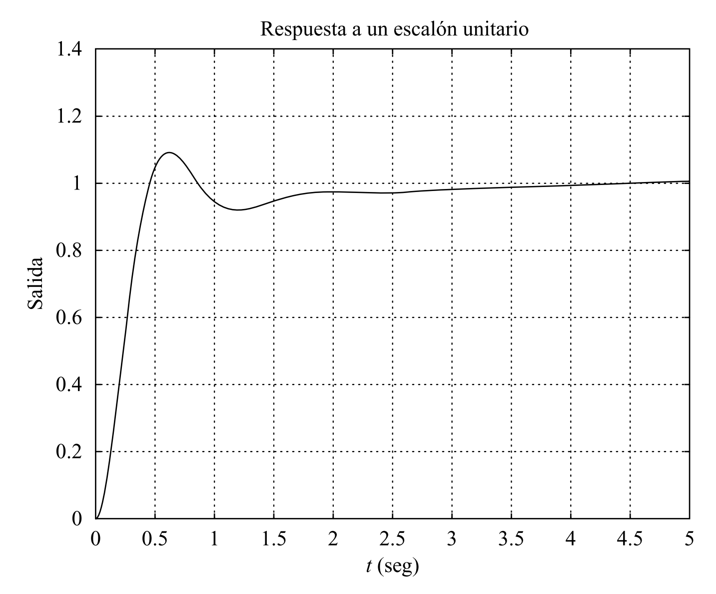


Figura 8-64. Curva de respuesta a un escalón unitario.

A continuación se considera el caso en que se necesita encontrar todos los conjuntos de variables que satisfacen las especificaciones dadas. Un posible programa en MATLAB que cumple este objetivo se da en el Programa 8-16 de MATLAB. Observe que en la tabla que se muestra en el programa, se debería ignorar la última fila `(k,:)` o la primera fila de `sorttable`. (Estos son los últimos valores de búsqueda de K y a.)

MATLAB Programa 8-16

```
t=0:0.01:5;
k=0;
for i=1:49;
   K(i)=51-i*1;
   for j=1:40;
      a(j)=2.05-j*0.05;
      num=[K(i)  2*K(i)*a(j)  K(i)*a(j)*a(j)];
      den=[1  6  5+K(i)  2*K(i)*a(j)  K(i)*a(j)*a(j)];
        y=step(num,den,t);
        m=max(y);
        s=501; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02;
        s=s-1; end;
        ts=(s-1)*0.01;
      if m < 1.10 & m > 1.02 & ts < 3.0
      k=k+1;
      table(k,:)=[K(i)  a(j)  m  ts];
      end
   end
  end
table(k,:)=[K(i)  a(j)  m  ts]

table=
```

(continúa)

```
   32.0000  0.2000  1.0969  2.6400
   31.0000  0.2000  1.0890  2.6900
   30.0000  0.2000  1.0809  2.7300
   29.0000  0.2500  1.0952  1.7800
   29.0000  0.2000  1.0726  2.7800
   28.0000  0.2000  1.0639  2.8300
   27.0000  0.2000  1.0550  2.8900
    2.0000  0.0500  0.3781  5.0000

sorttable=sortrows(table,3)

sorttable=

    2.0000  0.0500  0.3781  5.0000
   27.0000  0.2000  1.0550  2.8900
   28.0000  0.2000  1.0639  2.8300
   29.0000  0.2000  1.0726  2.7800
   30.0000  0.2000  1.0809  2.7300
   31.0000  0.2000  1.0890  2.6900
   29.0000  0.2500  1.0952  1.7800
   32.0000  0.2000  1.0969  2.6400

K=sorttable(7,1)

K=

   29

a=sorttable(7,2)

a=

   0.2500

num=[K  2*K*a  K*a^2];
den=[1  6  5+K  2*K*a  K*a^2];
y=step(num,den,t);
plot(t,y)
grid
hold
Current plot held
K = sorttable(2,1)

K=

   27

a=sorttable(2,2)

a=

   0.2000
```

(continúa)

```
num=[K  2*K*a  K*a^2];
den=[1  6  5+K  2*K*a  K*a^2];
y=step(num,den,t);
plot(t,y)
title('Curvas de respuesta a un escalón unitario')
xlabel('t (sec)')
ylabel('Output')
text(1.22,1.22,'K = 29, a=0.25')
text(1.22,0.72,'K = 27, a=0.2')
```

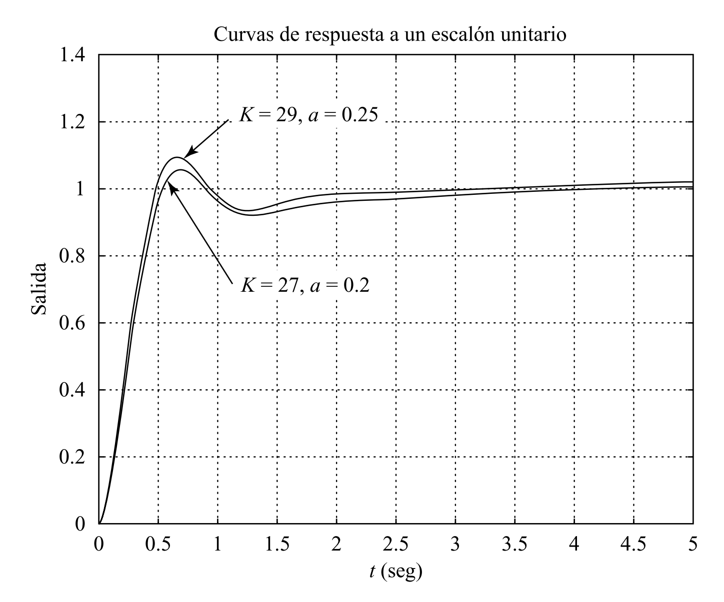


Figura 8-65. Curvas de respuesta a un escalón unitario.

De la tabla ordenada, parece que

$K = 29$, $a = 0.25$ (máx. sobreelongación = 9.52%, tiempo de asentamiento = 1.78 seg)

y

$K = 27$, $a = 0.2$ (máx. sobreelongación = 5.5%, tiempo de asentamiento = 2.89 seg)

son dos de las mejores elecciones. En la Figura 8-65 se muestran las curvas de respuesta a un escalón unitario para estos dos casos. De estas curvas se podría concluir que la mejor elección depende del objetivo del sistema. Si se desea una sobreelongación máxima pequeña, $K = 27$, $a = 0.2$ será la mejor elección. Si el tiempo de asentamiento más pequeño es más importante que una sobreelongación máxima menor, entonces $K = 29$, $a = 0.25$ será la mejor opción.

A-8-13. Sea el sistema de control con dos grados de libertad que se muestra en la Figura 8-66. La planta $G_p(s)$ está dada por

$$G_p(s) = \frac{100}{s(s+1)}$$

Suponiendo que la entrada de ruido $N(s)$ es cero, diseñar los controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ de forma que el sistema diseñado satisfaga lo siguiente:

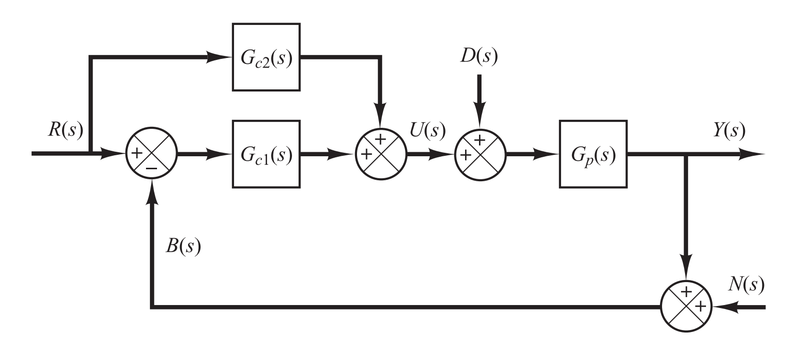


Figura 8-66. Sistema de control con dos grados de libertad.

1. La respuesta a la entrada de perturbación en escalón tiene una amplitud pequeña y va a cero rápidamente (del orden de 1 seg a 2 seg).
2. La respuesta a la entrada de referencia en escalón unitario tiene una sobreelongación máxima del 25% o menor y el tiempo de asentamiento es de 1 seg o menor.
3. Los errores en estado estacionario para el seguimiento de entradas de referencia en forma de rampa y de aceleración son cero.

Solución. La función de transferencia en lazo cerrado para las entradas de perturbación y de referencia están dadas, respectivamente, por

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_{c1}(s)G_p(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]G_p(s)}{1 + G_{c1}(s)G_p(s)}$$

Suponga que $G_{c1}(s)$ es un controlador PID y tiene la forma siguiente:

$$G_{c1}(s) = \frac{K(s + a)^2}{s}$$

La ecuación característica para el sistema es

$$1 + G_{c1}(s)G_p(s) = 1 + \frac{K(s + a)^2}{s} \frac{100}{s(s + 1)}$$

Observe que los polos en lazo abierto están localizados en $s = 0$ (un polo doble) y $s = -1$. Los ceros se localizan en $s = -a$ (un cero doble).

En lo que sigue se utilizará el método del lugar de las raíces para determinar los valores de a y K. Se seleccionan los polos en lazo cerrado dominantes en $s = -5 \pm j5$. Entonces la deficiencia de ángulo en el polo en lazo cerrado deseado en $s = -5 \pm j5$ es

$$-135^{\circ} - 135^{\circ} - 128.66^{\circ} + 180^{\circ} = -218.66^{\circ}$$

El cero doble en $s = -a$ debe contribuir con 218.66°. (Cada cero debe contribuir con 109.33°.) Mediante un simple cálculo se encuentra que

$$a = -3.2460$$

El controlador $G_{c1}(s)$ se determina entonces como

$$G_{c1}(s) = \frac{K(s + 3.2460)^2}{s}$$

La constante K se debe determinar utilizando la condición de magnitud. Esta condición es

$$|G_{c1}(s)G_p(s)|_{s=-5+j5} = 1$$

Como

$$G_{c1}(s)G_p(s) = \frac{K(s + 3.2460)^2}{s} \frac{100}{s(s + 1)}$$

se obtiene

$$K = \left| \frac{s^2(s + 1)}{100(s + 3.2460)^2} \right|_{s=-5+j5}$$

$$= 0.11403$$

El controlador $G_{c1}(s)$ es

$$G_{c1}(s) = \frac{0.11403(s + 3.2460)^2}{s}$$

$$= \frac{0.11403s^2 + 0.7403s + 1.20148}{s}$$

$$= 0.7403 + \frac{1.20148}{s} + 0.11403s \qquad (8\text{-}17)$$

Entonces, la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/D(s)$ se obtiene como sigue:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_{c1}(s)G_p(s)}$$

$$= \frac{\dfrac{100}{s(s + 1)}}{1 + \dfrac{0.11403(s + 3.2460)^2}{s} \dfrac{100}{s(s + 1)}}$$

$$= \frac{100s}{s^3 + 12.403s^2 + 74.0284s + 120.148}$$

En la Figura 8-67 se muestra la curva de respuesta cuando $D(s)$ es un escalón unitario.

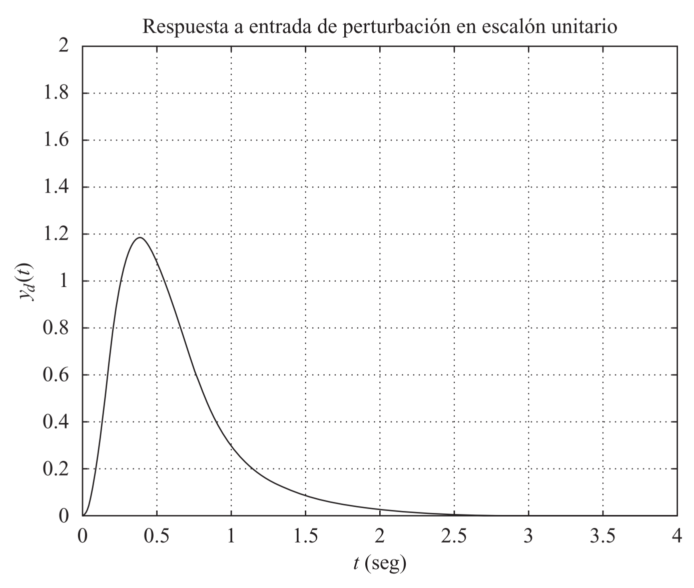


Figura 8-67. Respuesta a una entrada de perturbación en escalón unitario.

A continuación se consideran las respuestas a entradas de referencia. La función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)]G_p(s)}{1 + G_{c1}(s)G_p(s)}$$

Si se define

$$G_{c1}(s) + G_{c2}(s) = G_c(s)$$

entonces

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_{c1}(s)G_p(s)} = \frac{100sG_c(s)}{s^3 + 12.403s^2 + 74.0284s + 120.148}$$

Para satisfacer el requisito sobre las respuestas a las entradas de referencia en rampa y aceleración, se utiliza el método de asignación de ceros. Esto es, se selecciona el numerador de $Y(s)/R(s)$ como la suma de los tres últimos términos del denominador, o bien

$$100sG_c(s) = 12.403s^2 + 74.028s + 120.148$$

de donde se obtiene

$$G_c(s) = \frac{0.12403s^2 + 0.74028s + 1.20148}{s} = 0.7403 + \frac{1.20148}{s} + 0.12403s \qquad (8\text{-}18)$$

Por tanto, la función de transferencia en lazo cerrado $Y(s)/R(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{12.403s^2 + 74.028s + 120.148}{s^3 + 12.403s^2 + 74.028s + 120.148}$$

En las Figuras 8-68(a), (b) y (c) se muestran las curvas de respuesta a entradas de referencia en escalón, rampa y aceleración unitaria, respectivamente. La máxima sobreelongación en la

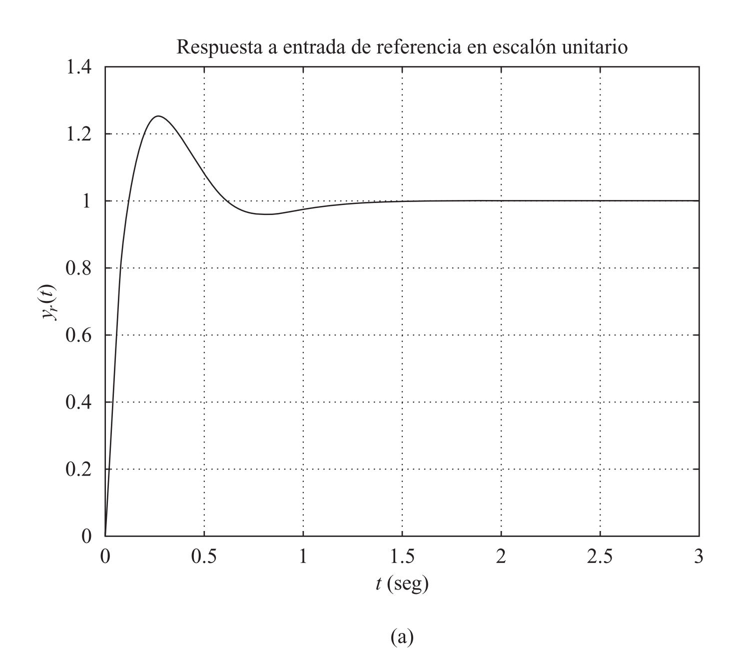
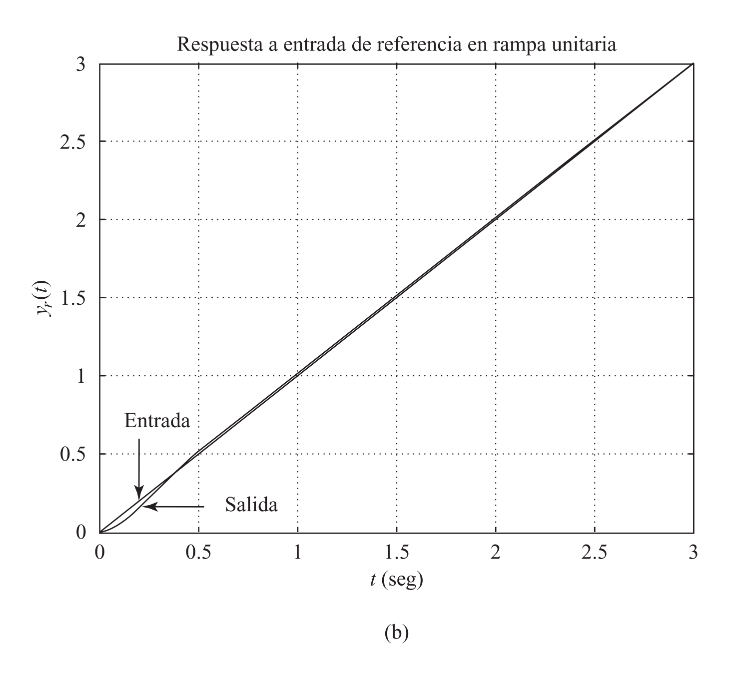
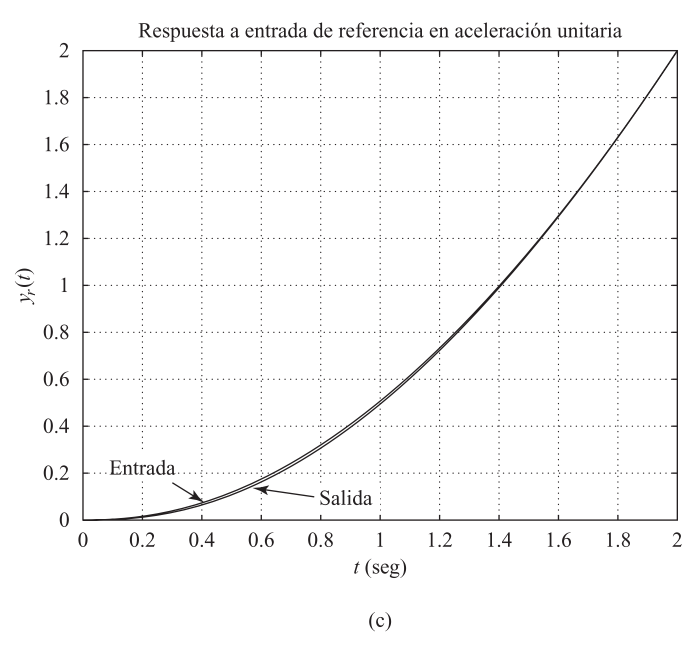


Figura 8-68. (a) Respuesta a una entrada de referencia en escalón unitario; (b) respuesta a una entrada de referencia en rampa unitaria; (c) respuesta a una entrada de referencia en aceleración unitaria.



(b)



(c)

Figura 8-68. *(continuación).*

respuesta a un escalón unitario es aproximadamente del 25% y el tiempo de asentamiento es de 1.2 seg. Los errores en estado estacionario en la respuesta a una entrada en rampa y en aceleración son ceros. Por tanto, el controlador diseñado $G_c(s)$ dado por la Ecuación (8-18) es satisfactorio.

Finalmente, se determina $G_{c2}(s)$. Si se observa que

$$G_{c2}(s) = G_c(s) - G_{c1}(s)$$

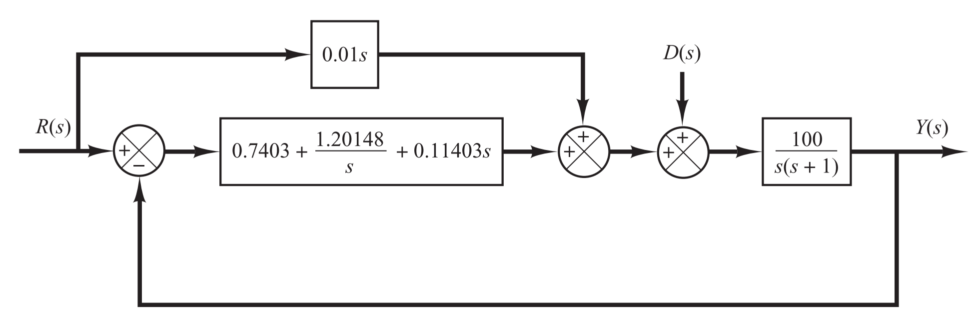


Figura 8-69. Diagrama de bloque del sistema diseñado.

y de la Ecuación (8-17)

$$G_{c1}(s) = 0.7403 + \frac{1.20148}{s} + 0.11403s$$

se obtiene

$$G_{c2}(s) = \left(0.7403 + \frac{1.20148}{s} + 0.12403s\right) - \left(0.7403 + \frac{1.20148}{s} + 0.11403s\right) = 0.01s \quad (8\text{-}19)$$

Las Ecuaciones (8-17) y (8-19) dan las funciones de transferencia de los controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$, respectivamente. En la Figura 8-69 se muestra el diagrama de bloques del sistema diseñado.

Observe que si la sobreelongación máxima fuese mucho mayor que el 25% y/o el tiempo de asentamiento mucho mayor que 1.2 seg, entonces se podría suponer una región de búsqueda (tal como $3 \leqslant a \leqslant 6$, $3 \leqslant b \leqslant 6$ y $6 \leqslant c \leqslant 12$) y emplear el método computacional presentado en el Ejemplo 8-4 para encontrar un conjunto o conjuntos de variables que darían la respuesta deseada a la entrada de referencia en escalón unitario.

PROBLEMAS

B-8-1. Sea el controlador PID electrónico que se muestra en la Figura 8-70. Determine los valores de R_1 R_2, R_3, R_4, C_1 y C_2 del controlador, de modo que la función de transferencia $G_c(s) = E_o(s)/E_i(s)$ es

$$G_c(s) = 39.42\left(1 + \frac{1}{3.077s} + 0.7692s\right)$$

$$= 30.3215\,\frac{(s + 0.65)^2}{s}$$

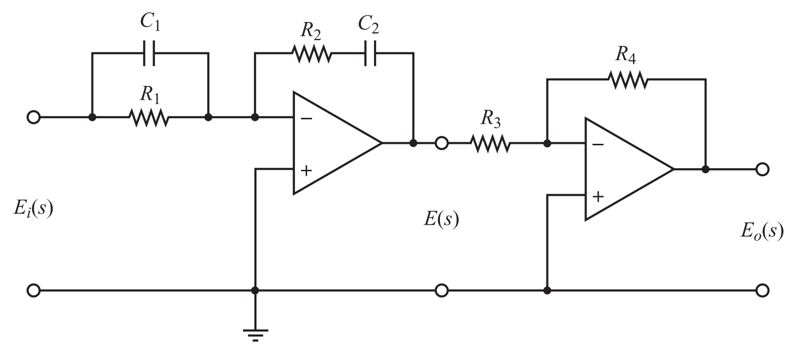


Figura 8-70. Controlador PID electrónico.

B-8-2. Sea el sistema que se muestra en la Figura 8-71. Suponga que se introducen en el sistema las perturbaciones $D(s)$, como se observa en el diagrama. Determine los parámetros K, a y b, tales que la respuesta para la entrada de perturbación escalón unitario y la respuesta para la entrada de referencia escalón unitario satisfagan las especificaciones siguientes: la respuesta para la entrada de perturbación escalón debería atenuarse rápidamente con ningún error en estado estacionario, y la respuesta ante la entrada de referencia escalón debería mostrar una sobreelongación máxima del 20% o menos y un tiempo de asentamiento de 2 seg.

B-8-3. Demuestre que el sistema con un control PID que se muestra en la Figura 8-72(a) es equivalente al sistema con un control I-PD y con un control de anticipación (feedforward) de la Figura 8-72(b).

B-8-4. Sean los sistemas que se muestran en las Figuras 8-73(a) y (b). El primero es el sistema diseñado en el Ejemplo 8-1. La respuesta a la entrada de referencia escalón unitario en ausencia de la entrada de perturbación se da en la Figura 8-10. El sistema de la Figura 8-73(b) es el sistema con un controlador I-PD que usa los mismos K_p, T_i y T_d que el sistema de la Figura 8-73(a).

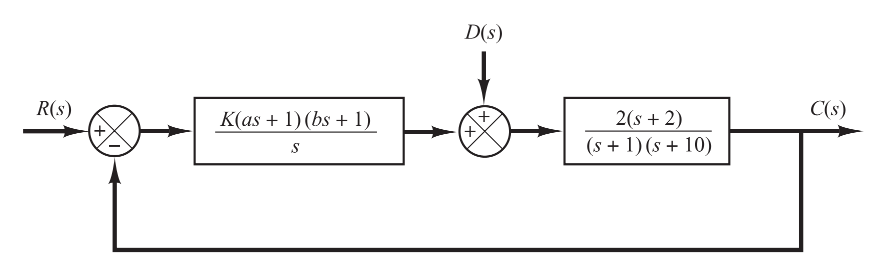
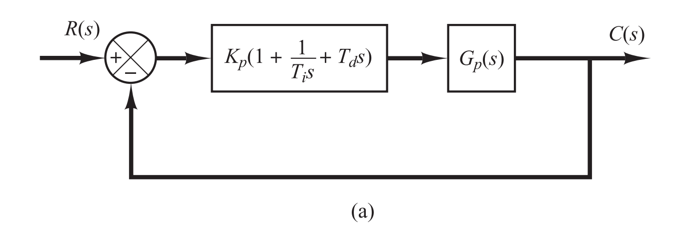
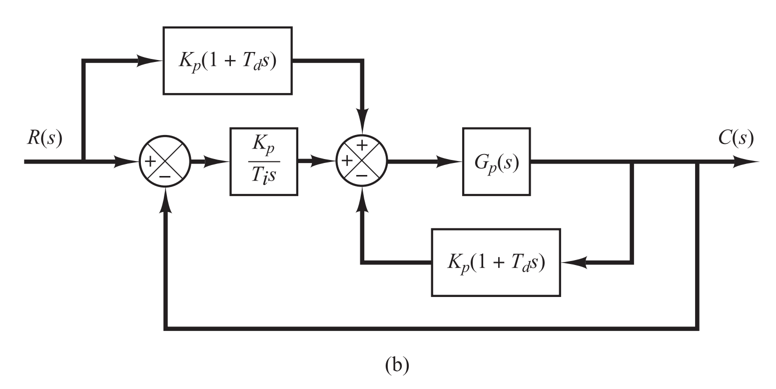


Figura 8-71. Sistema de control.



(a)



(b)

Figura 8-72. (a) Sistema de control PID; (b) sistema de control I-PD con control en anticipación.

Obtenga con MATLAB la respuesta de un controlador I-PD para la entrada de referencia escalón unitario. Compare las curvas de respuesta escalón unitario de los dos sistemas.

B-8-5. Tomando en cuenta el Problema **B-8-4,** obtenga la respuesta del sistema con un controlador PID que se muestra en la Figura 8-73(a) para la entrada de perturbación escalón unitario.

Demuestre que para la entrada de perturbación, las respuestas del sistema con un controlador PID que se muestra en la Figura 8-73(a) y el sistema con un controlador I-PD de la Figura 8-73(b) son exactamente iguales. [Cuando considere la respuesta ante la entrada de perturbación $D(s)$, suponga que la entrada de referencia $R(s)$ es cero, y viceversa.] También compare la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ de ambos sistemas.

B-8-6. Sea el sistema que se muestra en la Figura 8-74. Este sistema está sujeto a tres señales de entrada: la entrada de referencia, la entrada de perturbación y la entrada de ruido. Demuestre que la ecuación característica de este sistema es la misma, sin considerar qué señal de entrada se elige.

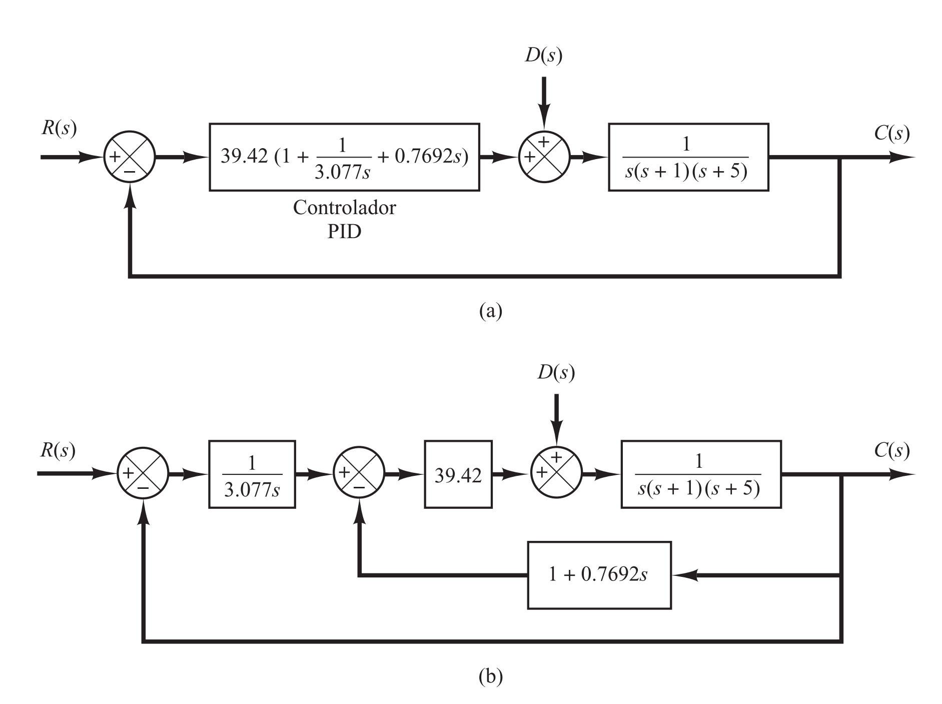


Figura 8-73. (a) Sistema de control PID; (b) sistema de control I-PD.

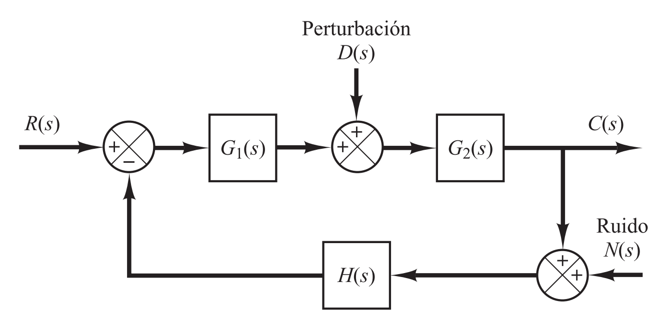


Figura 8-74. Sistema de control.

B-8-7. Sea el sistema que se muestra en la Figura 8-75. Obtenga la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/R(s)$ para la entrada de referencia y la función de transferencia en lazo cerrado $C(s)/D(s)$ ante la entrada de perturbación. Cuando considere $R(s)$ como la entrada suponga que $D(s)$ es cero, y viceversa.

B-8-8. Sea el sistema que se muestra en la Figura 8-76(a), donde K es una ganancia ajustable y $G(s)$ y $H(s)$ son componentes fijos. La función de transferencia en lazo cerrado para la perturbación es

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + KG(s)H(s)}$$

Para minimizar el efecto de las perturbaciones, la ganancia ajustable K debe elegirse lo más grande posible.

¿Es esto cierto también para el sistema de la Figura 8-76(b)?

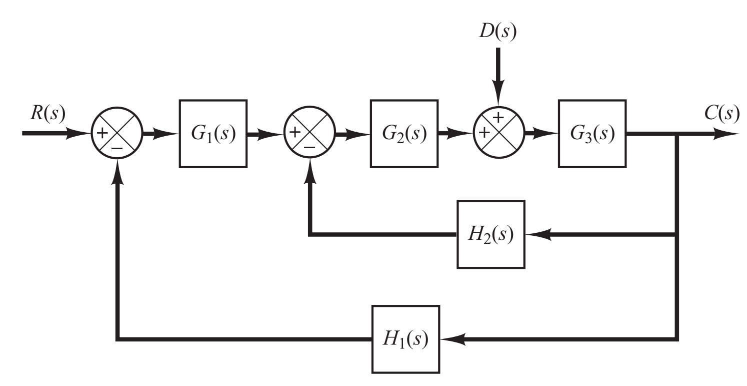


Figura 8-75. Sistema de control.

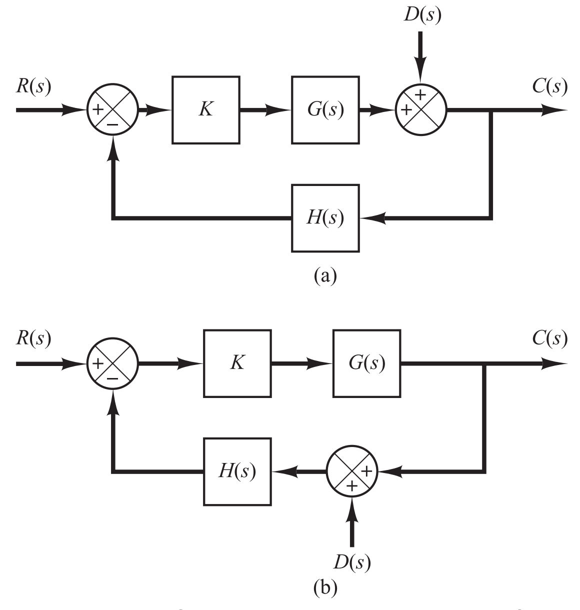


Figura 8-76. (a) Sistema de control con perturbación entrando en el camino directo; (b) sistema de control con perturbación entrando en el camino de realimentación.

B-8-9. Demuestre que los sistemas de control que se muestran en las Figuras 8-77(a), (b) y (c) tienen dos grados de libertad. En los diagramas, G_{c1} y G_{c2} son controladores y G_p es la planta.

B-8-10. Demuestre que el sistema de control que se muestra en la Figura 8-78 es un sistema con tres grados de libertad. Las funciones de transferencia G_{c1}, G_{c2} y G_{c3} son controladores. La planta está formada por las funciones de transferencia G_1 y G_2.

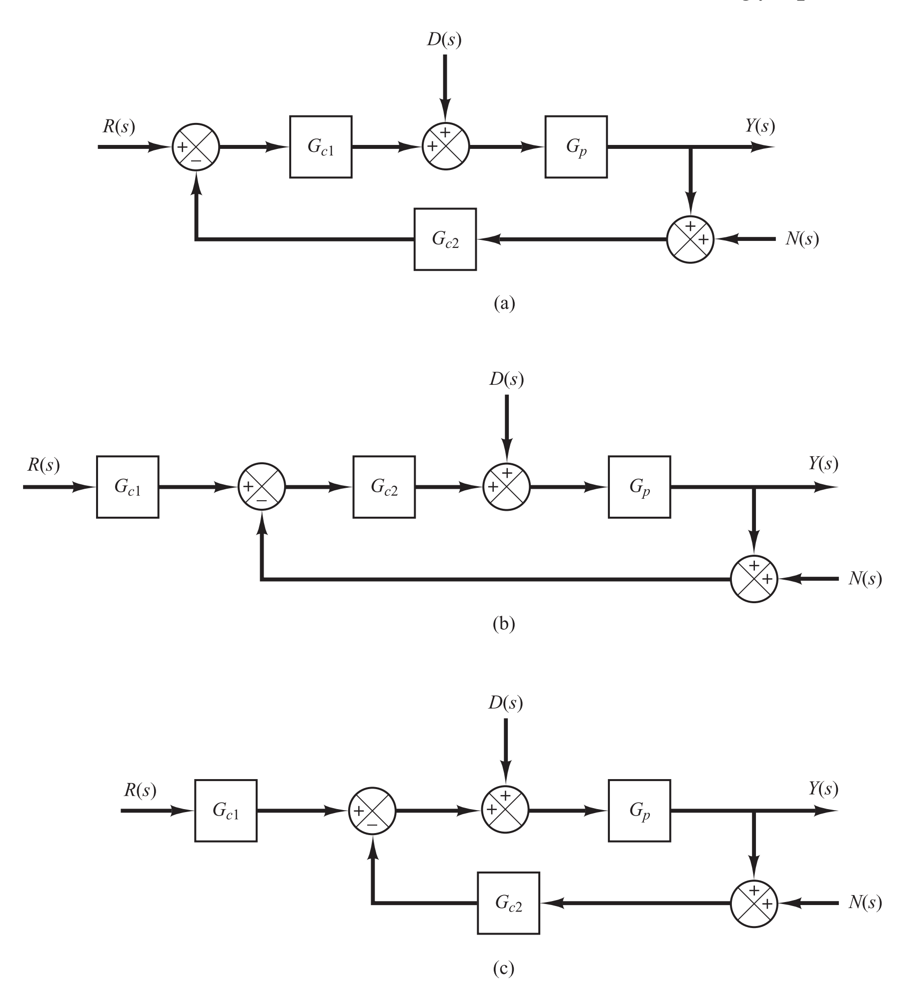


Figura 8-77. (a), (b), (c) Sistemas con dos grados de libertad.

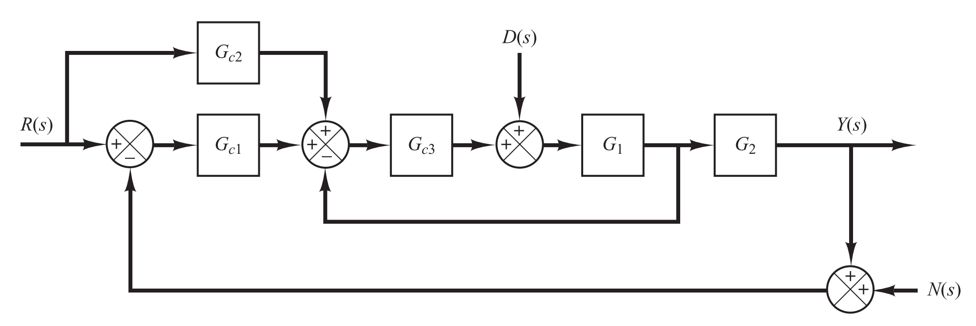


Figura 8-78. Sistema con tres grados de libertad.

B-8-11. Sea el sistema de control que se muestra en la Figura 8-79. Suponga que el controlador PID está dado por

$$G_c(s) = K\frac{(s+a)^2}{s}$$

Se desea que la respuesta a un escalón unitario del sistema muestre la sobreelongación máxima de menos del 10%, pero más del 2% (para evitar un sistema casi subamortiguado), y el tiempo de asentamiento sea menor que 2 seg.

Utilizando el método computacional presentado en la Sección 8-4, escriba un programa en MATLAB para determinar los valores de K y a que cumplirán las especificaciones dadas. Seleccione la región de búsqueda como

$$1 \leqslant K \leqslant 4, \qquad 0.4 \leqslant a \leqslant 4$$

Escoja como incremento de paso para K y a como 0.05. Escriba el programa de forma que los bucles anidados comiencen con los valores más grandes de K y a, continuando hacia los más pequeños.

Utilizando la primera solución encontrada, represente la curva de respuesta a un escalón unitario.

B-8-12. Sea el mismo sistema de control que se trató en el Problema **B-8-11** (Figura 8-79). El controlador PID está dado por

$$G_c(s) = K\frac{(s+a)^2}{s}$$

Se desea determinar los valores de K y a de forma que la respuesta a un escalón unitario presente una sobreelongación máxima de menos del 8%, pero más del 3%, y el tiempo de asentamiento sea menor que 2 seg. Seleccione la región de búsqueda como

$$2 \leqslant K \leqslant 4, \qquad 0.5 \leqslant a \leqslant 3$$

Escoja el incremento de paso para K y a como 0.05.

En primer lugar, escriba un programa en MATLAB tal que los lazos anidados en el programa comienzan con los valores máximos de K y a y se continúa decrementando dichos valores. El cálculo se para cuando por primera vez se encuentra un conjunto satisfactorio de K y a.

A continuación, escriba un programa en MATLAB que determine todos los conjuntos posibles de K y a que cumplan las especificaciones dadas.

Entre los conjuntos múltiples de K y a que satisfacen las especificaciones dadas, determine la mejor opción. Entonces, represente las curvas de respuesta del sistema con la mejor elección de K y a.

B-8-13. Sea el sistema de control con dos grados de libertad que se muestra en la Figura 8-80. La planta $G_p(s)$ está dada por

$$G_p(s) = \frac{3(s+5)}{s(s+1)(s^2+4s+13)}$$

Diseñe controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ tales que la respuesta a la entrada de perturbación escalón unitario debería tener una amplitud pequeña y tender rápidamente a cero (en aproximadamente 2 seg). La respuesta a la entrada de referencia escalón unitario debería ser tal que la sobreelongación máxima es del 25% (o menos) y el tiempo de asentamiento es 2 seg. También, los errores en estado estacionario en la respuesta a las entradas de referencia en rampa y aceleración deberían ser cero.

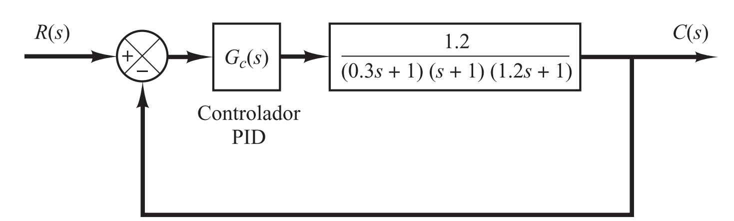


Figura 8-79. Sistema de control.

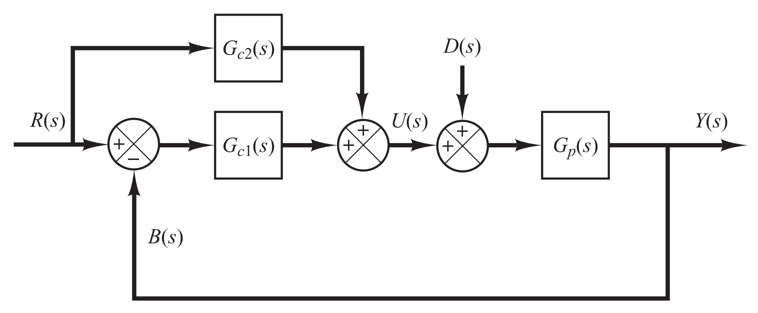


Figura 8-80. Sistema de control con dos grados de libertad.

B-8-14. Sea el sistema que se muestra en la Figura 8-81. La planta $G_p(s)$ está dada por

$$G_p(s) = \frac{2(s+1)}{s(s+3)(s+5)}$$

Determine los controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ tales que para la entrada de perturbación en escalón, la respuesta muestra una pequeña amplitud y tiende a cero rápidamente (del orden de 1 a 2 seg). Para la respuesta a la entrada de referencia en escalón unitario, se desea que la sobreelongación máxima sea del 20% o menos y el tiempo de asentamiento de 1 seg o menos. Para las entradas de referencia en rampa y aceleración, los errores en estado estacionario deberían ser cero.

B-8-15. Sea el sistema de control con dos grados de libertad que se muestra en la Figura 8-82. Diseñe controladores $G_{c1}(s)$ y $G_{c2}(s)$ tales que la respuesta a la entrada de perturbación en escalón muestra una pequeña amplitud y tiende a cero rápidamente (del orden de 1 a 2 seg) y la respuesta a la entrada de referencia en escalón presenta un 25% o menos de sobreelongación máxima y un tiempo de asentamiento de menos de 1 seg. El error en estado estacionario en el seguimiento a entradas de referencia en rampa y aceleración debería ser cero.

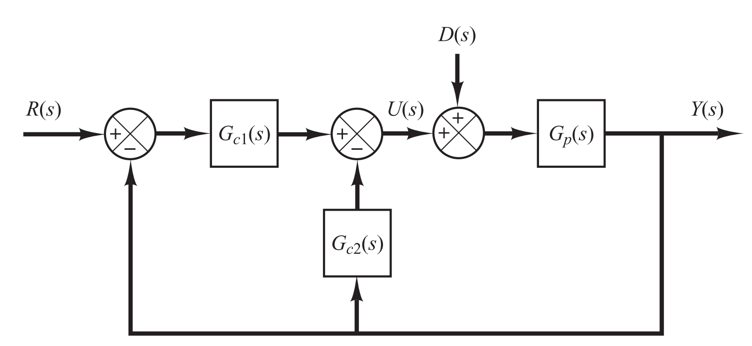


Figura 8-81. Sistema de control con dos grados de libertad.

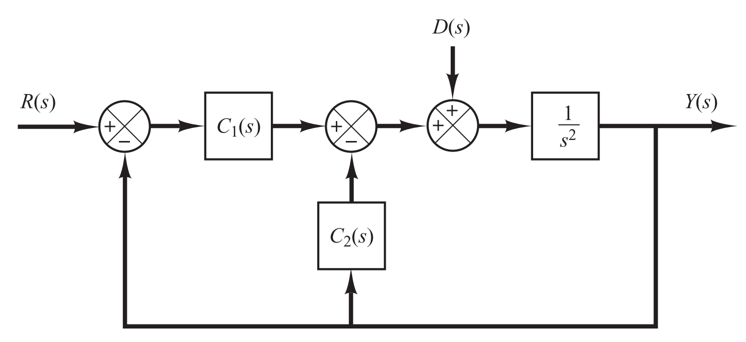


Figura 8-82. Sistema de control con dos grados de libertad.



Análisis de sistemas de control en el espacio de estados

9-1 Introducción[1]

Un sistema moderno complejo posee muchas entradas y muchas salidas que se relacionan entre sí de una forma complicada. Para analizar un sistema de este tipo, es esencial reducir la complejidad de las expresiones matemáticas, además de recurrir a computadoras que realicen una gran parte de los tediosos cálculos que son necesarios. El enfoque en el espacio de estados para el análisis de sistemas es el más conveniente desde este punto de vista.

Mientras la teoría de control convencional se basa en la relación entrada-salida, o función de transferencia, la teoría de control moderna se basa en la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de n ecuaciones diferenciales de primer orden, que se combinan en una ecuación diferencial vectorial de primer orden. El uso de la notación matricial simplifica enormemente la representación matemática de los sistemas de ecuaciones. El incremento en el número de variables de estado, de entradas o de salidas no aumenta la complejidad de las ecuaciones. De hecho, el análisis de sistemas complicados con múltiples entradas y salidas se realiza mediante procedimientos sólo ligeramente más complicados que los requeridos para el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales escalares de primer orden.

Este capítulo y el siguiente abordan el análisis y el diseño de sistemas de control en el espacio de estados. En este capítulo se presenta el material básico de análisis en el espacio de estados, que incluye la representación de sistemas en el espacio de estados, la controlabilidad y la obser-

[1] Obsérvese que en este libro se utiliza un asterisco como superíndice de una matriz, por ejemplo $\mathbf{A}^*$ significa la **transpuesta conjugada** de la matriz **A**. La transpuesta conjugada es la conjugada de la transpuesta de una matriz. Para una matriz real (una matriz cuyos elementos son todos reales), la transpuesta conjugada $\mathbf{A}^*$ es la misma que la transpuesta $\mathbf{A}^T$.

vabilidad. En el Capítulo 10 se abordan los métodos básicos de diseño de sistemas de control basados en la realimentación del estado.

Contenido del capítulo. La Sección 9-1 ha presentado una introducción al análisis en el espacio de estados de los sistemas de control. La Sección 9-2 aborda la representación en el espacio de estados de sistemas representados por su función de transferencia. Se presentan diversas formas canónicas de las ecuaciones en el espacio de estados. La Sección 9-3 analiza la transformación con MATLAB de modelos de sistemas (con base en la función de transferencia a otro espacio en el espacio de estados y viceversa). La Sección 9-4 presenta la solución de las ecuaciones de estado lineales e invariantes con el tiempo. La Sección 9-5 ofrece algunos resultados útiles en el análisis matricial, que además son necesarios para estudiar el análisis en el espacio de estados de los sistemas de control. La Sección 9-6 analiza la controlabilidad de los sistemas de control y la Sección 9-7 trata la observabilidad de los sistemas de control.

9-2 Representaciones en el espacio de estados de sistemas definidos por su función de transferencia

Existen muchas técnicas para obtener representaciones en el espacio de estados de sistemas definidos por su función de transferencia. En el Capítulo 2 presentamos algunos métodos. Esta sección aborda las representaciones en el espacio de estados en la forma canónica controlable, observable, diagonal o de Jordan. (Los métodos para obtener representaciones en el espacio de estados de funciones de transferencia se analizan en los Problemas **A-9-1** a **A-9-4**.)

Representación en el espacio de estados en formas canónicas. Considérese un sistema definido mediante:

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \tag{9-1}$$

donde u es la entrada e y es la salida. Esta ecuación también puede escribirse como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \tag{9-2}$$

A continuación se presentan las representaciones en el espacio de estados del sistema definido mediante las Ecuaciones (9-1) o (9-2), en su forma canónica controlable, en su forma canónica observable y en su forma canónica diagonal (o de Jordan).

Forma canónica controlable. La siguiente representación en el espacio de estados se denomina forma canónica controlable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{9-3}$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \mid b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \mid \cdots \mid b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{9-4}$$

La forma canónica controlable es importante cuando se analiza el método de asignación de polos para el diseño de sistemas de control.

Forma canónica observable. La siguiente representación en el espacio de estados se denomina forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \tag{9-5}$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{9-6}$$

Obsérvese que la matriz de estado de $n \times n$ de la ecuación de estado obtenida mediante la Ecuación (9-5) es la transpuesta de la ecuación de estado definida por la Ecuación (9-3).

Forma canónica diagonal. Considérese el sistema representado por la función de transferencia definida mediante la Ecuación (9-2). Se considera el caso en el que el polinomio del denominador sólo contiene raíces distintas. En este caso, la Ecuación (9-2) se puede escribir como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

$$= b_0 + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s + p_n} \tag{9-7}$$

La forma canónica diagonal de la representación en el espacio de estados de este sistema viene dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{9-8}$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{9-9}$$

Forma canónica de Jordan. A continuación se considera el caso en el que el polinomio del denominador de la Ecuación (9-2) contiene raíces múltiples. En este caso la forma canónica diagonal anterior debe modificarse a la forma canónica de Jordan. Suponga, por ejemplo, que todos los p_i, excepto los tres primeros, son diferentes entre sí, o sea, $p_1 = p_2 = p_3$. En este caso, la forma factorizada de $Y(s)/U(s)$ se hace

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{(s+p_1)^3(s+p_4)(s+p_5)\cdots(s+p_n)}$$

El desarrollo en fracciones simples de esta última ecuación se convierte en

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

Una representación en el espacio de estados de este sistema en su forma canónica de Jordan se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -p_4 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & -p_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{9-10}$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{9-11}$$

EJEMPLO 9-1 Considere el sistema definido por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

Obtenga las representaciones en el espacio de estados en la forma canónica controlable, en la forma canónica observable y en la forma canónica diagonal.

Forma canónica controlable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [3 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Forma canónica diagonal:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [2 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Valores propios de una matriz A de *n* × *n*. Los valores propios de una matriz **A** de $n \times n$ son las raíces de la ecuación característica

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

Los valores propios también se denominan raíces características. Por ejemplo, considérese la matriz **A** siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

$$= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

Los valores propios de **A** son las raíces de la ecuación característica, -1, -2 y -3.

Diagonalización de una matriz de *n* × *n*. Obsérvese que, si una matriz **A** de $n \times n$ con valores propios distintos, está dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \tag{9-12}$$

la transformación $\mathbf{x} = \mathbf{Pz}$, donde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n = n \text{ valores propios distintos de } \mathbf{A}$$

transformará $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ en la matriz diagonal o

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_\mathrm{n} \end{bmatrix}$$

Si la matriz **A** definida mediante la Ecuación (9-12) contiene valores propios múltiples, la diagonalización es imposible. Por ejemplo, si la matriz **A** de 3 × 3, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

tiene los valores propios λ_1, λ_1, λ_3 la transformación $\mathbf{x} = \mathbf{Sz}$, donde

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

producirá

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

que está en la forma canónica de Jordan.

EJEMPLO 9-2 Considere la siguiente representación en el espacio de estados de un sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \tag{9-13}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{9-14}$$

Las Ecuaciones (9-13) y (9-14) se escriben en una forma estándar como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{9-15}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{9-16}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Los valores propios de la matriz **A** son

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2, \qquad \lambda_3 = -3$$

Por tanto, los tres valores propios son distintos. Si se define un nuevo conjunto de variables de estado z_1, z_2 y z_3 mediante la transformación

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z} \tag{9-17}$$

donde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \tag{9-18}$$

entonces, sustituyendo la Ecuación (9-17) en la Ecuación (9-15), se obtiene

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por $\mathbf{P}^{-1}$, se obtiene

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u \tag{9-19}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

Al simplificar se deduce

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} u \qquad (9\text{-}20)$$

La Ecuación (9-20) es también una ecuación de estado que describe el mismo sistema definido mediante la Ecuación (9-13).

La ecuación de salida, Ecuación (9-16), se modifica a

$$y = \mathbf{CPz}$$

o bien

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \qquad (9\text{-}21)$$

Observe que la matriz de transformación $\mathbf{P}$, definida mediante la Ecuación (9-18), modifica la matriz de coeficientes de $\mathbf{z}$ en la matriz diagonal. Como se aprecia claramente en la Ecuación (9-20), las tres ecuaciones de estado escalares no están acopladas. Observe también que los elementos de la diagonal principal de la matriz $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ en la Ecuación (9-19) son idénticos a los tres valores propios de $\mathbf{A}$. Es muy importante señalar que los valores propios de $\mathbf{A}$ son idénticos a los de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$. A continuación se demuestra esto para un caso general.

Invariancia de los valores propios. Para comprobar la invariancia de los valores propios bajo una transformación lineal, se debe demostrar que los polinomios característicos $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ y $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}|$ son idénticos.

Como el determinante de un producto es el producto de los determinantes, se obtiene

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}| &= |\lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}| \\ &= |\mathbf{P}^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}| \\ &= |\mathbf{P}^{-1}|\,|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\,|\mathbf{P}| \\ &= |\mathbf{P}^{-1}|\,|\mathbf{P}|\,|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| \end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta que el producto de los determinantes $|\mathbf{P}^{-1}|$ y $|\mathbf{P}|$ es el determinante del producto $|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}|$, se obtiene

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}| &= |\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}|\,|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| \\ &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| \end{aligned}$$

Por tanto, se ha demostrado que los valores propios de $\mathbf{A}$ son invariantes bajo una transformación lineal.

No unicidad de un conjunto de variables de estado. Se ha planteado que un conjunto de variables de estado no es único para un sistema específico. Supóngase que x_1, x_2, ..., x_n

forman un conjunto de variables de estado. Se puede tomar como otro conjunto de variables de estado cualquier conjunto de funciones

$$\hat{x}_1 = X_1(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$\hat{x}_2 = X_2(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$\vdots$$
$$\hat{x}_n = X_n(x_1, x_2, ..., x_n)$$

siempre y cuando, a cada conjunto de valores $\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n$, le corresponda un conjunto único de valores $x_1, x_2, ..., x_n$, y viceversa. Por tanto, si $\mathbf{x}$ es un vector de estado entonces, $\hat{\mathbf{x}}$, donde

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$$

es también un vector de estado, siempre y cuando la matriz $\mathbf{P}$ sea no singular. Los diferentes vectores de estado aportan la misma información acerca del comportamiento del sistema.

9-3 Transformación de modelos de sistemas con MATLAB

En esta sección se considera la transformación del modelo del sistema basado en su función de transferencia al espacio de estados, y viceversa. Se comenzará el análisis con la transformación de una función de transferencia al espacio de estados.

Se escribe la función de transferencia en lazo cerrado como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{numerador polinomial en } s}{\text{denominador polinomial en } s} = \frac{\text{num}}{\text{den}}$$

Una vez que se tiene esta expresión, la orden de MATLAB

```
[A, B, C, D] = tf2ss(num,den)
```

producirá una representación en el espacio de estados. Es importante señalar que la representación en el espacio de estados para cualquier sistema no es única. Existen muchas (en realidad infinitas) representaciones en el espacio de estados para el mismo sistema. La orden `tf2ss` de MATLAB ofrece una de las posibles representaciones en el espacio de estados.

Formulación en el espacio de estados de sistemas basados en su función de transferencia. Considérese el sistema definido por la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10s + 10}{s^3 + 6s^2 + 5s + 10} \tag{9-22}$$

Existen muchas representaciones posibles en el espacio de estados para este sistema. Una representación posible en el espacio de estados es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -50 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]\, u$$

Otra representación posible en el espacio de estados (entre muchas alternativas) es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -5 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{9-23}$$

$$y = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]\, u \tag{9-24}$$

MATLAB transforma la función de transferencia obtenida mediante la Ecuación (9-22) en la representación en el espacio de estados obtenida mediante las Ecuaciones (9-23) y (9-24). Para el sistema del ejemplo que se considera aquí, el Programa MATLAB 9-1 producirá las matrices **A**, **B**, **C** y *D*.

MATLAB Programa 9-1

```
num=[10  10];
den=[1  6  5  10];
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)
A =
     6  –5  –10
     1   0    0
     0   1    0
B=
     1
     0
     0
C=
     0  10  10
D=
     0
```

Transformación del espacio de estados a una función de transferencia. Para obtener la función de transferencia a partir de las ecuaciones en el espacio de estados, se utiliza la orden siguiente:

```
[num,den] = ss2tf[A,B,C,D,iu]
```

`iu` debe especificarse para los sistemas con más de una entrada. Por ejemplo, si el sistema tiene tres entradas ($u1$, $u2$, $u3$), entonces `iu` debe ser 1, 2 o 3, en donde 1 implica $u1$, 2 implica $u2$ y 3 implica $u3$.

Si el sistema sólo tiene una entrada, entonces se puede utilizar

```
[num,den] = ss2tf[A,B,C,D]
```

o bien

```
[num,den] = ss2tf[A,B,C,D,1]
```

(Véanse el Ejemplo 9-3 y el Programa MATLAB 9-2.)

Para el caso en que el sistema posee entradas y salidas múltiples, véase el Ejemplo 9-4.

EJEMPLO 9-3 Obtenga la función de transferencia del sistema definido mediante las ecuaciones en el espacio de estados siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5.008 & -25.1026 & -5.03247 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25.04 \\ -121.005 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

El Programa MATLAB 9-2 producirá la función de transferencia para el sistema dado. La función de transferencia obtenida es

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25.04s + 5.008}{s^3 + 5.0325s^2 + 25.1026s + 5.008}$$

MATLAB Programa 9-2

```
A=[0  1  0;0  0  1;-5.008  -25.1026  -5.03247];
B=[0;25.04; -121.005];
C=[1  0  0];
D=[0];
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D)

num=

     0  -0.0000  25.0400  5.0080

den=

  1.0000  5.0325  25.1026  5.0080

% ***** El mismo resultado se puede obtener introduciendo
% la orden siguiente *****

[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,1)

num=
     0  -0.0000  25.0400  5.0080

den=

  1.0000  5.0325  25.1026  5.0080
```

EJEMPLO 9-4 Considere un sistema con entradas y salidas múltiples. Cuando el sistema tiene más de una salida, la orden

```
[NUM,den] = ss2tf[A,B,C,D,iu]
```

produce funciones de transferencia para todas las salidas para cada entrada. (Los coeficientes del numerador se devuelven en la matriz NUM con el mismo número de filas que de salidas.)

Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Este sistema contiene dos entradas y dos salidas. Hay cuatro funciones de transferencia implícitas: $Y_1(s)/U_1(s)$, $Y_2(s)/U_1(s)$, $Y_1(s)/U_2(s)$ y $Y_2(s)/U_2(s)$. (Al considerar la entrada u_1, se supone que la entrada u_2 es cero, y viceversa.) Véase la salida del Programa MATLAB 9-3.

MATLAB Programa 9-3

```
A=[0  1;–25  –4];
B=[1  1;0  1];
C=[1  0;0  1];
D=[0  0;0  0];
[NUM,den]=ss2tf(A,B,C,D,1)

NUM=

   0  1    4
   0  0  –25

den=

   1  4  25

[NUM,den]=ss2tf(A,B,C,D,2)

NUM=

   0  1.0000  5.0000
   0  1.0000  –25.0000

den=

   1  4  25
```

Esta es la representación en MATLAB de las cuatro funciones de transferencia siguientes:

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{s+4}{s^2+4s+25}, \qquad \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{-25}{s^2+4s+25}$$

$$\frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = \frac{s+5}{s^2+4s+25}, \qquad \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{s-25}{s^2+4s+25}$$

9-4 Solución de la ecuación de estado invariante con el tiempo

En esta sección se obtendrá la solución general de la ecuación de estado lineal e invariante en el tiempo. Primero se considera el caso homogéneo y luego el no homogéneo.

Solución de las ecuaciones de estado para el caso homogéneo. Antes de resolver las ecuaciones diferenciales matriciales, se repasa la solución de la ecuación diferencial escalar

$$\dot{x} = ax \tag{9-25}$$

Al resolver esta ecuación, se supone una solución $x(t)$ de la forma

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots \tag{9-26}$$

Sustituyendo esta solución supuesta en la Ecuación (9-25), se obtiene

$$\begin{aligned} & b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + kb_k t^{k-1} + \cdots \\ & = a(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots) \end{aligned} \tag{9-27}$$

Si la solución supuesta se quiere que sea la solución verdadera, la Ecuación (9-27) debe ser válida para cualquier t. Por tanto, igualando los coeficientes de las potencias iguales de t, se obtiene

$$\begin{aligned} b_1 &= ab_0 \\ b_2 &= \frac{1}{2} ab_1 = \frac{1}{2} a^2 b_0 \\ b_3 &= \frac{1}{3} ab_2 = \frac{1}{3 \times 2} a^3 b_0 \\ &\vdots \\ b_k &= \frac{1}{k!} a^k b_0 \end{aligned}$$

El valor de b_0 se determina sustituyendo $t = 0$ en la Ecuación (9-26), o

$$x(0) = b_0$$

Por tanto, la solución $x(t)$ se escribe como

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} a^k t^k + \cdots \right) x(0) \\ &= e^{at} x(0) \end{aligned}$$

A continuación se resuelve la ecuación diferencial matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{9-28}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de dimensión n
$\mathbf{A}$ = matriz de coeficientes constantes de $n \times n$

Por analogía con el caso escalar, se supone que la solución está en la forma de una serie de potencias vectorial en t, o

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \cdots \tag{9-29}$$

Al sustituir esta solución supuesta en la Ecuación (9-28), se obtiene

$$\begin{aligned}&\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 t + 3\mathbf{b}_3 t^2 + \cdots + k\mathbf{b}_k t^{k-1} + \cdots \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \cdots + \mathbf{b}_k t^k + \cdots)\end{aligned} \tag{9-30}$$

Si la solución supuesta se quiere que sea la solución verdadera, la Ecuación (9-30) debe ser válida para todo t. Por tanto, igualando los coeficientes de las potencias iguales de t en ambos miembros de la Ecuación (9-30), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_3 &= \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3\times 2}\mathbf{A}^3\mathbf{b}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{b}_k &= \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0\end{aligned}$$

Al sustituir $t = 0$ en la Ecuación (9-29), se obtiene

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0$$

Así, la solución $\mathbf{x}(t)$ se escribe como

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots\right)\mathbf{x}(0)$$

La expresión entre paréntesis en el segundo miembro de esta última ecuación es una matriz de $n \times n$. Debido a su similitud con la serie infinita de potencias para una exponencial escalar, se la denomina matriz exponencial y se escribe

$$\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots = e^{\mathbf{A}t}$$

En términos de la matriz exponencial, la solución de la Ecuación (9-28) se puede escribir como

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \tag{9-31}$$

Como la matriz exponencial es muy importante en el análisis en el espacio de estados de los sistemas lineales, a continuación se examinarán sus propiedades.

Matriz exponencial. Se puede demostrar que la matriz exponencial de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$,

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^kt^k}{k!}$$

converge absolutamente para todo t finito. (Por tanto, es fácil realizar los cálculos en un computador para evaluar los elementos de $e^{\mathbf{A}t}$ utilizando el desarrollo en serie.)

Debido a la convergencia de la serie infinita $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^kt^k/k!$, la serie puede diferenciarse término

a término para producir

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{\mathbf{A}^3 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots$$

$$= \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots\right] = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

$$= \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots\right]\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$$

La matriz exponencial tiene las siguientes propiedades:

$$e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s}$$

Esto se demuestra del modo siguiente:

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k s^k}{k!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i s^{k-i}}{i!(k-i)!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{(t+s)^k}{k!}$$

$$= e^{\mathbf{A}(t+s)}$$

En particular, si $s = -t$, entonces

$$e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = e^{-\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(t-t)} = \mathbf{I}$$

Por tanto, la inversa de $e^{\mathbf{A}t}$ es $e^{-\mathbf{A}t}$. Como la inversa de $e^{\mathbf{A}t}$ siempre existe, $e^{\mathbf{A}t}$ es no singular. Es muy importante recordar que

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}, \qquad \text{si } \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} \neq e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}, \qquad \text{si } \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Para demostrar esto, considérese que

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = \mathbf{I} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})t + \frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2}{2!}t^2 + \frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^3}{3!}t^3 + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \cdots\right)\left(\mathbf{I} + \mathbf{B}t + \frac{\mathbf{B}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{B}^3 t^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= \mathbf{I} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \mathbf{AB}t^2 + \frac{\mathbf{B}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!}$$

$$+ \frac{\mathbf{A}^2\mathbf{B}t^3}{2!} + \frac{\mathbf{AB}^2 t^3}{2!} + \frac{\mathbf{B}^3 t^3}{3!} + \cdots$$

Por tanto,

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} - e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} = \frac{\mathbf{BA} - \mathbf{AB}}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{BA}^2 + \mathbf{ABA} + \mathbf{B}^2\mathbf{A} + \mathbf{BAB} - 2\mathbf{A}^2\mathbf{B} - 2\mathbf{AB}^2}{3!}t^3 + \cdots$$

La diferencia entre $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}$ y $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$ desaparece si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ conmutan.

Método de la transformada de Laplace para la solución de las ecuaciones de estado en el caso homogéneo. Primero se considera el caso escalar:

$$\dot{x} = ax \tag{9-32}$$

Tomando la transformada de Laplace de la Ecuación (9-32), se obtiene

$$sX(s) - x(0) = aX(s) \tag{9-33}$$

donde $X(s) = \mathscr{L}[x]$. Al despejar $X(s)$ en la Ecuación (9-33) se deduce

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} = (s-a)^{-1}x(0)$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación da la solución

$$x(t) = e^{at}x(0)$$

El método anterior para la solución de la ecuación diferencial escalar homogénea se extiende a la ecuación de estado homogénea:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{9-34}$$

Tomando la transformada de Laplace de ambos miembros de la Ecuación (9-34), se obtiene

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

donde $\mathbf{X}(s) = \mathscr{L}[\mathbf{x}]$. Por tanto,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0)$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, se obtiene

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

La transformada inversa de Laplace de $\mathbf{X}(s)$ produce la solución $\mathbf{x}(t)$. Así,

$$\mathbf{x}(t) = \mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) \tag{9-35}$$

Obsérvese que

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots$$

Por tanto, la transformada inversa de Laplace de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ da

$$\mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \cdots = e^{\mathbf{A}t} \tag{9-36}$$

(La transformada inversa de Laplace de una matriz es la matriz formada por las transformadas inversas de Laplace de todos los elementos.) A partir de las Ecuaciones (9-35) y (9-36), la solución de la Ecuación (9-34) se obtiene como

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

La importancia de la Ecuación (9-36) radica en el hecho de que ofrece una forma conveniente de encontrar la solución cerrada para la matriz exponencial.

Matriz de transición de estados. Se puede escribir la solución de la ecuación de estado homogénea

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{9-37}$$

como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) \tag{9-38}$$

donde $\mathbf{\Phi}(t)$ es una matriz de $n \times n$ y es la solución única de

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t), \qquad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$$

Para verificar esto, obsérvese que

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{\Phi}(0)\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0)$$

y

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

Por tanto, se confirma que la Ecuación (9-38) es la solución de la Ecuación (9-37).

A partir de las Ecuaciones (9-31), (9-35) y (9-38), se obtiene

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Obsérvese que

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(-t)$$

En la Ecuación (9-38), vemos que la solución de la Ecuación (9-37) es simplemente una transformación de la condición inicial. Por tanto, la matriz única $\mathbf{\Phi}(t)$ se denomina matriz de transición de estados. La matriz de transición de estados contiene toda la información sobre el movimiento libre del sistema definido mediante la Ecuación (9-37).

Si los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de la matriz $\mathbf{A}$ son distintos, entonces $\mathbf{\Phi}(t)$ contendrá las n exponenciales

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, ..., e^{\lambda_n t}$$

En particular, si la matriz $\mathbf{A}$ es diagonal, entonces

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}\text{: diagonal})$$

Si hay una multiplicidad en los valores característicos, por ejemplo, si los valores característicos de **A** son

$$\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_5, ..., \lambda_n$$

entonces $\mathbf{\Phi}(t)$ contendrá, además de las exponenciales $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_4 t}, e^{\lambda_5 t}, ..., e^{\lambda_n t}$, términos como $te^{\lambda_1 t}$ y $t^2 e^{\lambda_1 t}$.

Propiedades de la matriz de transición de estados. A continuación se resumen las propiedades importantes de la matriz de transición de estados $\mathbf{\Phi}(t)$. Para el sistema lineal e invariante con el tiempo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

para el cual

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

se tienen las propiedades siguientes:

1. $\mathbf{\Phi}(0) = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$
2. $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = (e^{-\mathbf{A}t})^{-1} = [\mathbf{\Phi}(-t)]^{-1}$ o $\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}(-t)$
3. $\mathbf{\Phi}(t_1 + t_2) = e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} = e^{\mathbf{A}t_1}e^{\mathbf{A}t_2} = \mathbf{\Phi}(t_1)\mathbf{\Phi}(t_2) = \mathbf{\Phi}(t_2)\mathbf{\Phi}(t_1)$
4. $[\mathbf{\Phi}(t)]^n = \mathbf{\Phi}(nt)$
5. $\mathbf{\Phi}(t_2 - t_1)\mathbf{\Phi}(t_1 - t_0) = \mathbf{\Phi}(t_2 - t_0) = \mathbf{\Phi}(t_1 - t_0)\mathbf{\Phi}(t_2 - t_1)$

EJEMPLO 9-5 Obtenga la matriz de transición de estados $\mathbf{\Phi}(t)$ del sistema siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Obtenga también la inversa de la matriz de transición de estados, $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$.

Para este sistema,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estados $\mathbf{\Phi}(t)$ se obtiene mediante

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}^{-1}[s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Como

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

la inversa de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ se obtiene mediante

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}^{-1}[s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Si se tiene en cuenta que $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$, se obtiene la inversa de la matriz de transición de estados del modo siguiente:

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{t} - e^{2t} & e^{t} - e^{2t} \\ -2e^{t} + 2e^{2t} & -e^{t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

Solución de ecuaciones de estado para el caso no homogéneo. Se comenzará considerando el caso escalar

$$\dot{x} = ax + bu \tag{9-39}$$

Si se reescribe la Ecuación (9-39) como

$$\dot{x} - ax = bu$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por e^{-at}, se obtiene

$$e^{-at}[\dot{x}(t) - ax(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-at}x(t)] = e^{-at}bu(t)$$

Al integrar esta ecuación entre 0 y t se obtiene

$$e^{-at}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)\,d\tau$$

o bien

$$x(t) = e^{at}x(0) + e^{at}\int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)\,d\tau$$

El primer término del segundo miembro es la respuesta a las condiciones iniciales y el segundo término es la respuesta a la entrada $u(t)$.

Ahora se considera la ecuación de estado no homogénea descrita mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{9-40}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de dimensión n
$\mathbf{u}$ = vector de dimensión r
$\mathbf{A}$ = matriz de coeficientes constantes de $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz de coeficientes constantes de $n \times r$

Escribiendo la Ecuación (9-40) como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

y premultiplicando ambos miembros de esta ecuación por $e^{-\mathbf{A}t}$, se obtiene

$$e^{-\mathbf{A}t}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Al integrar la ecuación anterior entre 0 y t se obtiene

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

o bien

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{9-41}$$

La Ecuación (9-41) también se escribe como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{9-42}$$

donde $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$. La Ecuación (9-41) o (9-42) es la solución de la Ecuación (9-40). La solución $\mathbf{x}(t)$ es claramente la suma de un término formado por la transición del estado inicial y un término que surge del vector de entradas.

Método de la transformada de Laplace para la solución de ecuaciones de estado del caso no homogéneo. La solución de la ecuación de estado no homogénea

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

también puede obtenerse mediante el método de la transformada de Laplace. La transformada de Laplace de esta última ecuación da

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

o bien

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, obtenemos

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Al usar la relación dada por la Ecuación (9-36) da

$$\mathbf{X}(s) = \mathscr{L}[e^{\mathbf{A}t}]\mathbf{x}(0) + \mathscr{L}[e^{\mathbf{A}t}]\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación se obtiene a partir de la integral de convolución, del modo siguiente:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

Solución en términos de $x(t_0)$. Hasta aquí se ha supuesto que el tiempo inicial es cero. Sin embargo, si el tiempo inicial está dado mediante t_0, en lugar de 0, la solución para la Ecuación (9-40) debe modificarse a

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \tag{9-43}$$

EJEMPLO 9-6 Obtenga la respuesta en el tiempo del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

donde $u(t)$ es la función escalón unitario que se presenta en $t = 0$, o

$$u(t) = 1(t)$$

Para este sistema,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estados $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ se obtuvo en el Ejemplo 9-5 como

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

La respuesta a la entrada escalón unitario se obtiene entonces como

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1]\, d\tau$$

o bien

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}\, e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Si el estado inicial es cero, o $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x}(t)$ se puede simplificar a

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} - e^{-t} + \dfrac{1}{2}\, e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

9-5 Algunos resultados útiles en el análisis vectorial-matricial

En esta sección se presentarán algunos resultados útiles en el análisis matricial que se usan en la Sección 9-6. Específicamente, se estudiará el teorema de Cayley-Hamilton, el polinomio mínimo, el método de interpolación de Sylvester para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ y la independencia lineal de vectores.

Teorema de Cayley-Hamilton. El teorema de Cayley-Hamilton es muy útil para comprobar teoremas que involucran ecuaciones matriciales o para resolver problemas que contienen ecuaciones matriciales.

Considérese una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ y su ecuación característica:

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

El teorema de Cayley-Hamilton expresa que la matriz $\mathbf{A}$ satisface su propia ecuación característica, o que

$$\mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathbf{A} + a_n\mathbf{I} = \mathbf{0} \tag{9-44}$$

Para demostrar este teorema, considérese que $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ es un polinomio en $\mathbf{A}$ de grado $n - 1$. Es decir,

$$\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{B}_1\lambda^{n-1} + \mathbf{B}_2\lambda^{n-2} + \cdots + \mathbf{B}_{n-1}\lambda + \mathbf{B}_n$$

donde $\mathbf{B}_1 = \mathbf{I}$. Dado que

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = [\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})](\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{I}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{I} &= \mathbf{I}\lambda^n + a_1\mathbf{I}\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathbf{I}\lambda + a_n\mathbf{I}\\ &= (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{B}_1\lambda^{n-1} + \mathbf{B}_2\lambda^{n-2} + \cdots + \mathbf{B}_{n-1}\lambda + \mathbf{B}_n)\\ &= (\mathbf{B}_1\lambda^{n-1} + \mathbf{B}_2\lambda^{n-2} + \cdots + \mathbf{B}_{n-1}\lambda + \mathbf{B}_n)(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\end{aligned}$$

En esta ecuación se ve que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}_i$ ($i = 1, 2, ..., n$) sí conmutan. Por tanto, el producto de $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ y $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ se hace cero si cualquiera de ellas es cero. Si se sustituye $\mathbf{A}$ por λ en esta última ecuación, es evidente que $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ se hace cero. Por tanto, se obtiene

$$\mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathbf{A} + a_n\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Esto prueba el teorema de Cayley-Hamilton, o la Ecuación (9-44).

Polinomio mínimo. El teorema de Cayley-Hamilton asegura que toda matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ satisface su propia ecuación característica. Sin embargo, la ecuación característica no necesariamente es la ecuación escalar de grado mínimo que $\mathbf{A}$ satisface. El polinomio de grado mínimo que tiene a $\mathbf{A}$ como raíz se denomina *polinomio mínimo*. Es decir, el polinomio mínimo de la matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ se define como el polinomio $\phi(\lambda)$ de grado mínimo,

$$\phi(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m, \qquad m \leqslant n$$

tal que $\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, o

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^m + a_1\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\mathbf{A} + a_m\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

El polinomio mínimo representa una función importante en el cálculo de polinomios de una matriz de $n \times n$.

Supóngase que $d(\lambda)$, polinomio en λ, es el máximo común divisor de todos los elementos de $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Se puede demostrar que si se elige 1 como el coeficiente del término de mayor grado en λ de $d(\lambda)$, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ se obtiene mediante

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|}{d(\lambda)} \qquad (9\text{-}45)$$

[Véase el Problema **A-9-8** para la obtención de la Ecuación (9-45).]

Se observa que el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ se determina mediante el procedimiento siguiente:

1. Forme $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ y escriba los elementos de $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ como polinomios factorizados en λ.
2. Determine $d(\lambda)$ como el máximo común divisor de todos los elementos de $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Seleccione 1 como el coeficiente del término de mayor grado en λ de $d(\lambda)$. Si no hay un común divisor, $d(\lambda) = 1$.
3. El polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ se obtiene, entonces, como $\text{adj}|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ dividido entre $d(\lambda)$.

Matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$. En la resolución de problemas de ingeniería de control, con frecuencia resulta necesario calcular $e^{\mathbf{A}t}$. Si se tiene la matriz $\mathbf{A}$ de forma numérica, MATLAB ofrece una forma simple de calcular $e^{\mathbf{A}T}$, donde T es una constante.

Además de los métodos de cálculo, existen varios métodos analíticos para la determinación de $e^{\mathbf{A}t}$. A continuación se presentan tres de estos métodos.

Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$: método 1. Si la matriz **A** se transforma en una forma diagonal, entonces $e^{\mathbf{A}t}$ se obtiene mediante

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \tag{9-46}$$

donde **P** es una matriz de diagonalización para **A**. [Para la obtención de la Ecuación (9-46), véase el Problema **A-9-11**.]

Si la matriz **A** se transforma en una forma canónica de Jordan, entonces $e^{\mathbf{A}t}$ se obtiene mediante

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1}$$

donde **S** es una matriz de transformación que convierte a la matriz **A** en su forma canónica de Jordan **J**.

Como ejemplo, considérese la siguiente matriz **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$$

Por tanto, la matriz **A** tiene un valor propio múltiple de orden 3 en $\lambda = 1$. Se puede demostrar que la matriz **A** tiene un vector propio múltiple de orden 3. La matriz de transformación que convertirá la matriz **A** a su forma canónica de Jordan viene dada por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz **S** es

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se observa, así, que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{J}$$

Si se tiene en cuenta que

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t - te^t + \frac{1}{2}t^2e^t & te^t - t^2e^t & \frac{1}{2}\,t^2e^t \\ \frac{1}{2}t^2e^t & e^t - te^t - t^2e^t & te^t + \frac{1}{2}t^2e^t \\ te^t + \frac{1}{2}t^2e^t & -3te^t - t^2e^t & e^t + 2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$: método 2. El segundo método para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ utiliza el método de la transformada de Laplace. Refiriéndose a la Ecuación (9-36), $e^{\mathbf{A}t}$ se obtiene del modo siguiente:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Por tanto, para obtener $e^{\mathbf{A}t}$, primero se invierte la matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Esto genera una matriz cuyos elementos son funciones racionales de s. Después se toma la transformada inversa de Laplace de cada elemento de la matriz.

EJEMPLO 9-7 Considere la matriz **A** siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcule $e^{\mathbf{A}t}$ mediante los dos métodos analíticos presentados previamente.

Método 1. Los valores propios de **A** son 0 y $-2(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2)$. La matriz **P** de transformación se obtiene como

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

De esta forma, a partir de la Ecuación (9-46), $e^{\mathbf{A}t}$ se obtiene del modo siguiente:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Método 2. Como

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$: método 3. El tercer método se basa en la interpolación de Sylvester. (Para la fórmula de interpolación de Sylvester, véase el Problema **A-9-12**.) En primer lugar se considera el caso en el que las raíces del polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ de **A** son distintas. Después se aborda el caso de las raíces múltiples.

Caso 1: El polinomio mínimo de **A** *sólo contiene raíces distintas.* Se supondrá que el grado del polinomio mínimo de **A** es m. Utilizando la fórmula de interpolación de Sylvester, se demuestra que $e^{\mathbf{A}t}$ se obtiene resolviendo la ecuación determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} & e^{\lambda_2 t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} & e^{\lambda_m t} \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \cdots & \mathbf{A}^{m-1} & e^{\mathbf{A}t} \end{vmatrix} = \mathbf{0} \tag{9-47}$$

Si se despeja $e^{\mathbf{A}t}$ en la Ecuación (9-47), $e^{\mathbf{A}t}$ se obtiene en términos de $\mathbf{A}^k$ ($k = 0, 1, 2, ..., m - 1$) y $e^{\lambda_i t}$ ($i = 1, 2, 3, ..., m$). [Por ejemplo, la Ecuación (9-47) se desarrolla con respecto a la última columna.]

Obsérvese que despejar $e^{\mathbf{A}t}$ en la Ecuación (9-47) es lo mismo que escribir

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\mathbf{A}^{m-1} \tag{9-48}$$

y determinar $\alpha_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, ..., m - 1$) resolviendo el siguiente conjunto de m ecuaciones para $\alpha_k(t)$:

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-1} &= e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_2^{m-1} &= e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_m + \alpha_2(t)\lambda_m^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_m^{m-1} &= e^{\lambda_m t} \end{aligned}$$

Si **A** es una matriz de $n \times n$ y tiene valores propios distintos, el número de las $\alpha_k(t)$ que hay que determinar es $m = n$. Sin embargo, si **A** contiene valores propios múltiples, pero su polinomio mínimo sólo tiene raíces simples, el número m de las $\alpha_k(t)$ a determinar es menor que n.

Caso 2: El polinomio mínimo de **A** *contiene raíces múltiples.* Como ejemplo, considérese el caso en el que el polinomio mínimo de **A** contiene tres raíces iguales ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) y el resto distintas ($\lambda_4, \lambda_5, ..., \lambda_m$). Aplicando la fórmula de interpolación de Sylvester, se demuestra que $e^{\mathbf{A}t}$ se obtiene a partir de la ecuación determinante siguiente:

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}\lambda_1^{m-3} & \dfrac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} \\
0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & (m-1)\lambda_1^{m-2} & te^{\lambda_1 t} \\
1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & e^{\lambda_1 t} \\
1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \cdots & \lambda_4^{m-1} & e^{\lambda_4 t} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \lambda_m^3 & \cdots & \lambda_m^{m-1} & e^{\lambda_m t} \\
\mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \mathbf{A}^3 & \cdots & \mathbf{A}^{m-1} & e^{\mathbf{A}t}
\end{vmatrix} = \mathbf{0} \tag{9-49}
$$

La Ecuación (9-49) se desarrolla con respecto a la última columna para despejar $e^{\mathbf{A}t}$.

Obsérvese que, como en el caso 1, despejar $e^{\mathbf{A}t}$ en la Ecuación (9-49) es igual que escribir

$$
e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\mathbf{A}^{m-1} \tag{9-50}
$$

y determinar $\alpha_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, ..., m - 1$) a partir de

$$
\alpha_2(t) + 3\alpha_3(t)\lambda_1 + \cdots + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-3} = \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t}
$$

$$
\alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_1 + 3\alpha_3(t)\lambda_1^2 + \cdots + (m-1)\alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-2} = te^{\lambda_1 t}
$$

$$
\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_1^{m-1} = e^{\lambda_1 t}
$$

$$
\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_4 + \alpha_2(t)\lambda_4^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_4^{m-1} = e^{\lambda_4 t}
$$

$$
\vdots
$$

$$
\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_m + \alpha_2(t)\lambda_m^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\lambda_m^{m-1} = e^{\lambda_m t}
$$

Es evidente la extensión a otros casos en los que, por ejemplo, hay dos o más conjuntos de raíces múltiples. Obsérvese que, si no se encuentra el polinomio mínimo de **A**, puede sustituirse el polinomio característico por el polinomio mínimo. Por supuesto, el número de cálculos se incrementa.

EJEMPLO 9-8 Sea la matriz

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}
$$

Calcule $e^{\mathbf{A}t}$ utilizando la fórmula de interpolación de Sylvester.

A partir de la Ecuación (9-47), se obtiene

$$
\begin{vmatrix}
1 & \lambda_1 & e^{\lambda_1 t} \\
1 & \lambda_2 & e^{\lambda_2 t} \\
\mathbf{I} & \mathbf{A} & e^{\mathbf{A}t}
\end{vmatrix} = \mathbf{0}
$$

Al sustituir λ_1 por 0 y λ_2 por -2 en esta última ecuación, se obtiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & e^{-2t} \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} & e^{\mathbf{A}t} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Si se desarrolla el determinante, se deduce

$$-2e^{\mathbf{A}t} + \mathbf{A} + 2\mathbf{I} - \mathbf{A}e^{-2t} = \mathbf{0}$$

o bien

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + 2\mathbf{I} - \mathbf{A}e^{-2t}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} e^{-2t}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \tfrac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Un enfoque alternativo es usar la Ecuación (9-48). En primer lugar se determinan $\alpha_0(t)$ y $\alpha_1(t)$ a partir de

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 = e^{\lambda_1 t}$$
$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 = e^{\lambda_2 t}$$

Como $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -2$, las dos últimas ecuaciones se convierten en

$$\alpha_0(t) = 1$$
$$\alpha_0(t) - 2\alpha_1(t) = e^{-2t}$$

Al resolver para $\alpha_0(t)$ y $\alpha_1(t)$ se obtiene

$$\alpha_0(t) = 1, \qquad \alpha_1(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

Luego, $e^{\mathbf{A}t}$ se puede escribir como

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \tfrac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Independencia lineal de vectores. Se dice que los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes si

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

donde $c_1, c_2, ..., c_n$ son constantes, implica que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

O bien, se dice que los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ son linealmente dependientes si y sólo si $\mathbf{x}_i$ se expresa como una combinación lineal de x_j ($j = 1, 2, ..., n$; $j \neq i$), o

$$\mathbf{x}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_j \mathbf{x}_j$$

para un conjunto de c_j constantes. Esto significa que, si $\mathbf{x}_j$ se puede expresar como una combinación lineal de los otros vectores en el conjunto, es linealmente dependiente de ellos, o no es un elemento independiente del conjunto.

EJEMPLO 9-9 Los vectores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes ya que

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$$

Los vectores

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes ya que

$$c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + c_3\mathbf{y}_3 = \mathbf{0}$$

implica que

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

Observe que si una matriz $n \times n$ es no singular (es decir, tiene un rango n o el determinante es diferente de cero), entonces n vectores columna (o fila) son linealmente independientes. Si la matriz $n \times n$ es singular (es decir, tiene un rango menor que n o el determinante es cero), entonces n vectores columna (o fila) son linealmente dependientes. Para demostrar esto, considere que

$$[\mathbf{x}_1 \,\vdots\, \mathbf{x}_2 \,\vdots\, \mathbf{x}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \text{singular}$$

$$[\mathbf{y}_1 \,\vdots\, \mathbf{y}_2 \,\vdots\, \mathbf{y}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{no singular}$$

9-6 Controlabilidad

Controlabilidad y observabilidad. Se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede transferir desde cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

Se dice que un sistema es observable en el tiempo t_0 si, con el sistema en el estado $\mathbf{x}(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito.

Kalman introdujo los conceptos de controlabilidad y observabilidad, que juegan un papel importante en el diseño de los sistemas de control en el espacio de estados. De hecho, las condicio-

nes de controlabilidad y observabilidad determinan la existencia de una solución completa para un problema de diseño de un sistema de control. La solución a este problema puede no existir si el sistema considerado no es controlable. Aunque la mayor parte de los sistemas físicos son controlables y observables, los modelos matemáticos correspondientes tal vez no posean la propiedad de controlabilidad y observabilidad. En este caso, es necesario conocer las condiciones en las cuales un sistema es controlable y observable. Esta sección aborda la controlabilidad y la siguiente analiza la observabilidad.

En lo que sigue, se deducirá en primer lugar la condición para garantizar controlabilidad completa del estado. A continuación, se obtendrán formas alternativas de dicha condición y un análisis análogo de la controlabilidad completa de salida. Finalmente se presenta el concepto de estabilizabilidad.

Controlabilidad completa del estado de sistemas en tiempo continuo. Sea el sistema en tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{9-51}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estados (vector de dimensión n)
u = señal de control (escalar)
$\mathbf{A}$ = matriz de $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz de $n \times 1$

Se dice que el sistema descrito mediante la Ecuación (9-51) es de estado controlable en $t = t_0$, si es posible construir una señal de control sin restricciones que transfiera un estado inicial a cualquier estado final en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Si todos los estados son controlables, se dice que el sistema es de estado completamente controlable.

Ahora se obtendrá la condición para controlabilidad completa del estado. Sin pérdida de generalidad, se supone que el estado final es el origen en el espacio de estados y que el tiempo inicial es cero, o $t_0 = 0$.

La solución de la Ecuación (9-51) es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)\,d\tau$$

Aplicando la definición de controlabilidad completa del estado recién establecida, se tiene que

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0} = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)\,d\tau$$

o bien

$$\mathbf{x}(0) = -\int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau)\,d\tau \tag{9-52}$$

Si se tienen en cuenta las Ecuaciones (9-48) o (9-50), $e^{-\mathbf{A}t}$ se puede escribir como

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)\mathbf{A}^k \tag{9-53}$$

Al sustituir la Ecuación (9-53) en la Ecuación (9-52) se obtiene

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k\mathbf{B}\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)\,d\tau \tag{9-54}$$

Si se define

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)\,d\tau = \beta_k$$

entonces la Ecuación (9-54) se convierte en

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k\mathbf{B}\beta_k$$

$$= -[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \tag{9-55}$$

Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces, dado cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$, la Ecuación (9-55) debe satisfacerse. Esto requiere que el rango de la matriz $n \times n$

$$[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

sea n.

De este análisis, se puede concluir la condición para controlabilidad completa del estado de la forma siguiente. El sistema obtenido mediante la Ecuación (9-51) es de estado completamente controlable si y sólo si los vectores $\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, ..., $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ son linealmente independientes, o la matriz $n \times n$

$$[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

es de rango n.

El resultado recién obtenido se extiende al caso en el que el vector de control $\mathbf{u}$ es de dimensión r. Si el sistema se describe por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

donde $\mathbf{u}$ es un vector de dimensión r, se demuestra que la condición para controlabilidad completa del estado es que la matriz $n \times nr$

$$[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

sea de un rango n, o que contenga n vectores columna linealmente independientes. La matriz

$$[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

se conoce comúnmente como *matriz de controlabilidad*.

EJEMPLO 9-10 Sea el sistema dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Como

$$[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{singular}$$

el sistema no es de estado completamente controlable.

EJEMPLO 9-11 Sea el sistema dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

Para este caso,

$$[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \text{no singular}$$

Por tanto, el sistema es de estado completamente controlable.

Forma alternativa de la condición para la controlabilidad completa del estado. Considérese el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \tag{9-56}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
$\mathbf{u}$ = vector de control (vector de dimensión r)
$\mathbf{A}$ = matriz $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz $n \times r$

Si los valores propios de $\mathbf{A}$ son distintos, es posible encontrar una matriz de transformación $\mathbf{P}$ tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Obsérvese que, si los valores propios de $\mathbf{A}$ son distintos, los vectores propios de $\mathbf{A}$ también son distintos; sin embargo, lo contrario no es cierto. Por ejemplo, una matriz simétrica real de $n \times n$ con valores propios múltiples tiene n vectores propios distintos. Obsérvese también que cada columna de la matriz $\mathbf{P}$ es un vector propio de $\mathbf{A}$ asociado con λ_i ($i = 1, 2, ..., n$).

Si se define

$$\mathbf{x} = \mathbf{Pz} \tag{9-57}$$

al sustituir la Ecuación (9-57) en la Ecuación (9-56), se obtiene

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu} \tag{9-58}$$

Definiendo

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{F} = (f_{ij})$$

se puede reescribir la Ecuación (9-58) como

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 + f_{11}u_1 + f_{12}u_2 + \cdots + f_{1r}u_r \\
\dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 + f_{21}u_1 + f_{22}u_2 + \cdots + f_{2r}u_r \\
&\vdots \\
\dot{z}_n &= \lambda_n z_n + f_{n1}u_1 + f_{n2}u_2 + \cdots + f_{nr}u_r
\end{aligned}$$

Si todos los elementos de cualquier fila de la matriz **F** $n \times r$ son nulos, entonces la variable de estado correspondiente es no controlable por cualquiera de las u_i. Por tanto, la condición de controlabilidad completa del estado es que, si los vectores propios de **A** son distintos, el sistema es de estado completamente controlable si y sólo si ninguna fila de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$ tiene todos sus elementos cero. Es importante señalar que, a fin de aplicar esta condición para controlabilidad completa del estado, se debe poner en forma diagonal la matriz $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ de la Ecuación (9-58).

Si la matriz **A** de la Ecuación (9-56) no posee vectores propios distintos, es imposible la diagonalización. En este caso, se transforma **A** en una forma canónica de Jordan. Por ejemplo, si **A** tiene valores propios λ_1, λ_1, λ_1, λ_4, λ_4, λ_6, ..., λ_n y tiene $n - 3$ vectores propios distintos, la forma canónica de Jordan de **A** es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix}
\lambda_1 & 1 & 0 & & & & & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & & & & & \\
0 & 0 & \lambda_1 & & & & & \\
& & & \lambda_4 & 1 & & & \\
& & & 0 & \lambda_4 & & & \\
& & & & & \lambda_6 & & \\
& & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & \lambda_n
\end{bmatrix}$$

Las submatrices cuadradas de la diagonal principal se denominan *bloques de Jordan.*

Supóngase que encontramos una matriz de transformación **S** tal que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{J}$$

Si se define un nuevo vector de estado **z** mediante

$$\mathbf{x} = \mathbf{Sz} \tag{9-59}$$

entonces la sustitución de la Ecuación (9-59) en la Ecuación (9-56) da

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{ASz} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Bu} \\
&= \mathbf{Jz} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Bu}
\end{aligned} \tag{9-60}$$

La condición para controlabilidad completa del estado del sistema de la Ecuación (9-56) se expresa del modo siguiente. El sistema es de estado completamente controlable si y sólo si (1) si no hay dos bloques de Jordan en **J** de la Ecuación (9-60) que estén asociados con los mismos valores propios, (2) los elementos de cualquier fila de $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}$ que corresponden a la última fila de cada bloque de Jordan no son todos cero y (3) los elementos de cada fila de $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}$ que corresponden a valores propios distintos no son todos cero.

EJEMPLO 9-12 Los sistemas siguientes son de estado completamente controlable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ \hdashline & & & -5 & 1 \\ 0 & & & 0 & -5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Los sistemas siguientes no son de estado completamente controlable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} -2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ \hdashline & & & -5 & 1 \\ 0 & & & 0 & -5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Condición para controlabilidad completa del estado en el plano *s*. La condición para controlabilidad completa del estado se puede plantear en términos de funciones de transferencia o matrices de transferencia.

Se puede demostrar que una condición necesaria y suficiente para controlabilidad completa del estado es que no ocurra una cancelación en la función de transferencia o en la matriz de transferencia. Si ocurre una cancelación, el sistema no puede controlarse en la dirección del modo cancelado.

EJEMPLO 9-13 Sea la función de transferencia siguiente:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s + 2.5}{(s + 2.5)(s - 1)}$$

Es evidente que ocurre una cancelación del factor $(s + 2.5)$ en el numerador y el denominador de esta función de transferencia. (Por tanto, se pierde un grado de libertad.) Debido a esta cancelación, este sistema no es de estado completamente controlable.

La misma condición se obtiene si se escribe esta función de transferencia en la forma de una ecuación de estado. Una representación en el espacio de estados es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2.5 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Como

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

el rango de la matriz $[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}]$ es 1. Por tanto, llegamos a la misma conclusión: el sistema no es de estado completamente controlable.

Controlabilidad de la salida. En el diseño práctico de un sistema de control, se puede necesitar controlar la salida en lugar del estado del sistema. Una controlabilidad completa del estado no es condición necesaria ni suficiente para controlar la salida del sistema. Por esta razón, es conveniente definir de forma independiente la controlabilidad completa de la salida.

Sea el sistema descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \tag{9-61}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \tag{9-62}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
$\mathbf{u}$ = vector de control (vector de dimensión r)
$\mathbf{y}$ = vector de salida (vector de dimensión n)
$\mathbf{A}$ = matriz $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz $n \times r$
$\mathbf{C}$ = matriz $m \times n$
$\mathbf{D}$ = matriz $m \times r$

Se dice que el sistema descrito mediante las Ecuaciones (9-61) y (9-62) es de salida completamente controlable si es posible construir un vector de control sin restricciones $\mathbf{u}(t)$ que transfiera cualquier salida inicial $\mathbf{y}(t_0)$ a cualquier salida final $\mathbf{y}(t_i)$ en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Es posible demostrar que la condición para controlabilidad completa de la salida es la siguiente. El sistema descrito mediante las Ecuaciones (9-61) y (9-62) es de salida completamente controlable si y sólo si la matriz $m \times (n+1)r$

$$[\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB} \mid \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \mid \cdots \mid \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \mid \mathbf{D}]$$

es de rango m. (Para una demostración, véase el Problema **A-9-16.**) Obsérvese que la presencia del término $\mathbf{Du}$ en la Ecuación (9-62) siempre ayuda a establecer la controlabilidad de la salida.

Sistema no controlable. Un sistema no controlable tiene un susbsistema que está desconectado físicamente de la entrada.

Estabilizabilidad. Para un sistema parcialmente controlable, si los modos no controlables son estables y los modos inestables son controlables, el sistema se dice entonces que es estabilizable. Por ejemplo, el sistema definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

no es de estado controlable. El modo estable que se corresponde con el valor propio -1 no es controlable. El modo inestable que corresponde al valor propio 1 es controlable. Este sistema se puede estabilizar mediante una realimentación adecuada. Así que este sistema es estabilizable.

9-7 Observabilidad

En esta sección analizaremos la observabilidad de los sistemas lineales. Sea el sistema no forzado descrito mediante las ecuaciones siguientes:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{9-63}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{9-64}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
$\mathbf{y}$ = vector de salida (vector de dimensión m)
$\mathbf{A}$ = matriz $n \times n$
$\mathbf{C}$ = matriz $m \times n$

Se dice que el sistema es completamente observable si el estado $\mathbf{x}(t_0)$ se determina a partir de la observación de $\mathbf{y}(t)$ durante un intervalo de tiempo finito, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Por tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida. El concepto de observabilidad es útil al resolver el problema de reconstruir variables de estado no medibles a partir de variables que sí lo son en el tiempo mínimo posible. En esta sección, se tratan sólo sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Por tanto, sin pérdida de generalidad, se supone que $t_0 = 0$.

El concepto de observabilidad es muy importante porque, en la práctica, la dificultad que se encuentra con el control mediante realimentación del estado es que algunas de las variables de estado no son accesibles para una medición directa, por lo que se hace necesario estimar las variables de estado no medibles para construir las señales de control. En la Sección 10-5 se demostrará que tales estimaciones de las variables de estado son posibles si y sólo si el sistema es completamente observable.

Al analizar las condiciones de observabilidad, se considera el sistema sin excitación como el que se obtiene mediante las Ecuaciones (9-63) y (9-64). La razón de esto es la siguiente. Si el sistema se describe mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

entonces,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

e $\mathbf{y}(t)$ es

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Como las matrices **A**, **B**, **C** y **D** se conocen al igual que $\mathbf{u}(t)$, los dos últimos términos del segundo miembro de esta última ecuación son cantidades conocidas. Por tanto, se pueden restar del valor observado de $\mathbf{y}(t)$. Así, a fin de investigar una condición necesaria y suficiente para observabilidad completa, basta con considerar el sistema descrito mediante las Ecuaciones (9-63) y (9-64).

Observabilidad completa de sistemas en tiempo continuo. Sea el sistema descrito mediante las Ecuaciones (9-63) y (9-64). El vector de salida $\mathbf{y}(t)$ es

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

Refiriéndose a la Ecuación (9-48) o (9-50), se tiene que

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{A}^k$$

Donde n es el grado del polinomio característico. [Obsérvese que las Ecuaciones (9-48) y (9-50) con m sustituido por n se pueden obtener a partir del polinomio característico.]

Por tanto, se obtiene

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$$

o bien

$$\mathbf{y}(t) = \alpha_0(t)\mathbf{C}\mathbf{x}(0) + \alpha_1(t)\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(0) \tag{9-65}$$

Así, si el sistema es completamente observable, dada la salida $\mathbf{y}(t)$ durante un intervalo de tiempo $0 \leqslant t \leqslant t_1$, $\mathbf{x}(0)$ se determina únicamente a partir de la Ecuación (9-65). Se demuestra que esto requiere que el rango de la matriz $nm \times n$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \hdashline \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

sea n. (Véase el Problema **A-9-19** para la obtención de esta condición.)

A partir de este análisis, se puede expresar la condición para observabilidad completa del modo siguiente. El sistema descrito por las Ecuaciones (9-63) y (9-64) es completamente observable si y sólo si la matriz $n \times nm$

$$[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid \cdots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

es de rango n, o tiene n vectores columna linealmente independientes. Esta matriz se denomina *matriz de observabilidad*.

EJEMPLO 9-14 Sea el sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

¿Es este sistema controlable y observable?

Como el rango de la matriz

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

es 2, el sistema es de estado completamente controlable.

Para la controlabilidad de salida, se calcula el rango de la matriz $[\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB}]$. Como

$$[\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB}] = [0 \quad 1]$$

el rango de esta matriz es 1. Por tanto, el sistema tiene una salida completamente controlable.

Para verificar la condición de observabilidad, examine el rango de $[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*]$. Como

$$[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el rango de $[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*]$ es 2. Por tanto, el sistema es completamente observable.

Condiciones para observabilidad completa en el plano *s*. Las condiciones para observabilidad completa también se pueden expresar en términos de funciones de transferencia o matrices de transferencia. La condición necesaria y suficiente para observabilidad completa es que no ocurra una cancelación en la función de transferencia o en la matriz de transferencia. Si ocurre una cancelación, el modo cancelado no se puede observar en la salida.

EJEMPLO 9-15 Demuestre que el siguiente sistema no es completamente observable.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{Cx}$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [4 \quad 5 \quad 1]$$

Tome en cuenta que la función de control u no afecta a la observabilidad completa del sistema. Para examinar la observabilidad completa, simplemente se hace $u = 0$. Para este sistema, se tiene que

$$[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid (\mathbf{A}^*)^2\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Considere que

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 5 & -7 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, el rango de la matriz $[\mathbf{C}^* \,\vdots\, \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \,\vdots\, (\mathbf{A}^*)^2\mathbf{C}^*]$ es menor que 3. Así, el sistema no es completamente observable.

De hecho, en la función de transferencia del sistema ocurre una cancelación. La función de transferencia entre $X_1(s)$ y $U(s)$ es

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

y la función de transferencia entre $Y(s)$ y $X_1(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = (s+1)(s+4)$$

Por tanto, la función de transferencia entre la salida $Y(s)$ y la entrada $U(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Es evidente que los dos factores $(s+1)$ se cancelan uno al otro. Esto significa que no hay condiciones iniciales $\mathbf{x}(0)$ diferentes de cero que no se determinen a partir de la medición de $y(t)$.

Comentarios. La función de transferencia no presenta cancelación si y sólo si el sistema es de estado completamente controlable y es completamente observable. Esto significa que la función de transferencia cancelada no transporta toda la información que caracteriza al sistema dinámico.

Forma alternativa de la condición para observabilidad completa. Sea el sistema descrito por las Ecuaciones (9-63) y (9-64), vuelto a escribir como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{9-66}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{9-67}$$

Supóngase que la matriz de transformación $\mathbf{P}$ transforma $\mathbf{A}$ en una matriz diagonal, o

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$$

donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal. Si se define

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$$

de esta forma, las Ecuaciones (9-66) y (9-67) pueden escribirse

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} = \mathbf{D}\mathbf{z}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z}$$

Por tanto,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{z}(0)$$

o bien

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{CP}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\mathbf{z}(0) = \mathbf{CP}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} z_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} z_2(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} z_n(0) \end{bmatrix}$$

El sistema es completamente observable si ninguna de las columnas de la matriz **CP** $m \times n$ está formada sólo por elementos cero. Esto se debe a que, si la i-ésima columna de **CP** está formada sólo por elementos cero, la variable de estado $z_i(0)$ no aparecerá en la ecuación de salida y, por tal razón, no puede determinarse a partir de la observación de $\mathbf{y}(t)$. En este caso, $\mathbf{x}(0)$, que se relaciona con $\mathbf{z}(0)$ mediante la matriz **P** no singular, no puede determinarse. (Recuérdese que esta prueba sólo se aplica si la matriz $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ está en forma diagonal.)

Si la matriz **A** no se transforma en una matriz diagonal, mediante una matriz de transformación adecuada **S**, se puede transformar **A** en su forma canónica de Jordan, o

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{J}$$

donde **J** está en la forma canónica de Jordan.

Se define

$$\mathbf{x} = \mathbf{Sz}$$

En este caso, las Ecuaciones (9-66) y (9-67) pueden escribirse

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{ASz} = \mathbf{Jz}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{CSz}$$

Por tanto,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{CS}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{z}(0)$$

El sistema es completamente observable si (1) no hay dos bloques de Jordan en **J** asociados con los mismos valores propios, (2) no hay columnas de **CS** que correspondan a la primera fila de cada bloque de Jordan que estén formadas por elementos cero y (3) no hay columnas de **CS** que correspondan a valores propios distintos que estén formadas por elementos cero.

Para aclarar la condición (2), en el Ejemplo 9-16 hemos enlazado mediante trazos discontinuos las columnas de **CS** que corresponden a la primera fila de cada bloque de Jordan.

EJEMPLO 9-16 Los sistemas siguientes son completamente observables.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad y = [1 \quad 3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ & & & -3 & 1 \\ 0 & & & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Los sistemas siguientes no son completamente observables.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hline & & & -3 & 1 \\ 0 & & & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Principio de dualidad. A continuación se analiza la relación entre controlabilidad y observabilidad. Se introducirá el principio de dualidad, debido a Kalman, para aclarar las analogías evidentes entre controlabilidad y observabilidad.

Sea el sistema S_1 descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
$\mathbf{u}$ = vector de control (vector de dimensión r)
$\mathbf{y}$ = vector de salida (vector de dimensión m)
$\mathbf{A}$ = matriz $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz $n \times r$
$\mathbf{C}$ = matriz $m \times n$

y el sistema dual S_2 definido mediante

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*\mathbf{v}$$
$$\mathbf{n} = \mathbf{B}^*\mathbf{z}$$

donde $\mathbf{z}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
$\mathbf{v}$ = vector de control (vector de dimensión m)
$\mathbf{n}$ = vector de salida (vector de dimensión r)
$\mathbf{A}^*$ = transpuesta conjugada de $\mathbf{A}$
$\mathbf{B}^*$ = transpuesta conjugada de $\mathbf{B}$
$\mathbf{C}^*$ = transpuesta conjugada de $\mathbf{C}$

El principio de dualidad plantea que el sistema S_1 es de estado completamente controlable (observable) si y sólo si el sistema S_2 es de estado completamente observable (controlable).

Para verificar este principio, se escriben las condiciones necesarias y suficientes para controlabilidad completa del estado y observabilidad completa de los sistemas S_1 y S_2.

Para el sistema S_1:

1. Una condición necesaria y suficiente para controlabilidad completa del estado es que el rango de la matriz $n \times nr$

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

sea n.

2. Una condición necesaria y suficiente para observabilidad completa es que el rango de la matriz $n \times nm$

$$[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid \cdots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

sea n.

Para el sistema S_2:

1. Una condición necesaria y suficiente para controlabilidad completa del estado es que el rango de la matriz $n \times nm$

$$[\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid \cdots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

sea n.

2. Una condición necesaria y suficiente para observabilidad completa es que el rango de la matriz de $n \times nr$

$$[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

sea n.

Si se comparan estas condiciones, la verdad de este principio es evidente. A partir de él, la observabilidad de un sistema determinado se verifica probando la controlabilidad del estado de su dual.

Detectabilidad. Para un sistema parcialmente observable, si los modos no observables son estables y los modos observables son inestables, se dice que es detectable. Obsérvese que el concepto de detectabilidad es dual al concepto de estabilizabilidad.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-9-1. Sea el sistema representado mediante la función de transferencia definida por la Ecuación (9-2), vuelta a escribir como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \tag{9-68}$$

Obtenga la siguiente forma canónica controlable de la representación en el espacio de estados para este sistema representado mediante la función de transferencia:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{9-69}$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \; \vdots \; b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \; \vdots \; \cdots \; \vdots \; b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{9-70}$$

Solución. La Ecuación (9-68) puede escribirse como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0)s^{n-1} + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)s + (b_n - a_n b_0)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

que puede modificarse a

$$Y(s) = b_0 U(s) + \hat{Y}(s) \tag{9-71}$$

donde

$$\hat{Y}(s) = \frac{(b_1 - a_1 b_0)s^{n-1} + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)s + (b_n - a_n b_0)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} U(s)$$

Se reescribe esta última ecuación en la forma siguiente:

$$\frac{\hat{Y}(s)}{(b_1 - a_1 b_0)s^{n-1} + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)s + (b_n - a_n b_0)}$$

$$= \frac{U(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} = Q(s)$$

A partir de esta última ecuación, se obtienen las dos ecuaciones siguientes:

$$s^n Q(s) = -a_1 s^{n-1} Q(s) - \cdots - a_{n-1} s Q(s) - a_n Q(s) + U(s) \tag{9-72}$$

$$\hat{Y}(s) = (b_1 - a_1 b_0)s^{n-1} Q(s) + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) s Q(s) + (b_n - a_n b_0) Q(s) \tag{9-73}$$

Se definen las variables de estado del modo siguiente:

$$X_1(s) = Q(s)$$
$$X_2(s) = sQ(s)$$
$$\vdots$$
$$X_{n-1}(s) = s^{n-2}Q(s)$$
$$X_n(s) = s^{n-1}Q(s)$$

Resulta evidente que

$$sX_1(s) = X_2(s)$$
$$sX_2(s) = X_3(s)$$
$$\vdots$$
$$sX_{n-1}(s) = X_n(s)$$

que puede volver a escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \end{aligned} \tag{9-74}$$

Teniendo en cuenta que $s^n Q(s) = sX_n(s)$, la Ecuación (9-72) se puede reescribir como

$$sX_n(s) = -a_1 X_n(s) - \cdots - a_{n-1} X_2(s) - a_n X_1(s) + U(s)$$

o bien

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + u \tag{9-75}$$

Asimismo, a partir de las Ecuaciones (9-71) y (9-73) se obtiene

$$\begin{aligned} Y(s) &= b_0 U(s) + (b_1 - a_1 b_0) s^{n-1} Q(s) + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) sQ(s) \\ &\quad + (b_n - a_n b_0) Q(s) \\ &= b_0 U(s) + (b_1 - a_1 b_0) X_n(s) + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) X_2(s) \\ &\quad + (b_n - a_n b_0) X_1(s) \end{aligned}$$

La transformada inversa de Laplace de esta ecuación de salida es

$$y = (b_n - a_n b_0) x_1 + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) x_2 + \cdots + (b_1 - a_1 b_0) x_n + b_0 u \tag{9-76}$$

Combinando las Ecuaciones (9-74) y (9-75) en una ecuación diferencial matricial, se obtiene la Ecuación (9-69). La Ecuación (9-76) puede reescribirse como la obtenida mediante la Ecuación (9-70). Se dice que las Ecuaciones (9-69) y (9-70) están en su forma canónica controlable. La Figura 9-1 muestra la representación en diagrama de bloques del sistema definido mediante las Ecuaciones (9-69) y (9-70).

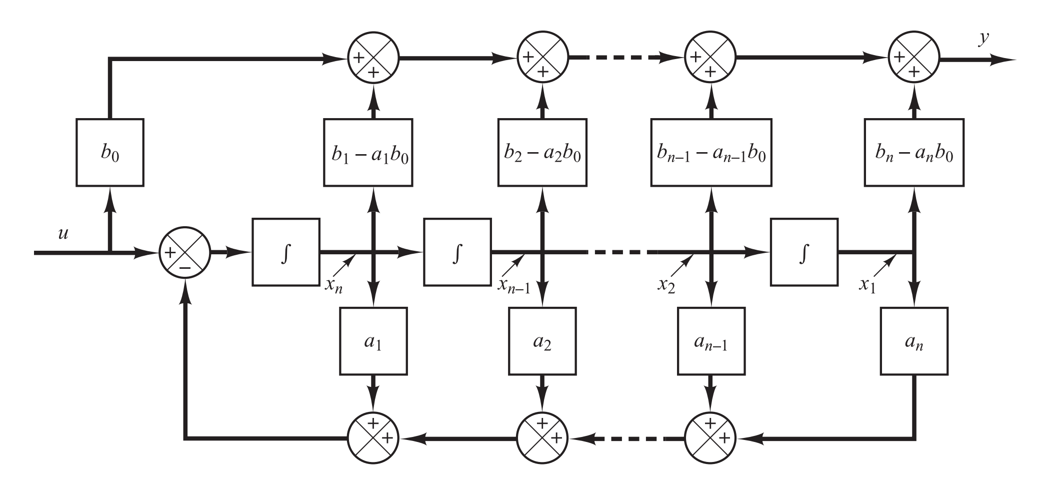


Figura 9-1. Representación en diagramas de bloques del sistema definido por las Ecuaciones (9-69) y (9-70) (forma canónica controlable).

A-9-2. Sea el sistema representado mediante la función de transferencia siguiente:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \tag{9-77}$$

Obtenga la siguiente forma canónica observable de la representación en el espacio de estados para este sistema representado mediante la función de transferencia:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u \tag{9-78}$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{9-79}$$

Solución. La Ecuación (9-77) puede modificarse a

$$s^n[Y(s) - b_0 U(s)] + s^{n-1}[a_1 Y(s) - b_1 U(s)] + \cdots$$
$$+ s[a_{n-1}Y(s) - b_{n-1}U(s)] + a_n Y(s) - b_n U(s) = 0$$

Dividiendo la ecuación completa entre s^n y reagrupando términos, se obtiene

$$Y(s) = b_0 U(s) + \frac{1}{s}[b_1 U(s) - a_1 Y(s)] + \cdots$$
$$+ \frac{1}{s^{n-1}}[b_{n-1}U(s) - a_{n-1}Y(s)] + \frac{1}{s^n}[b_n U(s) - a_n Y(s)] \tag{9-80}$$

Se definen las variables de estado de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{s}[b_1 U(s) - a_1 Y(s) + X_{n-1}(s)] \\ X_{n-1}(s) &= \frac{1}{s}[b_2 U(s) - a_2 Y(s) + X_{n-2}(s)] \\ &\vdots \\ X_2(s) &= \frac{1}{s}[b_{n-1}U(s) - a_{n-1}Y(s) + X_1(s)] \\ X_1(s) &= \frac{1}{s}[b_n U(s) - a_n Y(s)] \end{aligned} \tag{9-81}$$

La Ecuación (9-80) se puede escribir como

$$Y(s) = b_0U(s) + X_n(s) \tag{9-82}$$

Al sustituir la Ecuación (9-82) en la Ecuación (9-81) y multiplicando ambos miembros de la ecuación por s, se obtiene

$$\begin{aligned}
sX_n(s) &= X_{n-1}(s) - a_1X_n(s) + (b_1 - a_1b_0)U(s)\\
sX_{n-1}(s) &= X_{n-2}(s) - a_2X_n(s) + (b_2 - a_2b_0)U(s)\\
&\vdots\\
sX_2(s) &= X_1(s) - a_{n-1}X_n(s) + (b_{n-1} - a_{n-1}b_0)U(s)\\
sX_1(s) &= -a_nX_n(s) + (b_n + a_nb_0)U(s)
\end{aligned}$$

Tomando las transformadas inversas de Laplace de las n ecuaciones precedentes y escribiéndolas en el orden inverso, se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -a_nx_n + (b_n - a_nb_0)u\\
\dot{x}_2 &= x_1 - a_{n-1}x_n + (b_{n-1} - a_{n-1}b_0)u\\
&\vdots\\
\dot{x}_{n-1} &= x_{n-2} - a_2x_n + (b_2 - a_2b_0)u\\
\dot{x}_n &= x_{n-1} - a_1x_n + (b_1 - a_1b_0)u
\end{aligned}$$

También, la transformada inversa de Laplace de la Ecuación (9-82) da

$$y = x_n + b_0u$$

Si se reescriben las ecuaciones de estado y de salida en la forma estándar matricial, se obtienen las Ecuaciones (9-78) y (9-79). La Figura 9-2 muestra una representación en diagrama de bloques del sistema definido mediante las Ecuaciones (9-78) y (9-79).

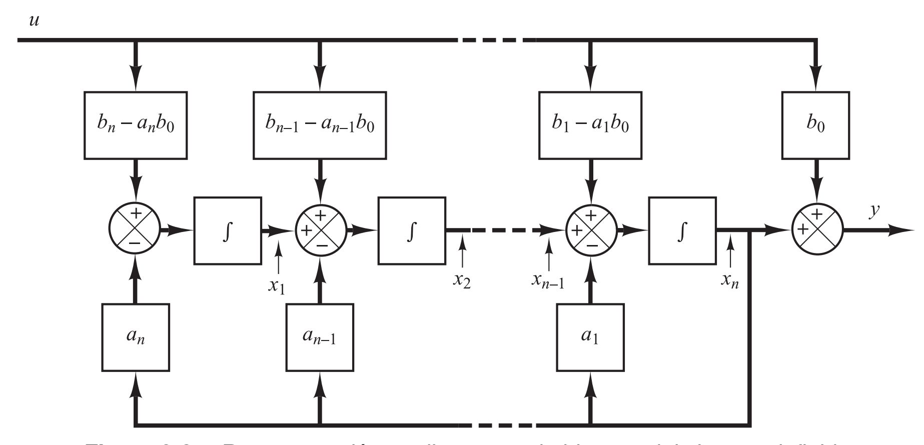


Figura 9-2. Representación en diagramas de bloques del sistema definido por las Ecuaciones (9-78) y (9-79) (forma canónica observable).

A-9-3. Sea el sistema representado por la función de transferencia siguiente:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$= b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n} \tag{9-83}$$

donde $p_i \neq p_j$. Obtenga la representación en el espacio de estados de este sistema en la siguiente forma canónica diagonal:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{9-84}$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{9-85}$$

Solución. La Ecuación (9-83) puede escribirse como

$$Y(s) = b_0 U(s) + \frac{c_1}{s+p_1} U(s) + \frac{c_2}{s+p_2} U(s) + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n} U(s) \tag{9-86}$$

Se definen las variables de estado del modo siguiente

$$X_1(s) = \frac{1}{s+p_1} U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+p_2} U(s)$$

$$\vdots$$

$$X_n(s) = \frac{1}{s+p_n} U(s)$$

que se puede reescribir como

$$sX_1(s) = -p_1 X_1(s) + U(s)$$

$$sX_2(s) = -p_2 X_2(s) + U(s)$$

$$\vdots$$

$$sX_n(s) = -p_n X_n(s) + U(s)$$

Las transformadas inversas de Laplace de estas ecuaciones dan

$$\dot{x}_1 = -p_1 x_1 + u$$
$$\dot{x}_2 = -p_2 x_2 + u$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = -p_n x_n + u \tag{9-87}$$

Estas n ecuaciones forman una ecuación de estado.

En términos de las variables de estado $X_1(s)$, $X_2(s)$, ..., $X_n(s)$, la Ecuación (9-86) se escribe como

$$Y(s) = b_0 U(s) + c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s) + \cdots + c_n X_n(s)$$

La transformada inversa de Laplace de esta última ecuación es

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n + b_0 u \tag{9-88}$$

que es la ecuación de salida.

La Ecuación (9-87) se puede expresar en la forma matricial dada por la Ecuación (9-84). La Ecuación (9-88) se puede poner en el formato de la Ecuación (9-85).

La Figura 9-3 muestra una representación en diagrama de bloques del sistema definido mediante las Ecuaciones (9-84) y (9-85).

Observe que, si se eligen las variables de estado como

$$\hat{X}_1(s) = \frac{c_1}{s + p_1} U(s)$$
$$\hat{X}_2(s) = \frac{c_2}{s + p_2} U(s)$$
$$\vdots$$
$$\hat{X}_n(s) = \frac{c_n}{s + p_n} U(s)$$

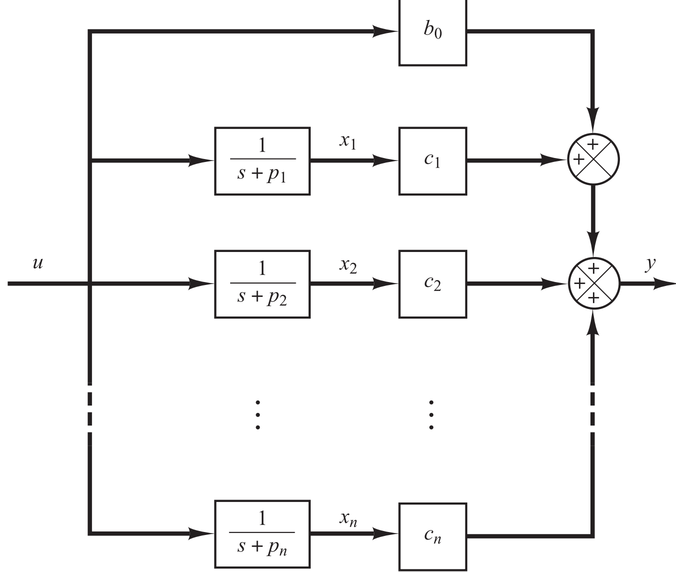


Figura 9-3. Representación en diagramas de bloques del sistema definido por las Ecuaciones (9-84) y (9-85) (forma canónica diagonal).

entonces se obtiene una representación en el espacio de estados ligeramente diferente. Esta elección de variables de estado da

$$\begin{aligned}
s\hat{X}_1(s) &= -p_1\hat{X}_1(s) + c_1U(s) \\
s\hat{X}_2(s) &= -p_2\hat{X}_2(s) + c_2U(s) \\
&\vdots \\
s\hat{X}_n(s) &= -p_n\hat{X}_n(s) + c_nU(s)
\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1 &= -p_1\hat{x}_1 + c_1u \\
\dot{\hat{x}}_2 &= -p_2\hat{x}_2 + c_2u \\
&\vdots \\
\dot{\hat{x}}_n &= -p_n\hat{x}_n + c_nu
\end{aligned} \tag{9-89}$$

Teniendo en cuenta la Ecuación (9-86), la ecuación de salida es

$$Y(s) = b_0U(s) + \hat{X}_1(s) + \hat{X}_2(s) + \cdots + \hat{X}_n(s)$$

de donde se obtiene

$$y = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \cdots + \hat{x}_n + b_0u \tag{9-90}$$

Las Ecuaciones (9-89) y (9-90) dan la siguiente representación en el espacio de estados para el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} + b_0u$$

A-9-4. Sea el sistema definido por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{(s + p_1)^3(s + p_4)(s + p_5)\cdots(s + p_n)} \tag{9-91}$$

que contiene un polo triple en $s = -p_1$. (Se supone que, a excepción de las tres primeras p, que son iguales, las p_i son diferentes entre sí.) Obtenga la forma canónica de Jordan de la representación en el espacio de estados de este sistema.

Solución. El desarrollo en fracciones simples de la Ecuación (9-91) se convierte en

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

que puede escribirse como

$$Y(s) = b_0 U(s) + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} U(s) + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} U(s)$$

$$+ \frac{c_3}{s+p_1} U(s) + \frac{c_4}{s+p_4} U(s) + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n} U(s) \qquad (9\text{-}92)$$

Se define

$$X_1(s) = \frac{1}{(s+p_1)^3} U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+p_1)^2} U(s)$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s+p_1} U(s)$$

$$X_4(s) = \frac{1}{s+p_4} U(s)$$

$$\vdots$$

$$X_n(s) = \frac{1}{s+p_n} U(s)$$

Se observa que existen las relaciones siguientes entre $X_1(s)$, $X_2(s)$ y $X_3(s)$:

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{s+p_1}$$

$$\frac{X_2(s)}{X_3(s)} = \frac{1}{s+p_1}$$

entonces, a partir de la definición anterior de las variables de estado y las relaciones precedentes, se obtiene

$$sX_1(s) = -p_1 X_1(s) + X_2(s)$$

$$sX_2(s) = -p_1 X_2(s) + X_3(s)$$

$$sX_3(s) = -p_1 X_3(s) + U(s)$$

$$sX_4(s) = -p_4 X_4(s) + U(s)$$

$$\vdots$$

$$sX_n(s) = -p_n X_n(s) + U(s)$$

Las transformadas inversas de Laplace de las n ecuaciones precedentes producen

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -p_1 x_1 + x_2 \\
\dot{x}_2 &= -p_1 x_2 + x_3 \\
\dot{x}_3 &= -p_1 x_3 + u \\
\dot{x}_4 &= -p_4 x_4 + u \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= -p_n x_n + u
\end{aligned}
$$

La ecuación de salida, Ecuación (9-92), se puede reescribir como

$$Y(s) = b_0 U(s) + c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s) + c_3 X_3(s) + c_4 X_4(s) + \cdots + c_n X_n(s)$$

La transformada inversa de Laplace de esta ecuación de salida es

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 + \cdots + c_n x_n + b_0 u$$

Por tanto, la representación en el espacio de estados del sistema para el caso en el que el polinomio del denominador contiene una raíz triple p_1 se obtiene del modo siguiente:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{ccc|cccc}
-p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -p_1 & 1 & 0 & & 0 \\
0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & -p_4 & & \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & & -p_n
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{9-93}
$$

$$
y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \tag{9-94}
$$

Se dice que la representación en el espacio de estados en la forma obtenida mediante las Ecuaciones (9-93) y (9-94) está en la forma canónica de Jordan. La Figura 9-4 muestra una representación en diagrama de bloques de dicho sistema.

A-9-5. Sea el sistema representado mediante la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25.04s + 5.008}{s^3 + 5.03247s^2 + 25.1026s + 5.008}$$

Obtenga con MATLAB una representación en el espacio de estados de este sistema.

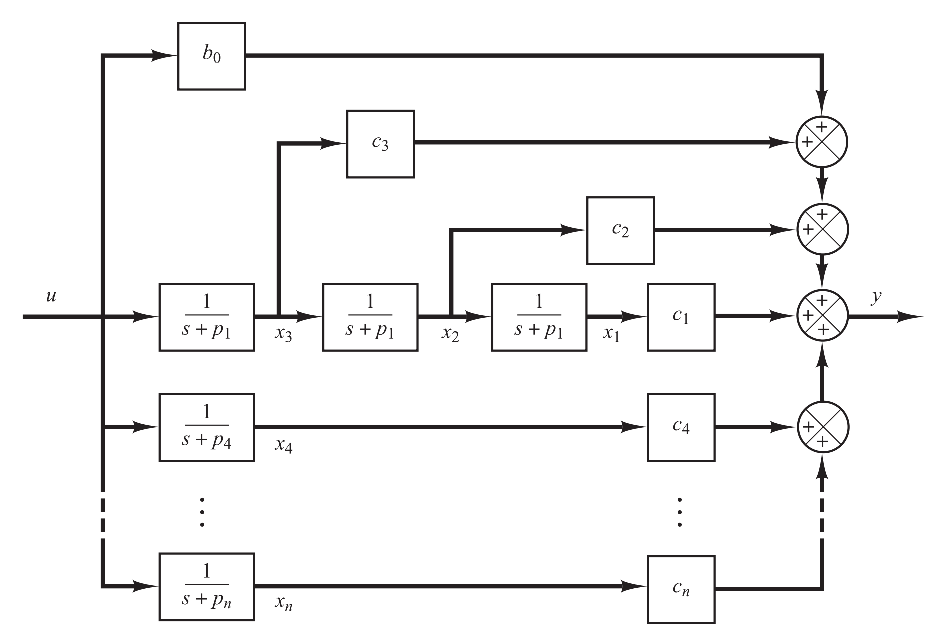


Figura 9-4. Representación en diagramas de bloques del sistema definido por las Ecuaciones (9-93) y (9-94) (forma canónica de Jordan).

Solución. La orden de MATLAB

```
[A,B,C,D] = tf2ss(num,den)
```

producirá una representación en el espacio de estados para el sistema. Véase el Programa MATLAB 9-4.

MATLAB Programa 9-4

```
num=[25.04  5.008];
den=[1  5.03247  25.1026  5.008];
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)

A=

 -5.0325  -25.1026  -5.0080
  1.0000         0        0
       0    1.0000        0

B=

 1
 0
 0

C=
       0   25.0400   5.0080

D =

 0
```

Esta es la representación de MATLAB de las ecuaciones en el espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.0325 & -25.1026 & -5.008 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 25.04 \quad 5.008] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]u$$

A-9-6. Sea el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
$\mathbf{u}$ = vector de control (vector de dimensión r)
$\mathbf{A}$ = matriz de coeficientes constantes $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz de coeficientes constantes $n \times r$

Obtenga la respuesta del sistema a cada una de las entradas siguientes:

(a) Los r componentes de $\mathbf{u}$ son funciones impulso de diferentes magnitudes.
(b) Los r componentes de $\mathbf{u}$ son funciones escalón de diversas magnitudes.
(c) Los r componentes de $\mathbf{u}$ son funciones rampa de distintas magnitudes.

Solución.

(a) *Respuesta impulso*: Si se tiene en cuenta la Ecuación (9-43), la solución de la ecuación de estado dada es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

Al sustituir t_0 por $0-$ dentro de esta solución, se obtiene

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0-) + \int_{0-}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

Se escribe el impulso de entrada $\mathbf{u}(t)$ como

$$\mathbf{u}(t) = \delta(t)\mathbf{w}$$

donde $\mathbf{w}$ es un vector cuyas componentes son las magnitudes de las r funciones impulso aplicadas en $t = 0$. La solución de la ecuación de estado cuando se tiene la entrada impulso $\delta(t)\mathbf{w}$ en $t = 0$ es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0-) + \int_{0-}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\delta(\tau)\mathbf{w}\,d\tau$$

$$= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0-) + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{w} \tag{9-95}$$

(b) *Respuesta escalón*: Si se escribe el escalón de entrada $\mathbf{u}(t)$ como

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}$$

donde **k** es un vector cuyas componentes son las magnitudes de las r funciones escalón aplicadas en $t = 0$. La solución a la entrada escalón en $t = 0$ se obtiene mediante

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bk}\,d\tau \\
&= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\left[\int_0^t \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\tau + \frac{\mathbf{A}^2\tau^2}{2!} - \cdots\right)d\tau\right]\mathbf{Bk} \\
&= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\left(\mathbf{I}t - \frac{\mathbf{A}t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^2t^3}{3!} - \cdots\right)\mathbf{Bk}
\end{aligned}$$

Si **A** es no singular, entonces esta última ecuación se puede simplificar para dar

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}[-(\mathbf{A}^{-1})(e^{-\mathbf{A}t} - \mathbf{I})]\mathbf{Bk} \\
&= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I})\mathbf{Bk} \qquad (9\text{-}96)
\end{aligned}$$

(c) *Respuesta rampa*: Si se escribe la rampa de entrada $\mathbf{u}(t)$ como

$$\mathbf{u}(t) = t\mathbf{v}$$

donde **v** es un vector cuyas componentes son las magnitudes de funciones rampa aplicadas en $t = 0$. La solución a la entrada rampa $t\mathbf{v}$ aplicada en $t = 0$ es

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\tau\mathbf{v}\,d\tau \\
&= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\tau\,d\tau\mathbf{Bv} \\
&= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\left(\frac{\mathbf{I}}{2}t^2 - \frac{2\mathbf{A}}{3!}t^3 + \frac{3\mathbf{A}^2}{4!}t^4 - \frac{4\mathbf{A}^3}{5!}t^5 + \cdots\right)\mathbf{Bv}
\end{aligned}$$

Si **A** es no singular, esta última ecuación se puede simplificar para dar

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + (\mathbf{A}^{-2})(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I} - \mathbf{A}t)\mathbf{Bv} \\
&= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + [\mathbf{A}^{-2}(e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}) - \mathbf{A}^{-1}t]\mathbf{Bv} \qquad (9\text{-}97)
\end{aligned}$$

A-9-7. Obtenga la respuesta $y(t)$ del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -0.5\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.5\\ 0\end{bmatrix}u, \qquad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

donde $u(t)$ es la entrada escalón unitario que ocurre en $t = 0$, o

$$u(t) = 1(t)$$

Solución. Para este sistema

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1 & -0.5\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}0.5\\ 0\end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estados $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ puede obtenerse del modo siguiente:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Como

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix} s+1 & 0.5 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{s^2+s+0.5}\begin{bmatrix} s & -0.5 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{s+0.5-0.5}{(s+0.5)^2+0.5^2} & \dfrac{-0.5}{(s+0.5)^2+0.5^2} \\ \dfrac{1}{(s+0.5)^2+0.5^2} & \dfrac{s+0.5+0.5}{(s+0.5)^2+0.5^2} \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$\mathbf{\Phi}(t)=e^{\mathbf{A}t}=\mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-0.5t}(\cos 0.5t-\operatorname{sen} 0.5t) & -e^{-0.5t}\operatorname{sen} 0.5t \\ 2e^{-0.5t}\operatorname{sen} 0.5t & e^{-0.5t}(\cos 0.5t+\operatorname{sen} 0.5t) \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{x}(0)=0$, si se tiene en cuenta la Ecuación (9-96), se deduce que

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)+\mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}t}-\mathbf{I})\mathbf{B}k$$

$$=\mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}t}-\mathbf{I})\mathbf{B}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5e^{-0.5t}(\cos 0.5t-\operatorname{sen} 0.5t)-0.5 \\ e^{-0.5t}\operatorname{sen} 0.5t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-0.5t}\operatorname{sen} 0.5t \\ -e^{-0.5t}(\cos 0.5t+\operatorname{sen} 0.5t)+1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la salida $y(t)$ se obtiene mediante

$$y(t)=[1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=x_1=e^{-0.5t}\operatorname{sen} 0.5t$$

A-9-8. El teorema de Cayley-Hamilton expresa que toda matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ satisface su propia ecuación característica. Sin embargo, la ecuación característica no es necesariamente la ecuación escalar de grado mínimo que satisface $\mathbf{A}$. El polinomio de grado mínimo que tiene $\mathbf{A}$ como raíz se denomina *polinomio mínimo*. Es decir, el polinomio mínimo de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ se define como el polinomio $\phi(\lambda)$, de grado mínimo,

$$\phi(\lambda)=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m, \qquad m \leqslant n$$

tal que $\phi(\mathbf{A})=\mathbf{0}$, o

$$\phi(\mathbf{A})=\mathbf{A}^m+a_1\mathbf{A}^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\mathbf{A}+a_m\mathbf{I}=\mathbf{0}$$

El polinomio mínimo juega un papel importante en el cálculo de polinomios de una matriz $n \times n$.

Suponga que $d(\lambda)$, polinomio en λ, es el máximo común divisor de todos los elementos de $\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$. Demuestre que, si se selecciona 1 como el coeficiente del término de $d(\lambda)$ de mayor grado en λ, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ se obtiene mediante

$$\phi(\lambda)=\frac{|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|}{d(\lambda)}$$

Solución. Por hipótesis el máximo común divisor de la matriz $\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$ es $d(\lambda)$. Por tanto,

$$\operatorname{adj}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=d(\lambda)\mathbf{B}(\lambda)$$

donde el máximo común divisor de los n^2 elementos (que son funciones de λ) de $\mathbf{B}(\lambda)$ es la unidad. Como

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathrm{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{I}$$

se obtiene

$$d(\lambda)(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\mathbf{I} \tag{9-98}$$

a partir de lo cual se encuentra que $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ es divisible entre $d(\lambda)$. Se puede escribir

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = d(\lambda)\psi(\lambda) \tag{9-99}$$

Como el coeficiente del término de $d(\lambda)$ de mayor grado en λ se ha elegido igual a 1, también es 1 el coeficiente del término de $\psi(\lambda)$ de mayor grado en λ. A partir de las Ecuaciones (9-98) y (9-99), se tiene que

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}(\lambda) = \psi(\lambda)\mathbf{I}$$

Por tanto,

$$\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

Observe que $\psi(\lambda)$ se puede escribir como:

$$\psi(\lambda) = g(\lambda)\phi(\lambda) + \alpha(\lambda)$$

donde $\alpha(\lambda)$ tiene un grado menor que $\phi(\lambda)$. Como $\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ y $\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, se debe tener $\alpha(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Dado que $\phi(\lambda)$ es el polinomio mínimo, $\alpha(\lambda)$ debe ser idénticamente cero, o

$$\psi(\lambda) = g(\lambda)\phi(\lambda)$$

Observe que, debido a que $\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, se puede escribir

$$\phi(\lambda)\mathbf{I} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{C}(\lambda)$$

Por tanto,

$$\psi(\lambda)\mathbf{I} = g(\lambda)\phi(\lambda)\mathbf{I} = g(\lambda)(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{C}(\lambda)$$

Como $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}(\lambda) = \psi(\lambda)\mathbf{I}$, se obtiene

$$\mathbf{B}(\lambda) = g(\lambda)\mathbf{C}(\lambda)$$

Observe que el máximo común divisor de los n^2 elementos de $\mathbf{B}(\lambda)$ es la unidad. Por tanto,

$$g(\lambda) = 1$$

Así,

$$\psi(\lambda) = \phi(\lambda)$$

Por tal razón, a partir de esta última ecuación y de la Ecuación (9-99), se deduce

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|}{d(\lambda)}$$

A-9-9. Si una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tiene n valores propios distintos, el polinomio mínimo de $\mathbf{A}$ es idéntico al polinomio característico. También, si los valores propios múltiples de $\mathbf{A}$ se enlazan en una cadena de Jordan, el polinomio mínimo y el polinomio característico son idénticos. Sin embargo, si los valores propios múltiples de $\mathbf{A}$ no se enlazan en una cadena de Jordan, el polinomio mínimo es de un grado menor que el polinomio característico.

Usando como ejemplos las siguientes matrices **A** y **B**, verifique los enunciados anteriores con respecto al polinomio mínimo cuando hay valores propios múltiples.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución. Primero considere la matriz **A**. El polinomio característico está dado por

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -4 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

De esta manera, los valores propios de **A** son 2, 2 y 1. Se puede demostrar que la forma canónica de Jordan de **A** es

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y que los valores propios múltiples están enlazados en la cadena de Jordan tal como se observa.

Para determinar el polinomio mínimo, primero se obtiene adj($\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$). Esto se logra mediante

$$\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} (\lambda - 2)(\lambda - 1) & (\lambda + 11) & 4(\lambda - 2) \\ 0 & (\lambda - 2)(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 3(\lambda - 2) & (\lambda - 2)^2 \end{bmatrix}$$

Observe que no hay un común divisor de todos los elementos de adj($\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$). Por tanto, $d(\lambda) = 1$. Así, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ es idéntico al polinomio característico, o

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1) \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 \end{aligned}$$

Un cálculo simple demuestra que

$$\mathbf{A}^3 - 5\mathbf{A}^2 + 8\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 72 & 28 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 21 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 4 & 16 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

pero

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 16 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

Por tanto, se ha demostrado que el polinomio mínimo y el polinomio característico de esta matriz **A** son iguales.

A continuación, se considera la matriz **B**. El polinomio característico está dado por

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

Un cálculo simple revela que la matriz **B** tiene tres vectores propios y la forma canónica de Jordan de **B** se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, los valores propios múltiples no están enlazados. Para obtener el polinomio mínimo, primero se calcula adj$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B})$:

$$\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} (\lambda - 2)(\lambda - 1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 2)(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 3(\lambda - 2) & (\lambda - 2)^2 \end{bmatrix}$$

a partir de lo cual es evidente que

$$d(\lambda) = \lambda - 2$$

Por tanto,

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}|}{d(\lambda)} = \frac{(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)}{\lambda - 2} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Como comprobación, se calcula $\phi(\mathbf{B})$:

$$\phi(\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2 - 3\mathbf{B} + 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Para la matriz **B** dada, el polinomio mínimo es un grado menor que el polinomio característico. Como se observa aquí, si no están enlazados los valores propios múltiples de una matriz $n \times n$ en una cadena de Jordan, el polinomio mínimo es de un grado menor que el polinomio característico.

A-9-10. Demuestre mediante el polinomio mínimo, que la inversa de una matriz **A** no singular se expresa como un polinomio en **A** con coeficientes escalares, del modo siguiente:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{a_m}(\mathbf{A}^{m-1} + a_1\mathbf{A}^{m-2} + \cdots + a_{m-2}\mathbf{A} + a_{m-1}\mathbf{I}) \tag{9-100}$$

donde $a_1, a_2, ..., a_m$ son coeficientes del polinomio mínimo

$$\phi(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

Así, obtenga la inversa de la matriz **A** siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución. Para una matriz **A** no singular, el polinomio mínimo $\phi(\mathbf{A})$ se escribe como

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^m + a_1\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\mathbf{A} + a_m\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

donde $a_m \neq 0$. Por tanto,

$$\mathbf{I} = -\frac{1}{a_m}(\mathbf{A}^m + a_1\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_{m-2}\mathbf{A}^2 + a_{m-1}\mathbf{A})$$

Premultiplicando por $\mathbf{A}^{-1}$, se obtiene

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{a_m}(\mathbf{A}^{m-1} + a_1\mathbf{A}^{m-2} + \cdots + a_{m-2}\mathbf{A} + a_{m-1}\mathbf{I})$$

que es la Ecuación (9-100).

Para la matriz **A** dada, $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ se obtiene como

$$\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 3 & 2\lambda + 6 & -4 \\ 3\lambda + 7 & \lambda^2 + 2\lambda - 3 & -2\lambda + 2 \\ \lambda + 1 & 2 & \lambda^2 - 7 \end{bmatrix}$$

Es evidente que no hay un común divisor $d(\lambda)$ de todos los elementos de $\text{adj}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Por tanto, $d(\lambda) = 1$. En consecuencia, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ se obtiene mediante

$$\phi(\lambda) = \frac{|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|}{d(\lambda)} = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

Así, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ es igual que el polinomio característico.

Como el polinomio característico es

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda - 17$$

se obtiene

$$\phi(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda - 17$$

Si se identifican los coeficientes a_i del polinomio mínimo (que en este caso es igual al polinomio característico), se tiene que

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = -7, \qquad a_3 = -17$$

Así, la inversa de **A** se obtiene a partir de la Ecuación (9-100) del modo siguiente:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{a_3}(\mathbf{A}^2 + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{I}) = \frac{1}{17}(\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} - 7\mathbf{I})$$

$$= \frac{1}{17}\left\{\begin{bmatrix} 7 & 0 & -4 \\ -2 & 7 & 8 \\ -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 7 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & \frac{6}{17} & -\frac{4}{17} \\ \frac{7}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{2}{17} & -\frac{7}{17} \end{bmatrix}$$

A-9-11. Demuestre que si se diagonaliza la matriz **A**, entonces

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1}$$

donde **P** es una matriz de transformación de diagonalización que convierte **A** en una matriz diagonal, o $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$, donde **D** es una matriz diagonal.

Demuestre también que si una matriz **A** se transforma a la forma canónica de Jordan, entonces

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1}$$

donde **S** es una matriz de transformación que convierte **A** en una forma canónica de Jordan **J**, o $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{J}$, donde **J** es una forma canónica de Jordan.

Solución. Considere la ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Si se diagonaliza una matriz cuadrada, entonces existe una matriz de diagonalización (una matriz de transformación) que se obtiene mediante un método estándar. Suponga que **P** es una matriz de diagonalización para **A**. Si se define

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}$$

entonces

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}$$

donde **D** es una matriz diagonal. La solución de esta última ecuación es

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = e^{\mathbf{D}t}\hat{\mathbf{x}}(0)$$

Por tanto,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

Considerando que $\mathbf{x}(t)$ también se obtiene mediante la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

se obtiene $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1}$, o

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \tag{9-101}$$

A continuación, se analiza el caso en el que la matriz $\mathbf{A}$ se transforma en la forma canónica de Jordan. Se considera otra vez la ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

En primer lugar se obtiene una matriz de transformación $\mathbf{S}$ que convierte la matriz $\mathbf{A}$ en la forma canónica de Jordan de modo que

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{J}$$

donde $\mathbf{J}$ es una matriz en la forma canónica de Jordan. Si se define

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}$$

entonces

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\hat{\mathbf{x}}$$

La solución de esta última ecuación es

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = e^{\mathbf{J}t}\hat{\mathbf{x}}(0)$$

Por tanto,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

Como la solución $\mathbf{x}(t)$ puede también expresarse mediante la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

se obtiene

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1}$$

Observe que $e^{\mathbf{J}t}$ es una matriz triangular [lo que significa que los elementos que están por debajo (o por encima, como puede ocurrir en este caso) de la diagonal principal son cero] cuyos elementos son $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, $\frac{1}{2}t^2e^{\lambda t}$, y así sucesivamente. Por ejemplo, si la matriz $\mathbf{J}$ está en la siguiente forma canónica de Jordan:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

Análogamente, si

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{ccc:cc:cc} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ \hdashline & & & \lambda_4 & 1 & & \\ & & & 0 & \lambda_4 & & \\ \hdashline & & & & & \lambda_6 & \\ 0 & & & & & & \lambda_7 \end{array}\right]$$

entonces

$$e^{\mathbf{J}t} = \left[\begin{array}{ccc:cc:cc} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda_1 t} & & & & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & & & & \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & & & & \\ \hdashline & & & e^{\lambda_4 t} & te^{\lambda_4 t} & & \\ & & & 0 & e^{\lambda_4 t} & & \\ \hdashline & & & & & e^{\lambda_6 t} & 0 \\ 0 & & & & & 0 & e^{\lambda_7 t} \end{array}\right]$$

A-9-12. Sea el polinomio siguiente en λ de grado $m - 1$, donde se supone que $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ son distintos:

$$p_k(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda - \lambda_m)}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_m)}$$

donde $k = 1, 2, ..., m$. Observe que

$$p_k(\lambda_i) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = k \\ 0, & \text{si} \quad i \neq k \end{cases}$$

Así, el polinomio $f(\lambda)$ de grado $m - 1$,

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k) p_k(\lambda)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k) \frac{(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda - \lambda_m)}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_m)}$$

toma los valores $f(\lambda_k)$ en los puntos λ_k. Esta última ecuación se conoce como *fórmula de interpolación de Lagrange*. El polinomio $f(\lambda)$ de grado $m - 1$ se determina a partir de los m datos independientes $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, ..., $f(\lambda_m)$. Es decir, el polinomio $f(\lambda)$ pasa por m puntos $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, ..., $f(\lambda_m)$. Como $f(\lambda)$ es un polinomio de grado $m - 1$, está determinado de forma única. Cualquier otra representación del polinomio de grado $m - 1$ se reduce al polinomio de Lagrange $f(\lambda)$.

Suponiendo que los valores propios de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ son distintos, sustituya λ por $\mathbf{A}$ en el polinomio $p_k(\lambda)$. Así se obtiene

$$p_k(\mathbf{A}) = \frac{(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_{k-1}\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_{k+1}\mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_m\mathbf{I})}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_m)}$$

Observe que $p_k(\mathbf{A})$ es un polinomio en $\mathbf{A}$ de grado $m - 1$. También considere que

$$p_k(\lambda_i\mathbf{I}) = \begin{cases} \mathbf{I}, & \text{si} \quad i = k \\ \mathbf{0}, & \text{si} \quad i \neq k \end{cases}$$

Ahora defina

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k)p_k(\mathbf{A})$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k) \frac{(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_{k-1}\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_{k+1}\mathbf{I}) \cdots (\mathbf{A} - \lambda_m\mathbf{I})}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_m)} \tag{9-102}$$

La Ecuación (9-102) se conoce como fórmula de interpolación de Sylvester, y es equivalente a la ecuación siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \mathbf{I} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m & \mathbf{A} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_m^2 & \mathbf{A}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} & \mathbf{A}^{m-1} \\ f(\lambda_1) & f(\lambda_2) & \cdots & f(\lambda_m) & f(\mathbf{A}) \end{vmatrix} = \mathbf{0} \tag{9-103}$$

Las Ecuaciones (9-102) y (9-103) se usan con frecuencia para evaluar las funciones $f(\mathbf{A})$ de la matriz $\mathbf{A}$, por ejemplo, $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, $e^{\mathbf{A}t}$, y así sucesivamente. Observe que la Ecuación (9-103) también puede escribirse como

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & f(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} & f(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} & f(\lambda_m) \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \cdots & \mathbf{A}^{m-1} & f(\mathbf{A}) \end{vmatrix} = \mathbf{0} \tag{9-104}$$

Demuestre que las Ecuaciones (9-102) y (9-103) son equivalentes. Para simplificar los argumentos, suponga que $m = 4$.

Solución. La Ecuación (9-103), en la que $m = 4$, se puede desarrollar como sigue:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{I} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \mathbf{A} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \mathbf{A}^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \mathbf{A}^3 \\ f(\lambda_1) & f(\lambda_2) & f(\lambda_3) & f(\lambda_4) & f(\mathbf{A}) \end{vmatrix}$$

$$= f(\mathbf{A}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} - f(\lambda_4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{I} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \mathbf{A} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \mathbf{A}^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \mathbf{A}^3 \end{vmatrix}$$

$$+ f(\lambda_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{I} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4 & \mathbf{A} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_4^2 & \mathbf{A}^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_4^3 & \mathbf{A}^3 \end{vmatrix} - f(\lambda_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{I} \\ \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_4 & \mathbf{A} \\ \lambda_1^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \mathbf{A}^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \mathbf{A}^3 \end{vmatrix}$$

$$+ f(\lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{I} \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \mathbf{A} \\ \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & \mathbf{A}^2 \\ \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 & \mathbf{A}^3 \end{vmatrix}$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} = (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)$$

y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{I} \\ \lambda_i & \lambda_j & \lambda_k & \mathbf{A} \\ \lambda_i^2 & \lambda_j^2 & \lambda_k^2 & \mathbf{A}^2 \\ \lambda_i^3 & \lambda_j^3 & \lambda_k^3 & \mathbf{A}^3 \end{vmatrix} = (\mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})(\lambda_k - \lambda_j)(\lambda_k - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_i)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta = {} & f(\mathbf{A})[(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)] \\ & - f(\lambda_4)[(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)] \\ & + f(\lambda_3)[(\mathbf{A} - \lambda_4\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)] \\ & - f(\lambda_2)[(\mathbf{A} - \lambda_4\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)] \\ & + f(\lambda_1)[(\mathbf{A} - \lambda_4\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)] \\ = {} & \mathbf{0} \end{aligned}$$

Resolviendo para $f(\mathbf{A})$ en esta última ecuación, se obtiene

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_1)\frac{(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_4\mathbf{I})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)} + f(\lambda_2)\frac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_4\mathbf{I})}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}$$

$$+ f(\lambda_3)\frac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_4\mathbf{I})}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)} + f(\lambda_4)\frac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k)\frac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_{k-1}\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_{k+1}\mathbf{I})\cdots(\mathbf{A}-\lambda_m\mathbf{I})}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k-\lambda_m)}$$

donde $m = 4$. Por tanto, se ha demostrado la equivalencia de las Ecuaciones (9-102) y (9-103). Aunque se supuso que $m = 4$, el argumento completo se extiende a un entero positivo m arbitrario. (Para el caso en el que la matriz A contiene valores propios múltiples, consulte el Problema **A-9-13**.)

A-9-13. Considere la fórmula de interpolación de Sylvester en la forma dada por la Ecuación (9-104):

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & f(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} & f(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} & f(\lambda_m) \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \cdots & \mathbf{A}^{m-1} & f(\mathbf{A}) \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Esta fórmula para la determinación de $f(\mathbf{A})$ se aplica al caso en el que el polinomio mínimo de $\mathbf{A}$ sólo tiene raíces distintas.

Suponga que el polinomio mínimo de $\mathbf{A}$ tiene raíces múltiples. De este modo, las filas del determinante, correspondientes a las raíces múltiples, se vuelven idénticas, y, por tanto, se hace necesaria una modificación del determinante en la Ecuación (9-104).

Modifique la forma de la fórmula de interpolación de Sylvester obtenida mediante la Ecuación (9-104) cuando el polinomio mínimo de $\mathbf{A}$ tiene raíces múltiples. Al obtener una ecuación determinante modificada, suponga que existen tres raíces iguales ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) en el polinomio mínimo de $\mathbf{A}$, y que hay otras raíces (λ_4, λ_5, ..., λ_m) que son distintas.

Solución. Como el polinomio mínimo de $\mathbf{A}$ contiene tres raíces iguales, el polinomio mínimo $\phi(\lambda)$ se escribe como

$$\phi(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m$$
$$= (\lambda-\lambda_1)^3(\lambda-\lambda_4)(\lambda-\lambda_5)\cdots(\lambda-\lambda_m)$$

Una función arbitraria $f(\mathbf{A})$ de una matriz $\mathbf{A}$ $n \times n$ se escribe como

$$f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})\phi(\mathbf{A}) + \alpha(\mathbf{A})$$

donde el polinomio mínimo $\phi(\mathbf{A})$ es de grado m y $\alpha(\mathbf{A})$ es un polinomio en $\mathbf{A}$ de grado $m - 1$ o menor. Por tanto, se tiene que

$$f(\lambda) = g(\lambda)\phi(\lambda) + \alpha(\lambda)$$

donde $\alpha(\lambda)$ es un polinomio en λ de grado $m - 1$ o menor, que se puede escribir como

$$\alpha(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} \qquad (9\text{-}105)$$

En este caso, se tiene que

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= g(\lambda)\phi(\lambda) + \alpha(\lambda) \\ &= g(\lambda)[(\lambda - \lambda_1)^3(\lambda - \lambda_4) \cdots (\lambda - \lambda_m)] + \alpha(\lambda) \end{aligned} \tag{9-106}$$

Al sustituir λ por λ_1, λ_4 , ..., λ_m en la Ecuación (9-106), se obtienen las $m - 2$ ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1) &= \alpha(\lambda_1) \\ f(\lambda_4) &= \alpha(\lambda_4) \\ &\vdots \\ f(\lambda_m) &= \alpha(\lambda_m) \end{aligned} \tag{9-107}$$

Diferenciando la Ecuación (9-106) con respecto a λ, se deduce

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 h(\lambda) + \frac{d}{d\lambda} \alpha(\lambda) \tag{9-108}$$

donde

$$(\lambda - \lambda_1)^2 h(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} [g(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^3(\lambda - \lambda_4) \cdots (\lambda - \lambda_m)]$$

La sustitución de λ por λ_1 en la Ecuación (9-108) da

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_1} = f'(\lambda_1) = \frac{d}{d\lambda} \alpha(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_1}$$

Refiriéndose a la Ecuación (9-105), esta última ecuación se convierte en

$$f'(\lambda_1) = \alpha_1 + 2\alpha_2\lambda_1 + \cdots + (m-1)\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-2} \tag{9-109}$$

Análogamente, diferenciando la Ecuación (9-106) dos veces con respecto a λ, y sustituyendo λ por λ_1, se obtiene

$$\frac{d^2}{d^2\lambda} f(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_1} = f''(\lambda_1) = \frac{d^2}{d\lambda^2} \alpha(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_1}$$

Esta última ecuación se escribe como

$$f''(\lambda_1) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3\lambda_1 + \cdots + (m-1)(m-2)\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-3} \tag{9-110}$$

Si se vuelven a escribir las Ecuaciones (9-110), (9-109) y (9-107), se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha_2 + 3\alpha_3\lambda_1 + \cdots + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-3} &= \frac{f''(\lambda_1)}{2} \\ \alpha_1 + 2\alpha_2\lambda_1 + \cdots + (m-1)\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-2} &= f'(\lambda_1) \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda_1^{m-1} &= f(\lambda_1) \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_4 + \alpha_2\lambda_4^2 + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda_4^{m-1} &= f(\lambda_4) \\ &\vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_m + \alpha_2\lambda_m^2 + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda_m^{m-1} &= f(\lambda_m) \end{aligned} \tag{9-111}$$

Estas m ecuaciones simultáneas determinan los α_k valores (donde $k = 0, 1, 2, ..., m-1$). Considerando que $\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, debido a que se trata de un polinomio mínimo, se obtiene $f(\mathbf{A})$ del modo siguiente:

$$f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})\phi(\mathbf{A}) + \alpha(\mathbf{A}) = \alpha(\mathbf{A})$$

Por tanto, refiriéndose a la Ecuación (9-105), se tiene que

$$f(\mathbf{A}) = \alpha(\mathbf{A}) = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} \tag{9-112}$$

donde los α_k valores se obtienen en términos de $f(\lambda_1)$, $f'(\lambda_1)$, $f''(\lambda_1)$, $f(\lambda_4)$, $f(\lambda_5)$, ..., $f(\lambda_m)$. En función de la ecuación determinante, $f(\mathbf{A})$ se obtiene despejando la ecuación siguiente:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}\lambda_1^{m-3} & \dfrac{f''(\lambda_1)}{2} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & (m-1)\lambda_1^{m-2} & f'(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & f(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \cdots & \lambda_4^{m-1} & f(\lambda_4) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \lambda_m^3 & \cdots & \lambda_m^{m-1} & f(\lambda_m) \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \mathbf{A}^3 & \cdots & \mathbf{A}^{m-1} & f(\mathbf{A}) \end{vmatrix} = \mathbf{0} \tag{9-113}$$

La Ecuación (9-113) muestra la modificación deseada en la forma del determinante. Esta ecuación da la forma de la fórmula de interpolación de Sylvester cuando el polinomio mínimo de **A** contiene tres raíces iguales. (Será evidente la modificación necesaria de la forma del determinante para otros casos.)

A-9-14. Utilizando la fórmula de interpolación de Sylvester, calcule $e^{\mathbf{A}t}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución. Teniendo en cuenta el Problema **A-9-9**, el polinomio característico y el polinomio mínimo son iguales para esta matriz **A**. El polinomio mínimo (polinomio característico) se obtiene mediante

$$\phi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$$

Observe que $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 1$. Si se considera la Ecuación (9-112) y que $f(\mathbf{A})$ en este problema es $e^{\mathbf{A}t}$, se tiene que

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2$$

donde $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ y $\alpha_2(t)$ se determinan a partir de las ecuaciones

$$\alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_1 = te^{\lambda_1 t}$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 = e^{\lambda_1 t}$$

$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_3 + \alpha_2(t)\lambda_3^2 = e^{\lambda_3 t}$$

Al sustituir $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_3 = 1$ en estas tres ecuaciones, se obtiene

$$\alpha_1(t) + 4\alpha_2(t) = te^{2t}$$
$$\alpha_0(t) + 2\alpha_1(t) + 4\alpha_2(t) = e^{2t}$$
$$\alpha_0(t) + \alpha_1(t) + \alpha_2(t) = e^{t}$$

Despejando $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ y α_2(t), se deduce

$$\alpha_0(t) = 4e^t - 3e^{2t} + 2te^{2t}$$
$$\alpha_1(t) = -4e^t + 4e^{2t} - 3te^{2t}$$
$$\alpha_2(t) = e^t - e^{2t} + te^{2t}$$

Por tanto,

$$e^{\mathbf{A}t} = (4e^t - 3e^{2t} + 2te^{2t})\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (-4e^t + 4e^{2t} - 3te^{2t})\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$+ (e^t - e^{2t} + te^{2t})\begin{bmatrix} 4 & 16 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & 12e^t - 12e^{2t} + 13te^{2t} & -4e^t + 4e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & -3e^t + 3e^{2t} & e^t \end{bmatrix}$$

A-9-15. Demuestre que el sistema descrito mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{9-114}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{9-115}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
$\mathbf{u}$ = vector de control (vector de dimensión r)
$\mathbf{y}$ = vector de salida (vector de dimensión m) $(m \leqslant n)$
$\mathbf{A}$ = matriz $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz $n \times r$
$\mathbf{C}$ = matriz $m \times n$

es de salida completamente controlable si y sólo si la matriz $\mathbf{P}$ compuesta de $m \times nr$, donde

$$\mathbf{P} = [\mathbf{CB} \,\vdots\, \mathbf{CAB} \,\vdots\, \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}]$$

es de rango m. (Observe que controlabilidad completa del estado no es condición necesaria ni suficiente para controlabilidad completa de la salida.)

Solución. Suponga que la salida del sistema es controlable y que la salida $\mathbf{y}(t)$ comenzando a partir de cualquier $\mathbf{y}(0)$, la salida inicial, puede transferirse al origen del espacio de salida en un intervalo de tiempo finito $0 \leqslant t \leqslant T$. Es decir,

$$\mathbf{y}(T) = \mathbf{C}\mathbf{x}(T) = \mathbf{0} \tag{9-116}$$

Como la solución de la Ecuación (9-114) es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\left[\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau\right]$$

en $t = T$, se tiene

$$\mathbf{x}(T) = e^{\mathbf{A}T}\left[\mathbf{x}(0) + \int_0^T e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau\right] \tag{9-117}$$

Si se sustituye la Ecuación (9-117) en la Ecuación (9-116), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(T) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(T)\\ &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\left[\mathbf{x}(0) + \int_0^T e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau\right] = \mathbf{0}\end{aligned} \tag{9-118}$$

Por otra parte, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{C}\mathbf{x}(0)$. Observe que controlabilidad completa de la salida significa que el vector $\mathbf{C}\mathbf{x}(0)$ genera el espacio de salida m dimensional. Como $e^{\mathbf{A}T}$ es no singular, si $\mathbf{C}\mathbf{x}(0)$ genera el espacio de salida de m dimensiones, también $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(0)$ lo hace, y viceversa. A partir de la Ecuación (9-118), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(0) &= -\mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\int_0^T e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau\\ &= -\mathbf{C}\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(T-\tau)\,d\tau\end{aligned}$$

Observe que $\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(T-\tau)\,d\tau$ se expresa como suma de $\mathbf{A}^i\mathbf{B}_j$; es decir,

$$\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(T-\tau)\,d\tau = \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{r}\gamma_{ij}\mathbf{A}^i\mathbf{B}_j$$

donde

$$\gamma_{ij} = \int_0^T \alpha_i(\tau)u_j(T-\tau)\,d\tau = \text{escalar}$$

y $\alpha_i(\tau)$ satisface

$$e^{\mathbf{A}\tau} = \sum_{i=0}^{p-1}\alpha_i(\tau)\mathbf{A}^i \qquad (p\text{: grado del polinomio mínimo de }\mathbf{A})$$

y $\mathbf{B}_j$ es la j-ésima columna de $\mathbf{B}$. Por tanto, se puede escribir $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(0)$ como

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(0) = \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{r}\gamma_{ij}\mathbf{C}\mathbf{A}^i\mathbf{B}_j$$

En esta última ecuación se ve que $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(0)$ es una combinación lineal de $\mathbf{C}\mathbf{A}^i\mathbf{B}_j$ ($i = 0, 1, 2, ..., p-1$; $j = 1, 2, ..., r$). Observe que si el rango de $\mathbf{Q}$, donde

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{CB} \mid \mathbf{CAB} \mid \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \mid \cdots \mid \mathbf{CA}^{p-1}\mathbf{B}] \qquad (p \leqslant n)$$

es m, también lo es el rango de $\mathbf{P}$, y viceversa. [Esto es obvio si $p = n$. Si $p < n$, entonces la $\mathbf{CA}^h\mathbf{B}_j$ (donde $p \leqslant h \leqslant n-1$) son linealmente dependientes de $\mathbf{CB}_j$, $\mathbf{CAB}_j$, ..., $\mathbf{CA}^{p-1}\mathbf{B}_j$. Por tanto, el rango de $\mathbf{P}$ es igual al de $\mathbf{Q}$.] Si el rango de $\mathbf{P}$ es m, entonces $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(0)$ genera el espacio

de salida de m dimensiones. Esto significa que, si el rango de **P** es m, entonces $\mathbf{C}\mathbf{x}(0)$ también genera el espacio de salida de m dimensiones y el sistema es de salida completamente controlable.

Por el contrario, suponga ahora que el sistema es de salida completamente controlable pero el rango de **P** es k, donde $k < m$. En este caso el conjunto de todas las salidas iniciales que se transfieren al origen es de un espacio de k dimensiones. Por tanto, la dimensión de este conjunto es menor que m. Esto contradice la hipótesis de que el sistema es de salida completamente controlable y completa la demostración.

Observe que se puede comprobar de inmediato que, en el sistema de las Ecuaciones (9-114) y (9-115), controlabilidad completa del estado en $0 \leqslant t \leqslant T$ implica controlabilidad completa de la salida en $0 \leqslant t \leqslant T$ si y sólo si m filas de **C** son linealmente independientes.

A-9-16. Analice la controlabilidad de estado del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u \tag{9-119}$$

Solución. Para este sistema,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Como

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

se ve que los vectores **B** y **AB** no son linealmente independientes, y que el rango de la matriz $[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}]$ es 1. Por tanto, el sistema no es de estado completamente controlable. De hecho, la eliminación de x_2 de la Ecuación (9-119) o las dos ecuaciones simultáneas siguientes,

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 1.5x_2 + 4u$$

produce

$$\ddot{x}_1 + 1.5\dot{x}_1 - 2.5x_1 = \dot{u} + 2.5u$$

o bien, en la forma de una función de transferencia,

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{s + 2.5}{(s + 2.5)(s - 1)}$$

Observe que la cancelación del factor $(s + 2.5)$ ocurre en el numerador y en el denominador de la función de transferencia. Debido a esta cancelación, este sistema no tiene un estado completamente controlable. Este es un sistema inestable. Recuerde que la estabilidad y la controlabilidad son cosas muy diferentes. Existen muchos sistemas que son inestables pero son de estado completamente controlable.

A-9-17. Una representación en el espacio de estados de un sistema en la forma canónica controlable se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{9-120}$$

$$y = [0.8 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9-121}$$

El mismo sistema se representa mediante la siguiente ecuación en el espacio de estados, que está en la forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{9-122}$$

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9-123}$$

Demuestre que la representación en el espacio de estados obtenida mediante las Ecuaciones (9-120) y (9-121) produce un sistema que es de estado controlable pero no observable. Por otra parte, demuestre que la representación en el espacio de estados definida mediante las Ecuaciones (9-122) y (9-123) da un sistema que no es de estado completamente controlable pero sí observable. Explique qué provoca las diferencias evidentes en la controlabilidad y la observabilidad del mismo sistema.

Solución. Considere el sistema definido mediante las Ecuaciones (9-120) y (9-121). El rango de la matriz de controlabilidad

$$[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix}$$

es 2. Por tanto, el sistema es de estado completamente controlable. El rango de la matriz de observabilidad

$$[\mathbf{C}^* \,\vdots\, \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

es 1. Por tanto, el sistema es no observable

A continuación considere el sistema definido mediante las Ecuaciones (9-122) y (9-123). El rango de la matriz de controlabilidad

$$[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

es 1. Por tanto, el sistema no es de estado completamente controlable. El rango de la matriz de observabilidad

$$[\mathbf{C}^* \,\vdots\, \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix}$$

es 2. Por tanto, el sistema es observable.

La diferencia aparente en la controlabilidad y la observabilidad del mismo sistema la provoca el hecho de que el sistema original tiene una cancelación de polos y ceros en la función de transferencia. Refiriéndose a la Ecuación (2-29), para $D = 0$ se tiene que

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Si se utilizan las Ecuaciones (9-120) y (9-121), entonces

$$\begin{aligned} G(s) &= [0.8 \quad 1] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0.4 & s + 1.3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 1.3s + 0.4} [0.8 \quad 1] \begin{bmatrix} s + 1.3 & 1 \\ -0.4 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s + 0.8}{(s + 0.8)(s + 0.5)} \end{aligned}$$

[Observe que se obtiene la misma función de transferencia usando las Ecuaciones (9-122) y (9-123).] Es evidente que en esta función de transferencia ocurre una cancelación.

Si ocurre una cancelación de polos y ceros en la función de transferencia, la controlabilidad y la observabilidad varían, dependiendo de cómo se eligen las variables de estado. Recuerde que, para ser de estado completamente controlable y observable, la función de transferencia no debe tener cancelaciones de polos ni ceros.

A-9-18. Demuestre que el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
$\mathbf{y}$ = vector de salida (vector de dimensión m) $\quad (m \leqslant n)$
$\mathbf{A}$ = matriz $n \times n$
$\mathbf{C}$ = matriz $m \times n$

es completamente observable si y sólo si la matriz $\mathbf{P}$ compuesta de $mn \times n$, donde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

es de rango n.

Solución. Primero se obtiene la condición necesaria. Suponga que

$$\text{rango } \mathbf{P} < n$$

Entonces existe una $\mathbf{x}(0)$ tal que

$$\mathbf{P}\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$$

o bien

$$\mathbf{P}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{CA}\mathbf{x}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{x}(0) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Por tanto, se obtiene, para un cierto $\mathbf{x}(0)$,

$$\mathbf{CA}^{i}\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \qquad \text{para } i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

Observe que, a partir de la Ecuación (9-48) o (9-50), se tiene que

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\mathbf{A}^{m-1}$$

donde $m (m \leqslant n)$ es el grado del polinomio mínimo para $\mathbf{A}$. Por tanto, para un cierto $\mathbf{x}(0)$, se tiene que

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \mathbf{C}[\alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{m-1}(t)\mathbf{A}^{m-1}]\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$$

En consecuencia, para un cierto $\mathbf{x}(0)$,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = Ce^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$$

que implica que, para cierto $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(0)$ no puede determinarse a partir de $\mathbf{y}(t)$. Así, el rango de la matriz $\mathbf{P}$ debe ser igual a n.

A continuación se obtiene la condición suficiente. Suponga que el rango $\mathbf{P} = n$. Como

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por $e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{C}^*$, se obtiene

$$e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{C}^*\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{C}^*\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

Si se integra esta última ecuación de 0 a t, se deduce

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{C}^*\mathbf{y}(t)\,dt = \int_0^t e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{C}^*\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)\,dt \tag{9-124}$$

Observe que el primer miembro de esta ecuación es una cantidad conocida. Si se define

$$\mathbf{Q}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{C}^*\mathbf{y}(t)\,dt = \text{cantidad conocida} \tag{9-125}$$

Entonces, a partir de las Ecuaciones (9-124) y (9-125), se tiene que

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{x}(0) \tag{9-126}$$

donde

$$\mathbf{W}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}^*\tau}\mathbf{C}^*\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\,d\tau$$

Se puede establecer que $\mathbf{W}(t)$ es una matriz no singular, del modo siguiente. Si $|\mathbf{W}(t)|$ fuera igual a 0, entonces

$$\mathbf{x}^*\mathbf{W}(t_1)\mathbf{x} = \int_0^t \|\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}\|^2\,dt = 0$$

lo que significa que

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \qquad \text{para } 0 \leqslant t \leqslant t_1$$

que implica que el rango $\mathbf{P} < n$. Por tanto, $|\mathbf{W}(t)| \neq 0$, o $\mathbf{W}(t)$ es no singular. Así, a partir de la Ecuación (9-126), se obtiene

$$\mathbf{x}(0) = [\mathbf{W}(t)]^{-1}\mathbf{Q}(t) \tag{9-127}$$

y $\mathbf{x}(0)$ se determina a partir de la Ecuación (9-127).

Por tanto, se ha demostrado que $\mathbf{x}(0)$ se determina a partir de $\mathbf{y}(t)$ si y sólo si el rango $\mathbf{P} = n$. Observe que $\mathbf{x}(0)$ e $\mathbf{y}(t)$ se relacionan mediante

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \alpha_0(t)\mathbf{C}\mathbf{x}(0) + \alpha_1(t)\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(0)$$

PROBLEMAS

B-9-1. Considere el siguiente sistema representado mediante la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+6}{s^2+5s+6}$$

Obtenga la representación en el espacio de estados de este sistema en (a) la forma canónica controlable y (b) la forma canónica observable.

B-9-2. Considere el sistema siguiente:

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

Obtenga una representación en el espacio de estados de este sistema en la forma canónica.

B-9-3. Sea el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1]$$

Transforme las ecuaciones del sistema en la forma canónica controlable.

B-9-4. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 0]$$

Obtenga la función de transferencia $Y(s)/U(s)$.

B-9-5. Sea la matriz **A** siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenga los valores propios λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4 de la matriz **A**. Después obtenga una matriz de transformación **P** tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

B-9-6. Considere la matriz **A** siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

calcule $e^{\mathbf{A}t}$ mediante tres métodos.

B-9-7. Dada la ecuación del sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

encuentre la solución a partir de las condiciones iniciales $x_1(0)$, $x_2(0)$ y $x_3(0)$.

B-9-8. Encuentre $x_1(t)$ y $x_2(t)$ del sistema descrito mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

donde las condiciones iniciales son

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

B-9-9. Considere la ecuación de estado y la ecuación de salida siguientes:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Demuestre que la ecuación de estado se transforma en la forma siguiente si se usa una matriz de transformación adecuada:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Después obtenga la salida y en términos de z_1, z_2 y z_3.

B-9-10. Obtenga con MATLAB una representación en el espacio de estados del sistema siguiente.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10.4s^2 + 47s + 160}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160}$$

B-9-11. Obtenga con MATLAB una representación mediante la función de transferencia del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

B-9-12. Obtenga con MATLAB una representación mediante la función de transferencia del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

B-9-13. Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

¿Es el sistema de estado completamente controlable y completamente observable?

B-9-14. Considere el sistema dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

¿Es el sistema de estado completamente controlable y completamente observable? ¿Es el sistema de salida completamente controlable?

B-9-15. ¿Es el sistema de estado siguiente completamente controlable y completamente observable?

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [20 \quad 9 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

B-9-16. Considere el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad c_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Con excepción de una elección obvia de $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, encuentre un ejemplo de un conjunto de c_1, c_2, c_3 que haga no observable el sistema.

B-9-17. Sea el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

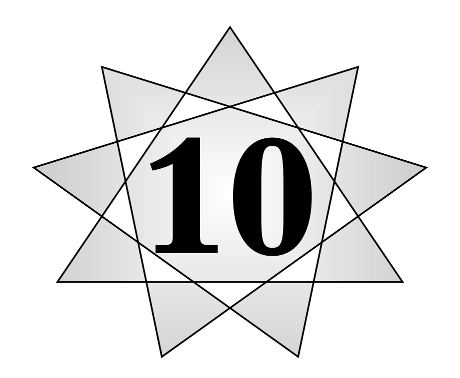
La salida se obtiene mediante

$$y = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Demuestre que el sistema es completamente observable.

(b) Demuestre que el sistema es completamente observable si la salida se obtiene mediante

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



Diseño de sistemas de control en el espacio de estados

10-1 Introducción

Este capítulo analiza los métodos de diseño en el espacio de estados basados en los métodos de asignación de polos y del regulador óptimo cuadrático. El método de asignación de polos es algo análogo al método del lugar de las raíces ya que se colocan los polos en lazo cerrado en posiciones deseadas. La diferencia básica es que en el diseño en el lugar de las raíces se sitúan sólo los polos en lazo cerrado dominantes, mientras que en el diseño por asignación de polos se colocan todos los polos en lazo cerrado en las posiciones que se deseen.

Se comienza presentando el material básico sobre asignación de polos en sistemas reguladores. A continuación se analiza el diseño de observadores de estado, seguido por el diseño de sistemas reguladores y sistemas de control utilizando el método de asignación de polos con observador del estado. Seguidamente se presentan los sistemas reguladores óptimos cuadráticos. Finalmente, se presenta una introducción a los sistemas de control robusto.

Contenido del capítulo. La Sección 10-1 presenta el material de introducción. La Sección 10-2 analiza el método de asignación de polos para el diseño de sistemas de control. Empieza con la obtención de las condiciones necesarias y suficientes para una asignación arbitraria de los polos. A continuación se deducen las ecuaciones para la matriz de ganancias de la realimentación del estado **K** para la asignación de los polos. La Sección 10-3 presenta la solución del problema de asignación de polos con MATLAB. La Sección 10-4 analiza el diseño de servosistemas utilizando el método de asignación de polos. La Sección 10-5 presenta los observadores de estado. Se estudian los observadores de estado de orden completo y de orden mínimo. También se deducen las funciones de transferencia de los controladores-observadores. La Sección 10-6 aborda el diseño de sistemas reguladores con observadores. La Sección 10-7 trata el diseño de

sistemas de control con observadores. La Sección 10-8 estudia los sistemas reguladores óptimos cuadráticos. Obsérvese que la matriz de ganancia de realimentación del estado **K** se puede obtener por ambos métodos: el método de asignación de polos y el método de control óptimo cuadrático. Finalmente, la Sección 10-9 presenta los sistemas de control robusto donde el estudio de estos sistemas se limita a temas introductorios.

10-2 Asignación de polos

En esta sección se presenta un método de diseño conocido comúnmente como *técnica de ubicación* o de *asignación de polos*. Se supone que todas las variables de estado son medibles y que están disponibles para su realimentación. Se demostrará que, si el sistema considerado es de estado completamente controlable, los polos del sistema en lazo cerrado se pueden colocar en cualquier posición deseada mediante una realimentación del estado a través de una adecuada matriz de ganancias de la realimentación del estado.

La técnica de diseño empieza con la determinación de los polos en lazo cerrado deseados a partir de la respuesta transitoria y/o las especificaciones de la respuesta en frecuencia, tales como velocidad, razón de amortiguamiento, o ancho de banda, al igual que los requisitos en estado estacionario.

Supóngase que se decide que los polos en lazo cerrado deseados estén en $s = \mu_1$, $s = \mu_2$, ..., $s = \mu_n$. Seleccionando una matriz de ganancias apropiada para realimentación del estado, es posible hacer que el sistema tenga los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas, siempre y cuando el sistema original sea de estado completamente controlable.

En este capítulo el estudio se limita a los sistemas de una entrada, una salida. Esto es, se supone que la señal de control $u(t)$ y la señal de salida $y(t)$ son escalares. En esta sección se va a suponer también que la entrada de referencia $r(t)$ es cero. [En la Sección 10-7 se analizará el caso en que la entrada de referencia $r(t)$ es distinta de cero.]

A continuación, se demostrará que una condición necesaria y suficiente para que los polos en lazo cerrado se puedan localizar en cualquier posición arbitraria en el plano s es que el sistema sea de estado completamente controlable. Luego, se analizarán métodos para determinar la matriz de ganancias de realimentación del estado requerida.

Obsérvese que, cuando la señal de control es una cantidad vectorial, los aspectos matemáticos del esquema de ubicación de polos se complican. Este caso no se estudiará en este libro. (Cuando la señal de control es una cantidad vectorial, la matriz de ganancias de realimentación del estado no es única. Es posible seleccionar libremente más de n parámetros; esto es, además de poder colocar n polos adecuadamente, se tiene la libertad de satisfacer, si las hubiera, algunas otras especificaciones del sistema en lazo cerrado.)

Diseño mediante asignación de polos. En el enfoque convencional del diseño de un sistema de control con una sola entrada y una sola salida, se diseña un controlador (compensador) tal que los polos dominantes en lazo cerrado tengan una razón de amortiguamiento ζ y una frecuencia natural no amortiguada ω_n deseada. En este método, el orden del sistema aumenta en 1 o 2, a menos que ocurra una cancelación de polos o ceros. Obsérvese que en este método se supone que los efectos sobre las respuestas de los polos en lazo cerrado no dominantes son despreciables.

En lugar de especificar sólo los polos dominantes en lazo cerrado (enfoque del diseño convencional), el enfoque actual de asignación de polos especifica todos los polos en lazo cerrado. (Sin embargo, hay un costo asociado con colocar todos los polos en lazo cerrado, porque hacerlo requiere tener buenas medidas de todas las variables de estado, o bien incluir un observador de estado en el sistema.) También existe un requisito por parte del sistema para que los polos en

lazo cerrado se puedan situar en posiciones elegidas de forma arbitraria. La exigencia es que el sistema sea de estado completamente controlable. En esta sección se probará este hecho.

Sea un sistema de control

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{10-1}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
y = señal de salida (escalar)
u = señal de control (escalar)
$\mathbf{A}$ = matriz de coeficientes constantes $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz de coeficientes constantes $n \times 1$
$\mathbf{C}$ = matriz de coeficientes constantes $1 \times n$
D = constantes (escalar)

Se selecciona la señal de control como

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} \tag{10-2}$$

Esto significa que la señal de control u se determina mediante un estado instantáneo. Tal esquema se denomina realimentación del estado. La matriz $\mathbf{K}$ de $1 \times n$ se denomina matriz de ganancia de realimentación de estado. Se supone que todas las variables de estado están disponibles para su realimentación. En el análisis que sigue a continuación se asume que no hay restricciones sobre u. En la Figura 10-1 se muestra un diagrama de bloques de este sistema.

Este sistema en lazo cerrado no tiene entradas. Su objetivo es mantener la salida a cero. Como pueden existir perturbaciones, la salida se desviará de cero. Esta salida retornará a la entrada de referencia cero debido al esquema de realimentación del estado del sistema. Un sistema de esta naturaleza en que la entrada de referencia es siempre cero se conoce como un sistema regulador. (Obsérvese que si la entrada de referencia al sistema es siempre una constante distinta de cero, el sistema se denomina también un sistema regulador.)

Al sustituir la Ecuación (10-2) en la Ecuación (10-1) se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t)$$

La solución de esta ecuación está dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})t}\mathbf{x}(0) \tag{10-3}$$

donde $\mathbf{x}(0)$ es el estado inicial provocado por perturbaciones externas. La estabilidad y las características de respuesta transitoria se determinan mediante los valores característicos de la

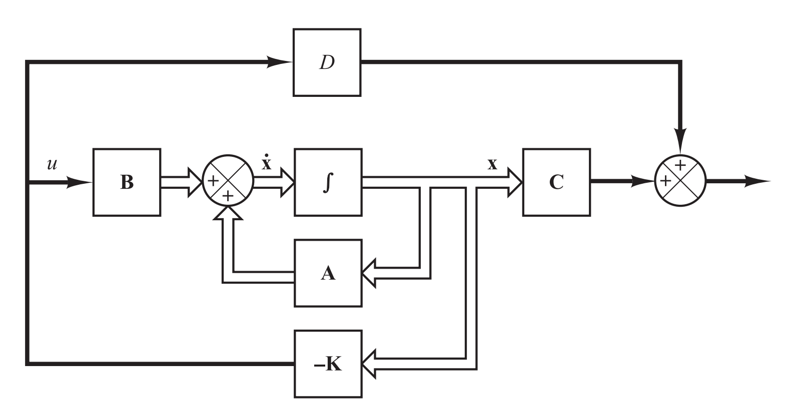


Figura 10-1. Sistema de control en lazo cerrado con $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$.

matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$. Si se elige la matriz $\mathbf{K}$ de forma adecuada, la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ se convierte en una matriz asintóticamente estable y para todos los $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ es posible hacer que $\mathbf{x}(t)$ tienda a $\mathbf{0}$ conforme t tiende a infinito. Los valores propios de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ se denominan polos del regulador. Si estos se colocan en el semiplano izquierdo del plano s, entonces $\mathbf{x}(t)$ tiende a $\mathbf{0}$ cuando t tiende a infinito. El problema de situar los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas se denomina problema de asignación de polos.

A continuación, se demostrará que la colocación arbitraria de los polos para un sistema determinado es posible si y sólo si el sistema es de estado completamente controlable.

Condición necesaria y suficiente para la asignación arbitraria de los polos. Ahora se demostrará que una condición necesaria y suficiente para la colocación arbitraria de los polos es que el sistema sea de estado completamente controlable. Primero se obtendrá la condición necesaria. Se comienza por demostrar que, si el sistema no es de estado completamente controlable, existen valores propios de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ que no se pueden controlar mediante realimentación del estado.

Supóngase que el sistema de la Ecuación (10-1) no es de estado completamente controlable. Así, el rango de la matriz de controlabilidad es menor que n, o

$$\text{rango}[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = q < n$$

Esto significa que existen q vectores columna linealmente independientes en la matriz de controlabilidad. Se definen tales q vectores columna linealmente independientes como $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_q$. También se seleccionan $n - q$ vectores adicionales $\mathbf{v}_{q+1}$, $\mathbf{v}_{q+2}$, ..., $\mathbf{v}_n$, tales que

$$\mathbf{P} = [\mathbf{f}_1 \mid \mathbf{f}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{f}_q \mid \mathbf{v}_{q+1} \mid \mathbf{v}_{q+2} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]$$

sea de rango n. En este caso, se demuestra que

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Véase el Problema **A-10-1** para la deducción de estas ecuaciones.) Ahora se define

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{KP} = [\mathbf{k}_1 \mid \mathbf{k}_2]$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| &= |\mathbf{P}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{P}| \\
&= |s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{BKP}| \\
&= |s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}| \\
&= \left| sI - \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{k}_1 \mid \mathbf{k}_2] \right| \\
&= \begin{vmatrix} s\mathbf{I}_q - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_1 & -\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_2 \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I}_{n-q} - \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix} \\
&= |s\mathbf{I}_q - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11}\mathbf{k}_1| \cdot |s\mathbf{I}_{n-q} - \mathbf{A}_{22}| = 0
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{I}_q$ es una matriz identidad de dimensión q e $\mathbf{I}_{n-q}$ es una matriz identidad de dimensión $(n - q)$.

Obsérvese que los valores propios de $\mathbf{A}_{22}$ no dependen de $\mathbf{K}$. Por tanto, si el sistema no es de estado completamente controlable, existen valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ que no pueden colocarse de forma arbitraria. En este caso, para situar arbitrariamente los valores propios de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$, el sistema debe ser de estado completamente controlable (condición necesaria).

A continuación se demostrará una condición suficiente; es decir, si el sistema es de estado completamente controlable, entonces todos los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ se pueden colocar arbitrariamente.

Al demostrar una condición suficiente, es conveniente transformar la ecuación de estado dada por la Ecuación (10-1) en su forma canónica controlable.

Se define una matriz de transformación $\mathbf{T}$ mediante

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW} \tag{10-4}$$

donde $\mathbf{M}$ es la matriz de controlabilidad

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \tag{10-5}$$

y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10-6}$$

donde las a_i son los coeficientes del polinomio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Se define un nuevo vector de estado $\hat{\mathbf{x}}$ mediante

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$$

Si el rango de la matriz de controlabilidad $\mathbf{M}$ es n (lo que significa que el sistema es de estado completamente controlable), entonces existe la inversa de la matriz $\mathbf{T}$ y la Ecuación (10-1) se puede modificar a

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}\hat{x} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u \tag{10-7}$$

donde

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \tag{10-8}$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10-9}$$

[Véanse los Problemas **A-10-2** y **A-10-3** para la obtención de las Ecuaciones (10-8) y (10-9).] La Ecuación (10-7) está en la forma canónica controlable. Por tanto, dada una ecuación de estado, la Ecuación (10-1) se puede transformar a su forma canónica controlable si el sistema es de estado completamente controlable y si el vector de estado $\mathbf{x}$ se transforma en el vector de estado $\hat{\mathbf{x}}$ usando la matriz de transformación $\mathbf{T}$ dada por la Ecuación (10-4).

Se selecciona el conjunto de los valores propios deseados como $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$. En este caso la ecuación característica deseada es

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)\cdots(s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0 \tag{10-10}$$

Si se denota

$$\mathbf{KT} = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1] \tag{10-11}$$

Cuando se usa $u - \mathbf{KT}\hat{\mathbf{x}}$ para controlar el sistema dado por la Ecuación (10-7), la ecuación del sistema es

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}\hat{x} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}\hat{\mathbf{x}}$$

La ecuación característica es

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}| = 0$$

Esta ecuación característica es igual a la ecuación característica para el sistema, definido por la Ecuación (10-1), cuando se usa $u = -\mathbf{Kx}$ como señal de control. Esto se puede ver del modo siguiente. Como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}$$

la ecuación característica para este sistema es

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = |\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{T}| = |s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{BKT}| = 0$$

Ahora se simplifica la ecuación característica del sistema a su forma canónica controlable. Si se toman en cuenta las Ecuaciones (10-8), (10-9) y (10-11), se tiene

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{T}|$$

$$= \left| s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1] \right|$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \cdots & s + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix}$$

$$= s^n + (a_1 + \delta_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n) = 0 \qquad (10\text{-}12)$$

Esta es la ecuación característica para el sistema con realimentación del estado. Por tanto, debe ser igual a la Ecuación (10-10), que es la ecuación característica deseada. Igualando los coeficientes de las potencias iguales de s, se obtiene

$$a_1 + \delta_1 = \alpha_1$$
$$a_2 + \delta_2 = \alpha_2$$
$$\vdots$$
$$a_n + \delta_n = \alpha_n$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores para las δ_i y sustituyéndolas en la Ecuación (10-11), se obtiene

$$\mathbf{K} = [\delta_n \quad \delta_{n-1} \quad \cdots \quad \delta_1]\mathbf{T}^{-1}$$
$$= [\alpha_n - a_n \mid \alpha_{n-1} - a_{n-1} \mid \cdots \mid \alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1} \qquad (10\text{-}13)$$

Por tanto, si el sistema es de estado completamente controlable, todos los valores propios se colocan arbitrariamente seleccionando la matriz **K** de acuerdo con la Ecuación (10-13) (condición suficiente).

Se ha demostrado así que una condición necesaria y suficiente para la colocación arbitraria de los polos es que el sistema sea de estado completamente controlable.

Se observa que si el sistema no es de estado completamente controlable, pero es estabilizable, entonces es posible hacer que el sistema completo sea estable al colocar los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas para los q modos controlables. Los restantes $n-q$ modos no controlables son estables. De esta forma, el sistema completo se puede estabilizar.

Determinación de la matriz K utilizando la matriz de transformación T. Supóngase que el sistema se define mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

y que la señal de control se obtiene mediante

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

La matriz de ganancias de realimentación **K** que hace que sean los valores propios de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ hace que $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ (valores deseados), se determina mediante los pasos siguientes (si μ_i es un valor propio complejo, su conjugado también debe ser un valor propio de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$):

Paso 1. Compruebe la condición de controlabilidad para el sistema. Si el sistema es de estado completamente controlable, siga los pasos siguientes.

Paso 2. A partir del polinomio característico de la matriz **A**,

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

determine los valores de $a_1, a_2, ..., a_n$.

Paso 3. Determine la matriz de transformación **T** que convierte la ecuación de estado del sistema a su forma canónica controlable. (Si la ecuación del sistema determinada ya está en su forma canónica controlable, entonces $\mathbf{T} = \mathbf{I}$.) No es necesario escribir la ecuación de estado en la forma canónica controlable. Lo único que se necesita es encontrar la matriz **T**. La matriz de transformación **T** viene dada por la Ecuación (10-4), o

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW}$$

donde **M** se obtiene de la Ecuación (10-5) y **W** de la Ecuación (10-6).

Paso 4. Usando los valores propios deseados (los polos en lazo cerrado deseados), escriba el polinomio característico deseado:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$$

y determine los valores de $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Paso 5. La matriz de ganancias de realimentación del estado **K** requerida se determina de la Ecuación (10-13), que puede reescribirse como:

$$\mathbf{K} = [\alpha_n - a_n \,\vdots\, \alpha_{n-1} - a_{n-1} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \alpha_2 - a_2 \,\vdots\, \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1}$$

Determinación de la matriz K utilizando el método de sustitución directa. Si el sistema es de un orden inferior ($n \leqslant 3$), la sustitución directa de la matriz **K** en el polinomio característico deseado puede ser más simple. Por ejemplo, si $n = 3$, escriba la matriz de ganancias de realimentación de estado **K** como

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

Sustituya esta matriz **K** en el polinomio característico deseado $|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}|$ e iguálelo con $(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$, o

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$$

Como ambos miembros de esta ecuación característica son polinomios en s, igualando en ellos los coeficientes de las potencias iguales de s es posible determinar los valores de k_1, k_2 y k_3. Este método es conveniente si $n = 2$ o 3. (Para $n = 4, 5, 6, ...$, este método se vuelve muy tedioso.)

Obsérvese que si el sistema no es completamente controlable, la matriz $\mathbf{K}$ no se puede determinar. (No existe solución.)

Determinación de la matriz K utilizando la fórmula de Ackermann. Existe una fórmula muy difundida, conocida como la fórmula de Ackermann, para determinar la matriz de ganancias de realimentación del estado $\mathbf{K}$.

Sea el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

donde se utiliza la ley de realimentación del estado $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. Se supone que este sistema es de estado completamente controlable. También se va a suponer que los polos en lazo cerrado deseados están en $s = \mu_1$, $s = \mu_2$, ..., $s = \mu_n$.

La utilización de un control mediante realimentación del estado

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

modifica la ecuación del sistema a

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \tag{10-14}$$

Se define

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$$

La ecuación característica deseada es

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| = |s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}| &= (s - \mu_1)(s - \mu_2)\cdots(s - \mu_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

Como el teorema de Cayley-Hamilton expresa que $\tilde{\mathbf{A}}$ satisface su propia ecuación característica, se tiene que

$$\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \tilde{\mathbf{A}}^n + \alpha_1\tilde{\mathbf{A}}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\tilde{\mathbf{A}} + \alpha_n\mathbf{I} = \mathbf{0} \tag{10-15}$$

Se utilizará la Ecuación (10-15) para obtener la fórmula de Ackermann. Para simplificar la obtención, se considera el caso en el que $n = 3$. (Para cualquier otro entero positivo n, es posible extender con facilidad el razonamiento seguido.)

Considérense las identidades siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{I} \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \tilde{\mathbf{A}}^2 &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \tilde{\mathbf{A}}^3 &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^3 = \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \end{aligned}$$

Multiplicando las ecuaciones anteriores, en orden, por α_3, α_2, α_1 y α_0 (donde $\alpha_0 = 1$), respectivamente, y agregando los resultados, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\tilde{\mathbf{A}} + \alpha_1\tilde{\mathbf{A}}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^3 \\
&= \alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + \alpha_1(\mathbf{A}^2 - \mathbf{ABK} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} \\
&\quad - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\
&= \alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{A} + \alpha_1\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 - \alpha_2\mathbf{BK} - \alpha_1\mathbf{ABK} - \alpha_1\mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2\mathbf{BK} \\
&\quad - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2
\end{aligned} \tag{10-16}$$

Tomando en cuenta la Ecuación (10-15), se tiene que

$$\alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\tilde{\mathbf{A}} + \alpha_1\tilde{\mathbf{A}}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^2 + \tilde{\mathbf{A}}^3 = \phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathbf{0}$$

Asimismo, se tiene que

$$\alpha_3\mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{A} + \alpha_1\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 = \phi(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$$

Sustituyendo las dos últimas ecuaciones en la Ecuación (10-16), se obtiene

$$\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \phi(\mathbf{A}) - \alpha_2\mathbf{BK} - \alpha_1\mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2 - \alpha_1\mathbf{ABK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2\mathbf{BK}$$

Como $\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathbf{0}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{A}) &= \mathbf{B}(\alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2) + \mathbf{AB}(\alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}^2\mathbf{BK} \\
&= [\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \mathbf{A}^2\mathbf{B}]\begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{10-17}$$

Como el sistema es de estado completamente controlable, la inversa de la matriz de controlabilidad

$$[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \mathbf{A}^2\mathbf{B}]$$

existe. Premultiplicando ambos lados de la Ecuación (10-17) por la inversa de la matriz de controlabilidad, se obtiene

$$[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \mathbf{A}^2\mathbf{B}]^{-1}\phi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

Premultiplicando ambos lados de esta última ecuación por $[0 \quad 0 \quad 1]$, se deduce

$$[0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \mathbf{A}^2\mathbf{B}]^{-1}\phi(\mathbf{A}) = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} \alpha_2\mathbf{K} + \alpha_1\mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1\mathbf{K} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \mathbf{K}$$

que puede reescribirse como

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad 1][\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \mathbf{A}^2\mathbf{B}]^{-1}\phi(\mathbf{A})$$

Esta última ecuación da la matriz de ganancias de realimentación del estado **K** deseada.

Para un entero positivo arbitrario n, se tiene que

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1}\phi(\mathbf{A}) \tag{10-18}$$

La Ecuación (10-18) se conoce como fórmula de Ackermann para la determinación de la matriz de ganancias de realimentación del estado **K**.

Sistema regulador y sistema de control. Los sistemas que incluyen controladores pueden dividirse en dos categorías: sistema regulador (donde la entrada de referencia es constante, incluyendo cero) y sistema de control (donde la entrada de referencia es variable con el tiempo). En lo que sigue se considerará el sistema regulador. Los sistemas de control se verán en la Sección 10-7.

Elección de la localización de los polos en lazo cerrado deseados. El primer paso en el método de diseño por asignación de polos es escoger las localizaciones de los polos en lazo cerrado deseados. El método más utilizado es elegir tales polos basándose en la experiencia que se tiene del diseño mediante el lugar de las raíces, colocando un par de polos dominantes en lazo cerrado y eligiendo los otros polos de forma que estén suficientemente alejados a la izquierda de los polos dominantes en lazo cerrado.

Obsérvese que si se colocan los polos en lazo cerrado dominantes alejados del eje $j\omega$, de manera que la respuesta del sistema se hace muy rápida, las señales en el sistema serán muy grandes, lo que puede dar como resultado que el sistema sea no lineal. Esto debería evitarse.

Otro método se basa en el control óptimo cuadrático. Este método determinará los polos en lazo cerrado deseados de forma tal que se establece un compromiso entre la respuesta aceptable y la cantidad de energía de control requerida. (Véase Sección 10-8.) Obsérvese que si se requiere una respuesta de alta velocidad, son necesarias grandes cantidades de energía de control. También, en general, aumentar la velocidad de respuesta exige actuadores más grandes y pesados que costarán más.

EJEMPLO 10-1 Sea el sistema regulador que se muestra en la Figura 10-2. La planta está dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El sistema usa el control mediante realimentación del estado $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. Se escogen los polos en lazo cerrado en

$$s = -2 + j4, \qquad s = -2 - j4, \qquad s = -10$$

(Se realiza esta elección porque se sabe de la experiencia que con este conjunto de polos en lazo cerrado se obtiene una respuesta transitoria aceptable.) Determine la matriz de ganancias de realimentación del estado **K**.

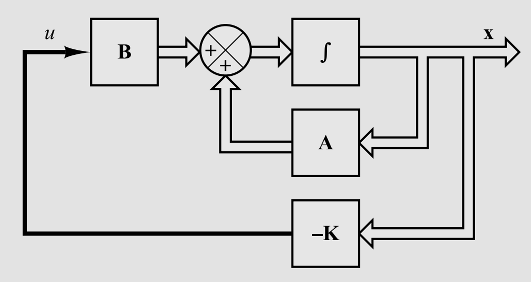


Figura 10-2. Sistema regulador.

Primero se necesita comprobar la matriz de controlabilidad del sistema. Como la matriz de controlabilidad **M** está dada por

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \vdots \mathbf{AB} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

resulta que $|\mathbf{M}| = -1$ y, por tanto, rango $\mathbf{M} = 3$. Así, el sistema es de estado completamente controlable y es posible la colocación arbitraria de los polos.

A continuación, se resuelve este problema. Se realizará con cada uno de los tres métodos presentados en este capítulo.

Método 1. El primer método es usar la Ecuación (10-13). La ecuación característica para el sistema es

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 5 & s+6 \end{vmatrix}$$

$$= s^3 + 6s^2 + 5s + 1$$

$$= s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

Por tanto,

$$a_1 = 6, \qquad a_2 = 5, \qquad a_3 = 1$$

La ecuación característica deseada es

$$(s + 2 - j4)(s + 2 + j4)(s + 10) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200$$

$$= s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 = 0$$

Así,

$$\alpha_1 = 14, \qquad \alpha_2 = 60, \qquad \alpha_3 = 200$$

Si se toma en cuenta la Ecuación (10-13), se tiene que

$$\mathbf{K} = [\alpha_3 - a_3 \vdots \alpha_2 - a_2 \vdots \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1}$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ para este problema porque la ecuación de estado determinada está en la forma canónica controlable. Por tanto, se tiene que

$$\mathbf{K} = [200 - 1 \vdots 60 - 5 \vdots 14 - 6]$$

$$= [199 \quad 55 \quad 8]$$

Método 2. Definiendo la matriz de ganancias de realimentación del estado **K** deseada como

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

e igualando $|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}|$ con la ecuación característica deseada, se obtiene

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \right|$$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 + k_1 & 5 + k_2 & s + 6 + k_3 \end{vmatrix}$$

$$= s^3 + (6 + k_3)s^2 + (5 + k_2)s + 1 + k_1$$

$$= s^3 + 14s^2 + 60s + 200$$

Por tanto,

$$6 + k_3 = 14, \qquad 5 + k_2 = 60, \qquad 1 + k_1 = 200$$

a partir de lo cual se obtiene

$$k_1 = 199, \qquad k_2 = 55, \qquad k_3 = 8$$

o bien

$$\mathbf{K} = [199 \quad 55 \quad 8]$$

Método 3. El tercer método es usar la fórmula de Ackermann. Tomando en cuenta la Ecuación (10-18), se tiene que

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad 1]\,[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \mathbf{A}^2\mathbf{B}]^{-1}\phi(\mathbf{A})$$

Como

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^3 + 14\mathbf{A}^2 + 60\mathbf{A} + 200\mathbf{I} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^3 + 14\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}^2 \\
&\quad + 60\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} + 200\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

y

$$[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} \\
&= [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 199 & 55 & 8 \\ -8 & 159 & 7 \\ -7 & -43 & 117 \end{bmatrix} \\
&= [199 \quad 55 \quad 8]
\end{aligned}$$

Como es natural, la matriz de ganancias de realimentación **K** obtenida mediante los tres métodos es la misma. Con esta realimentación del estado, los polos en lazo cerrado se localizan en $s = -2 \pm j4$ y $s = -10$, tal como se quería.

Observe que, si el orden n del sistema es 4 o mayor, son recomendables los métodos 1 y 3, ya que todos los cálculos de matrices se realizan en una computadora. Si se usa el método 2, son necesarios cálculos manuales porque una computadora no maneja la ecuación característica con los parámetros desconocidos $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Comentarios. Es importante señalar que la matriz **K** no es única para un sistema determinado, sino que depende de las posiciones deseadas de los polos en lazo cerrado (los cuales determinan la velocidad y el amortiguamiento de la respuesta) seleccionados. Obsérvese que la selección de los polos en lazo cerrado deseados, o de la ecuación característica deseada, es un compromiso entre la rapidez de la respuesta del vector de error y la sensibilidad ante perturbaciones y ruido en la medida. Es decir, si se incrementa la velocidad de respuesta del error, por lo general se incrementan los efectos adversos de las perturbaciones y del ruido en la medida. Si el sistema es de segundo orden, su dinámica (las características de respuesta) se correlaciona de manera precisa con la situación de los polos en lazo cerrado deseados y los ceros de la planta. Para sistemas de orden superior, la situación de los polos en lazo cerrado y la dinámica del sistema (las características de respuesta) no se correlacionan fácilmente. Por tanto, al determinar la matriz de ganancias de realimentación del estado **K** para un sistema determinado, es conveniente examinar mediante simulaciones en una computadora las características de respuesta del sistema para varias matrices **K** diferentes (basándose en algunas ecuaciones características deseadas distintas) y elegir aquella que ofrezca el mejor comportamiento global del sistema.

10-3 Solución de problemas de asignación de polos con MATLAB

Los problemas de asignación de polos se solucionan fácilmente con MATLAB. MATLAB tiene dos órdenes —`acker` y `place`— para el cálculo de la matriz de ganancias de realimentación **K**. La orden `acker` se basa en la fórmula de Ackermann. Esta orden se aplica sólo a sistemas de una única entrada. Los polos en lazo cerrado deseados pueden incluir polos múltiples (polos localizados en el mismo lugar).

Si el sistema posee múltiples entradas, para un conjunto especificado de polos en lazo cerrado la matriz de ganancias de realimentación del estado **K** no es única y se dispone de un grado de libertad adicional (o de varios grados de libertad) para determinar **K**. Un uso común es maximizar el margen de estabilidad. La asignación de polos basada en este método se llama asignación de polos robusta. La orden de MATLAB para la asignación de polos robusta es `place`.

Aunque la orden `place` se puede utilizar tanto para sistemas de una única entrada como de múltiples entradas, requiere que la multiplicidad de los polos en los polos en lazo cerrado deseados no sea mayor que el rango de **B**. Esto es, si la matriz **B** es una matriz $n \times 1$, la orden `place` necesita que no haya polos múltiples en el conjunto de polos en lazo cerrado deseado.

Para sistemas de una única entrada, `acker` y `place` dan la misma **K**. (Pero para sistemas con múltiples entradas, se debe emplear la orden `place` en lugar de `acker`.)

Se observa que cuando el sistema de entrada única es poco controlable, pueden surgir algunos problemas de cálculo si se utiliza la orden `acker`. En tal caso es preferible utilizar la orden `place` siempre que no existan polos múltiples en el conjunto deseado de polos en lazo cerrado.

Para utilizar la orden `acker` o `place`, se introducen en primer lugar las siguientes matrices en el programa:

matriz **A**, matriz **B**, matriz **J**

donde **J** es la matriz consistente de los polos en lazo cerrado deseados, tal que

$$\mathbf{J} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \cdots \quad \mu_n]$$

A continuación se introduce

```
K = acker(A,B,J)
```

o bien

```
K = place(A,B,J)
```

Se observa que la orden `eig(A—B*K)` se puede utilizar para verificar que la matriz `K` así obtenida da los valores propios deseados.

EJEMPLO 10-2 Se considera el mismo problema analizado en el Ejemplo 10-1. La ecuación del sistema es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando un control mediante realimentación del estado $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, se pretende que los polos en lazo cerrado estén en $s = \mu_i$ $(i = 1, 2, 3)$, donde

$$\mu_1 = -2 + j4, \qquad \mu_2 = -2 - j4, \qquad \mu_3 = -10$$

Determine la matriz de ganancias de realimentación del estado **K** con MATLAB.

Los programas que generan la matriz **K** se muestran en los programas de MATLAB 10-1 y 10-2. El Programa 10-1 utiliza la orden `acker` y el Programa 10-2 la orden `place`.

MATLAB Programa 10-1

```
A=[0  1  0;0  0  1;—1  —5  —6];
B=[0;0;1];
J=[—2+j*4  —2—j*4  —10];
K=acker(A,B,J)

K=

   199  55  8
```

MATLAB Programa 10-2

```
A=[0  1  0;0  0  1;—1  —5  —6];
B=[0;0;1];
J=[—2+j*4  —2—j*4  —10];
K=place(A,B,J)
  place: ndigits=15

K=

199.0000  55.0000  8.0000
```

EJEMPLO 10-3 Se considera el mismo sistema que se analizó en el Ejemplo 10-1. Se desea que este sistema regulador tenga polos en lazo cerrado en

$$s = -2 + j4, \qquad s = -2 - j4, \qquad s = -10$$

La matriz de ganancias de realimentación del estado **K** necesaria se obtuvo en el Ejemplo 10-1 como sigue:

$$\mathbf{K} = [199 \quad 55 \quad 8]$$

Utilizando MATLAB, obtenga la respuesta del sistema a la siguiente condición inicial:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Respuesta a condición inicial. Para obtener la respuesta a la condición inicial dada **x**(0), se sustituye $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ en la ecuación de la planta y se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para representar las curvas de respuesta (x_1 respecto a t, x_2 respecto a t y x_3 respecto a t) se puede utilizar la orden `initial`. En primer lugar se definen las ecuaciones en el espacio de estado para el sistema como sigue:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{I}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{u}$$

donde se incluye **u** (un vector de entrada tridimensional). Este vector **u** se considera **0** en el cálculo de la respuesta a la condición inicial. A continuación se define

```
sys = ss(A-BK, eye(3), eye(3), eye(3))
```

y se utiliza la orden `initial` de la forma siguiente:

```
x = initial(sys, [1;0;0],t)
```

donde `t` es el tiempo que se quiere emplear, tal como

```
t = 0:0.01:4;
```

De donde se obtiene `x1`, `x2` y `x3` como sigue:

```
x1 = [1  0  0]*x';

x2 = [0  1  0]*x';

x3 = [0  0  1]*x';
```

y se utiliza la orden `plot`. El programa se muestra en el Programa 10-3 de MATLAB. En la Figura 10-3 se muestran las curvas de respuesta resultante.

MATLAB Programa 10-3

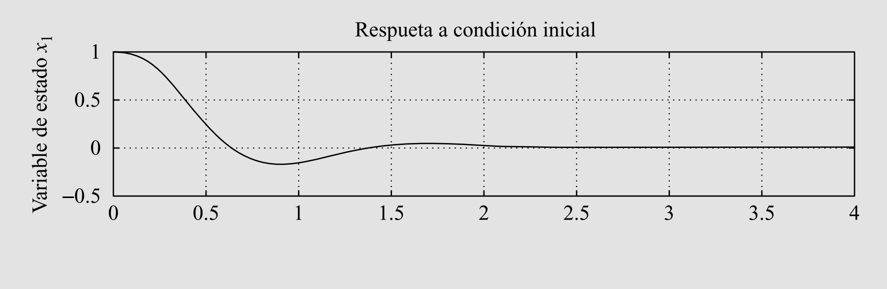
```
% Respuesta a condición inicial:

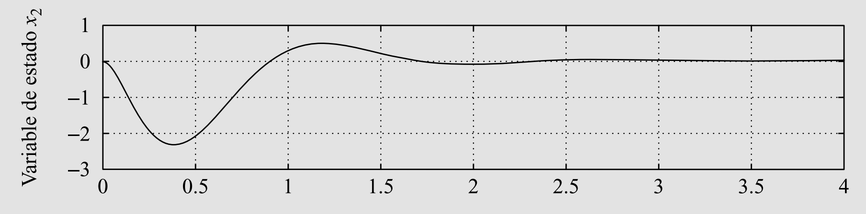
A=[0  1  0;0  0  1;–1  –5  –6];
B=[0;0;1];
K=[199  55  8];
sys=ss(A–B*K, eye(3), eye(3), eye(3));
t=0:0.01:4;
x=initial(sys,[1;0;0],t);
x1=[1  0  0]*x';
x2=[0  1  0]*x';
x3=[0  0  1]*x';

subplot(3,1,1); plot(t,x1), grid
title('Respuesta a condición inicial')
ylabel('Variable de estado x1')

subplot(3,1,2); plot(t,x2),grid
ylabel('Variable de estado x2')

subplot(3,1,3); plot(t,x3),grid
xlabel('t (sec)')
ylabel('Variable de estado x3')
```





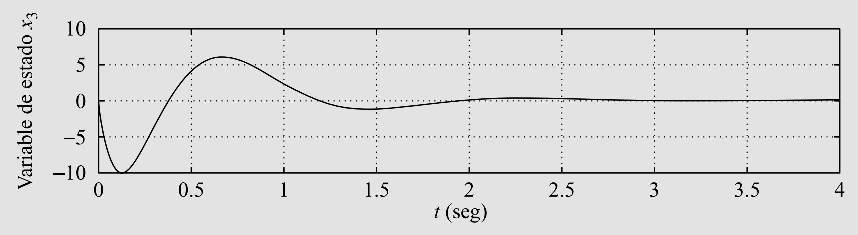


Figura 10-3. Respuesta a condición inicial.

10-4 Diseño de servosistemas

En esta sección se analizará el método de asignación de polos para el diseño de servosistemas de tipo 1. El método se limitará a sistemas que tengan una señal de control u escalar y una salida y también escalar.

A continuación, se presentará el problema de diseñar un servosistema de tipo 1 cuando la planta contiene un integrador. Después, se expondrá el diseño de los servosistemas de tipo 1 cuando la planta no tiene integrador.

Diseño de servosistema de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador. Supóngase que la planta se define mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{10-19}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10-20}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado para la planta (vector de dimensión n)

u = señal de control (escalar)

y = señal de salida (escalar)

$\mathbf{A}$ = matriz de coeficientes constantes $n \times n$

$\mathbf{B}$ = matriz de coeficientes constantes $n \times 1$

$\mathbf{C}$ = matriz de coeficientes constantes $1 \times n$

Como ya se ha dicho, se supone que la señal de control u y la señal de salida y son escalares. Mediante una elección adecuada de un conjunto de variables de estado, es posible seleccionar la salida igual a una de las variables de estado. (Véase el método presentado en el Capítulo 2 para obtener una representación en el espacio de estados de la función de transferencia en la cual la salida y es igual a x_1.)

La Figura 10-4 muestra una configuración general del servosistema de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador. Se supone que $y = x_1$. En el análisis que se efectúa, se supone que la

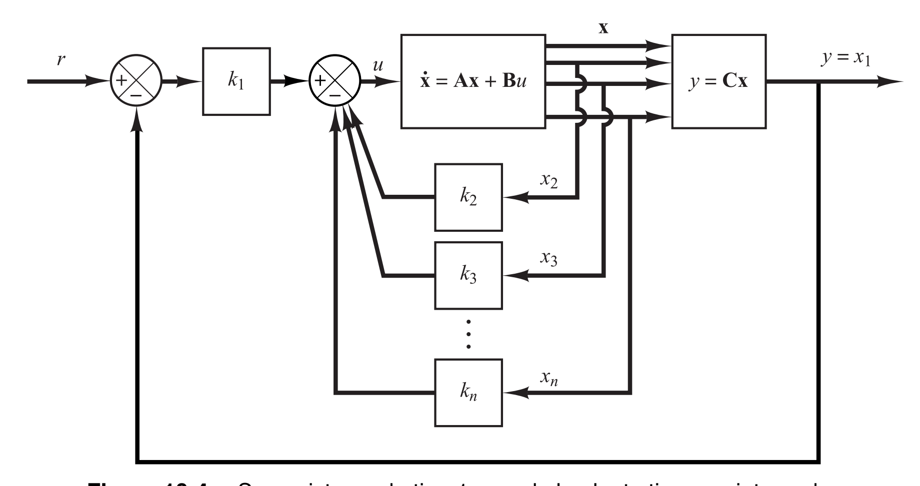


Figura 10-4. Servosistema de tipo 1 cuando la planta tiene un integrador.

entrada de referencia r es una función escalón. En este sistema se utiliza el siguiente esquema de control mediante realimentación del estado:

$$u = -[0 \quad k_2 \quad k_3 \quad \cdots \quad k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + k_1(r - x_1)$$

$$= -\mathbf{Kx} + k_1 r \tag{10-21}$$

donde

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]$$

Supóngase que la entrada de referencia (la función escalón) se aplica en $t = 0$. Así, para $t > 0$, la dinámica del sistema se puede describir mediante las Ecuaciones (10-19) y (10-21), o bien

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}k_1 r \tag{10-22}$$

Se diseñará el servosistema de tipo 1 de modo que los polos en lazo cerrado se localicen en las posiciones deseadas. El sistema diseñado será un sistema asintóticamente estable, $y(\infty)$ tenderá al valor constante r y $u(\infty)$ tenderá a cero. (r es una entrada escalón.)

Obsérvese que, en estado estacionario, se tiene que

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}k_1 r(\infty) \tag{10-23}$$

Considerando que $r(t)$ es una entrada escalón, se tiene $r(\infty) = r(t) = r$ (constante) para $t > 0$. Restando la Ecuación (10-23) de la Ecuación (10-22), se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty)] \tag{10-24}$$

Si se define

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{e}(t)$$

la Ecuación (10-24) se convierte en

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{e} \tag{10-25}$$

La Ecuación (10-25) describe la dinámica del error.

El diseño del servosistema de tipo 1 se convierte aquí en el diseño de un sistema regulador asintóticamente estable tal que $\mathbf{e}(t)$ tiende a cero, para cualquier condición inicial $e(0)$. Si el sistema definido mediante la Ecuación (10-19) es de estado completamente controlable, entonces, especificando los valores propios deseados $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ para la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$, la matriz $\mathbf{K}$ se determina mediante la técnica de asignación de polos presentada en la Sección 10-2.

El valor en estado estacionario de $\mathbf{x}(t)$ y $u(t)$ se encuentran del modo siguiente. En estado estacionario ($t = \infty$), a partir de la Ecuación (10-22), se tiene que

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = \mathbf{0} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}k_1 r$$

Como todos los valores propios deseados de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ están en el semiplano izquierdo del plano s, existe la inversa de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$. En consecuencia, $\mathbf{x}(\infty)$ se determina como

$$\mathbf{x}(\infty) = -(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}k_1 r$$

Asimismo, $u(\infty)$ se obtiene como

$$u(\infty) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\infty) + k_1 r = 0$$

(Véase el Ejemplo 10-4 para verificar esta última ecuación.)

EJEMPLO 10-4 Diseñe un servosistema de tipo 1 cuando la función de transferencia de la planta tiene un integrador. Suponga que la función de transferencia de la planta se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Los polos en lazo cerrado son $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$ y $s = -10$. Suponga que la configuración del sistema es la misma que la que se muestra en la Figura 10-4 y que la entrada de referencia r es una función escalón. Obtenga la respuesta a un escalón unitario del sistema diseñado.

Defina las variables de estado x_1, x_2 y x_3 del modo siguiente:

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{x}_1$$
$$x_3 = \dot{x}_2$$

Entonces, la representación en el espacio de estados del sistema es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{10-26}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10-27}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Refiriéndose a la Figura 10-4 y considerando que $n = 3$, la señal de control u se obtiene mediante

$$u = -(k_2 x_2 + k_3 x_3) + k_1(r - x_1) = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_1 r \tag{10-28}$$

donde

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

La matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$ se puede obtener fácilmente con MATLAB. Véase el Programa 10-4 de MATLAB.

MATLAB Programa 10-4

```
A=[0  1  0;0  0  1;0  -2  -3];
B=[0;0;1];
J=[-2+j*2*sqrt(3)  -2-j*2*sqrt(3)  -10];
K=acker(A,B,J)

K =

 160.0000  54.0000  11.0000
```

La matriz de ganancia de realimentación del estado **K** es así,

```
K = [160  54  11]
```

Respuesta a un escalón unitario del sistema diseñado. La respuesta a un escalón unitario del sistema diseñado se puede obtener como sigue:

Como

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [160 \quad 54 \quad 11] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix}$$

de la Ecuación (10-22), la ecuación de estado para el sistema diseñado es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -160 & -56 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 160 \end{bmatrix} r \tag{10-29}$$

y la ecuación de salida es

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{10-30}$$

Resolviendo las Ecuaciones (10-29) y (10-30) para $y(t)$ cuando r es una función escalón unitario se obtiene la curva de respuesta $y(t)$. El Programa 10-5 de MATLAB genera la respuesta a un escalón unitario que se muestra en la Figura 10-5.

MATLAB Programa 10-5

```
% ---------- Respuesta a escalón unitario ----------

% ***** Introduzca la matriz de estado, la matriz de control,
% la matriz de salida, y la matriz de transmisión directa
% del sistema diseñado *****

AA=[0  1  0;0  0  1;-160  -56  -14];
BB=[0;0;160];
CC=[1  0  0];
DD=[0];

% ***** Introduzca la orden step y la orden plot *****

t=0:0.01:5;
y=step(AA,BB,CC,DD,1,t);
plot(t,y)
grid
title('Respuesta escalón unitario')
xlabel('t Seg')
ylabel(Salida y')
```

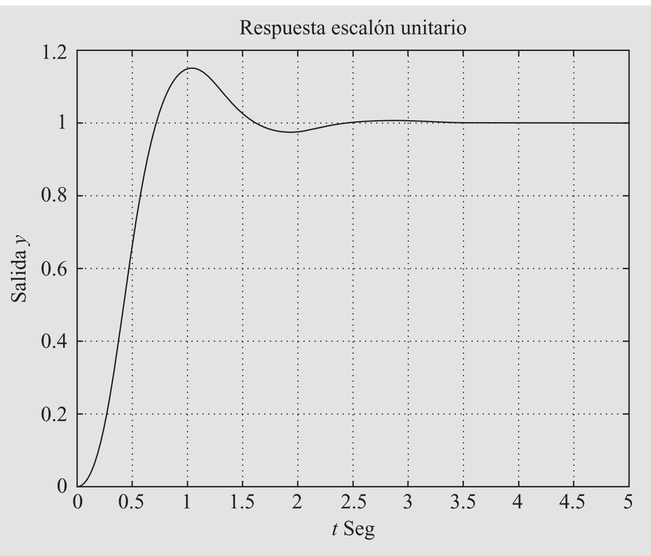


Figura 10-5. Curva de respuesta $y(t)$ respecto a t a un escalón unitario del sistema diseñado en el Ejemplo 10-4.

Observe que como

$$u(\infty) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\infty) + k_1 r(\infty) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\infty) + k_1 r$$

se tiene

$$u(\infty) = -[160 \quad 54 \quad 11] \begin{bmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \\ x_3(\infty) \end{bmatrix} + 160r$$

$$= -[160 \quad 54 \quad 11] \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 160r = 0$$

En estado estacionario la señal de control u se hace cero.

Diseño de un servosistema de tipo 1 cuando la planta no tiene integrador. Si la planta no tiene integrador (planta de tipo 0), el principio básico del diseño de un servosistema de tipo 1 es insertar un integrador en el camino directo entre el comparador de error y la planta, tal como se muestra en la Figura 10-6. (El diagrama de bloques de la Figura 10-6 es una forma básica del servosistema de tipo 1 donde la planta no tiene integrador.) A partir del diagrama se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{10-31}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10-32}$$

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_I \xi \tag{10-33}$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10-34}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado de la planta (vector de dimensión n)

u = señal de control (escalar)

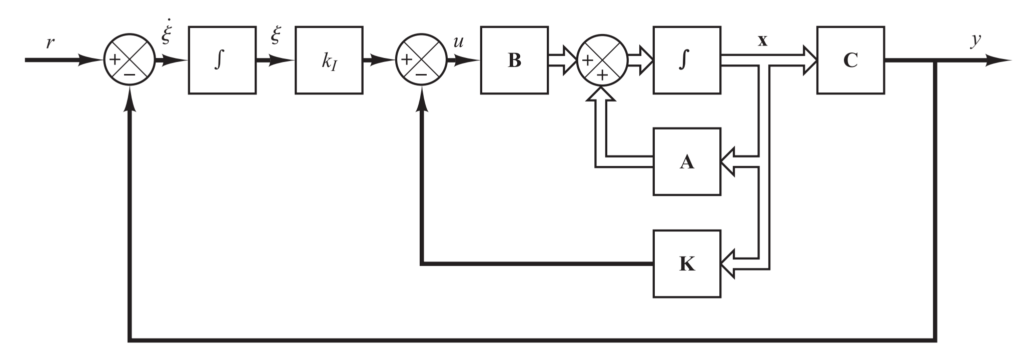


Figura 10-6. Servosistema de tipo 1.

y = señal de salida (escalar)

ξ = salida del integrador (variable de estado del sistema, escalar)

r = señal de entrada de referencia (función escalón, escalar)

$\mathbf{A}$ = matriz de coeficientes constantes de $n \times n$

$\mathbf{B}$ = matriz de coeficientes constantes de $n \times 1$

$\mathbf{C}$ = matriz de coeficientes constantes de $1 \times n$

Se supone que la planta obtenida mediante la Ecuación (10-31) es de estado completamente controlable. La función de transferencia de la planta se obtiene mediante

$$G_p(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Para evitar la posibilidad de que el integrador insertado se cancele por un cero de la planta en el origen, se supone que $G_p(s)$ no tiene un cero en el origen.

Supóngase que la entrada de referencia (función escalón) se aplica en $t = 0$. En este caso, para $t > 0$, la dinámica del sistema se describe mediante una ecuación que es una combinación de las Ecuaciones (10-31) y (10-34):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \tag{10-35}$$

Se diseñará un sistema asintóticamente estable, tal que $\mathbf{x}(\infty)$, $\xi(\infty)$ y $u(\infty)$ tiendan, respectivamente, a valores constantes. Así, en estado estacionario, $\dot{\xi}(t) = 0$ y se obtiene $y(\infty) = r$.

Obsérvese que, en estado estacionario, se tiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) \tag{10-36}$$

Considerando que $r(t)$ es una entrada escalón, se tiene que $r(\infty) = r(t) = r$ (constante) para $t > 0$. Restando la Ecuación (10-36) de la Ecuación (10-35), se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)] \tag{10-37}$$

Se define

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_e(t)$$

$$\xi(t) - \xi(\infty) = \xi_e(t)$$

$$u(t) - u(\infty) = u_e(t)$$

Entonces, la Ecuación (10-37) se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \tag{10-38}$$

donde

$$u_e(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e(t) + k_I \xi_e(t) \tag{10-39}$$

Se define un nuevo vector de error $e(t)$ de dimensión $(n + 1)$ mediante

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} = (n + 1)\text{-vector}$$

Así, la Ecuación (10-38) se transforma en

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{B}} u_e \tag{10-40}$$

donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}$$

y la Ecuación (10-39) se convierte en

$$u_e = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e} \tag{10-41}$$

donde

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \;\vdots\; -k_I]$$

La ecuación de estado del error se puede obtener sustituyendo la Ecuación (10-41) en la Ecuación (10-40):

$$\dot{\mathbf{e}} = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}})\mathbf{e} \tag{10-42}$$

Si los valores propios deseados de la matriz $\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}$ (es decir, los polos en lazo cerrado deseados) se especifican como $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{n+1}$, entonces la matriz de ganancias de realimentación del estado $\mathbf{K}$ y la constante de ganancia integral k_I pueden determinarse mediante el método de asignación de polos presentado en la Sección 10-2, a condición de que el sistema definido por la Ecuación (10-40) es de estado completamente controlable. Obsérvese que si la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

tiene rango $n + 1$, entonces el sistema definido por la Ecuación (10-40) es de estado completamente controlable. (Véase el Problema **A-10-12.**)

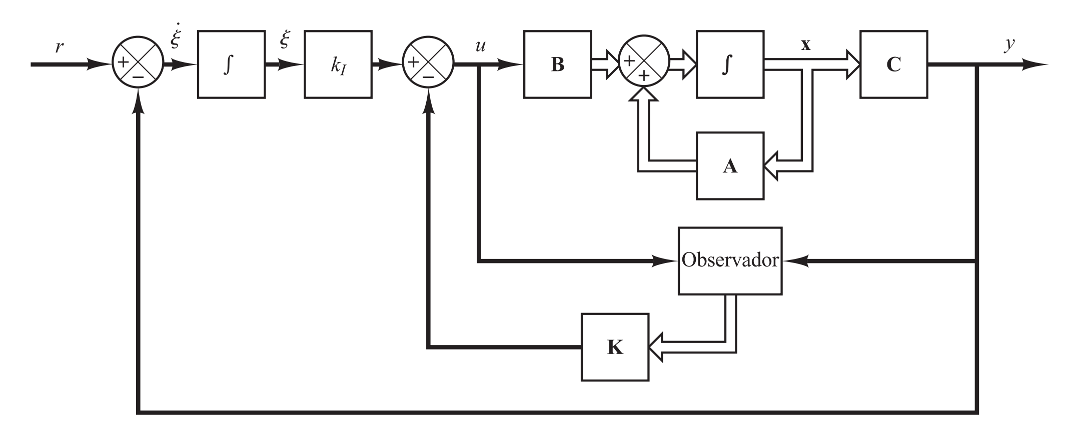


Figura 10-7. Servosistema de tipo 1 con observador de estado.

Como ocurre normalmente, no todas las variables de estado se pueden medir de forma directa. Si este es el caso, se necesita usar un observador de estado. La Figura 10-7 muestra un diagrama de bloques de un servosistema de tipo 1 con un observador de estado. [En la figura, cada bloque con un símbolo integral representa un integrador ($1/s$).] En la Sección 10-5 se presenta un análisis detallado de los observadores de estado.

EJEMPLO 10-5 Considere el sistema de control del péndulo invertido que se muestra en la Figura 10-8. En este ejemplo, se está interesado en los movimientos del péndulo y en el movimiento del carro en el plano de la página.

Se desea mantener el péndulo invertido lo más cercano posible a la vertical y al mismo tiempo controlar la posición del carro; por ejemplo, moverlo súbitamente de un punto a otro. Para controlar la posición del carro es necesario construir un servosistema de tipo 1. El sistema del péndulo invertido montado en un carro no tiene un integrador. Por lo tanto, se realimenta la señal de posición y (que indica la posición del carro) a la entrada y se inserta un integrador en el cami-

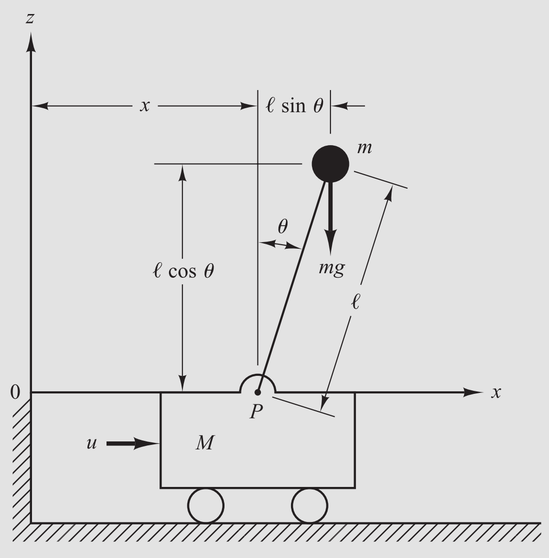


Figura 10-8. Sistema de control del péndulo invertido.

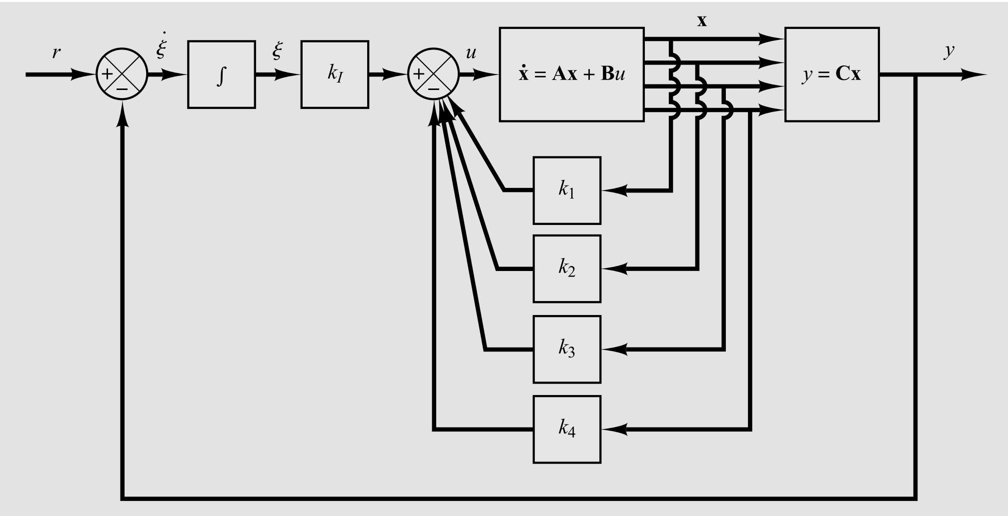


Figura 10-9. Sistema de control del péndulo invertido (servosistema de tipo 1 cuando la planta no tiene un integrador).

no directo, tal como se muestra en la Figura 10-9. Se supone que el ángulo del péndulo θ y la velocidad angular $\dot{\theta}$ son pequeños, por lo que sen $\theta \doteqdot \dot{\theta}$, cos $\theta \doteqdot 1$ y $\theta\dot{\theta}^2 \doteqdot 0$. También se supondrá que los valores numéricos para M, m y l están dados por

$$M = 2 \text{ kg}, \qquad m = 0.1 \text{ kg}, \qquad l = 0.5 \text{ m}$$

Anteriormente en el Ejemplo 3-6 se dedujeron las ecuaciones para el sistema del péndulo invertido que se muestra en la Figura 3-6, que es el mismo que el de la Figura 10-8. A partir de la Figura 3-6, se comenzó con las ecuaciones del balance de fuerza y del balance de pares y se finalizó con las Ecuaciones (3-20) y (3-21) del modelo del sistema del péndulo invertido. Tomando en cuenta las Ecuaciones (3-20) y (3-21) las ecuaciones para el sistema de control del péndulo invertido son

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \tag{10-43}$$

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \tag{10-44}$$

Cuando se sustituyen los valores numéricos, las Ecuaciones (10-43) y (10-44) se convierten en

$$\ddot{\theta} = 20.601\theta - u \tag{10-45}$$

$$\ddot{x} = 0.5u - 0.4905\theta \tag{10-46}$$

Se definen las variables de estado x_1, x_2, x_3 y x_4 como

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$

Teniendo en cuenta las Ecuaciones (10-45) y (10-46) y la Figura 10-9 y considerando la posición del carro x como la salida del sistema, se obtienen las ecuaciones para el sistema del modo siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{10-47}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10-48}$$

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_I\xi \tag{10-49}$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10-50}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

Para el servosistema de tipo 1, se tiene la ecuación de error del estado obtenida mediante la Ecuación (10-40):

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{B}}u_e \tag{10-51}$$

donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y la señal de control se obtiene mediante la Ecuación (10-41):

$$u_e = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e}$$

donde

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \;\vdots\; -k_I] = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \;\vdots\; -k_I]$$

Para obtener una velocidad y un amortiguamiento razonables en la respuesta del sistema diseñado (por ejemplo, un tiempo de asentamiento de aproximadamente $4 \sim 5$ seg y una sobreelongación máxima del $15 \sim 16\%$ en la respuesta a un escalón en el carro) se seleccionan los polos en lazo cerrado en $s = \mu_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), donde

$$\mu_1 = -1 + j\sqrt{3}, \qquad \mu_2 = -1 - j\sqrt{3}, \qquad \mu_3 = -5, \qquad \mu_4 = -5, \qquad \mu_5 = -5$$

Utilizando MATLAB se determinará la matriz de ganancia de realimentación del estado.

Antes de continuar, se debe examinar el rango de la matriz **P**, donde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz **P** está dada por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10-52}$$

Se encuentra que el rango de esta matriz es 5. Por lo tanto, el sistema definido mediante la Ecuación (10-51) es de estado completamente controlable y es posible una asignación arbitraria de los polos. El Programa de MATLAB 10-6 obtiene la matriz de ganancia de realimentación del estado $\hat{\mathbf{K}}$.

MATLAB Programa 10-6

```
A=[0  1  0  0; 20.601  0  0  0; 0  0  0  1; -0.4905  0  0  0];
B=[0;-1;0;0.5];
C=[0  0  1  0];
Ahat=[A  zeros(4,1); -C  0];
Bhat=[B;0];
J=[-1+j*sqrt(3) -1-j*sqrt(3)  -5  -5  -5];
Khat=acker(Ahat,Bhat,J)

Khat=

  -157.6336  -35.3733  -56.0652  -36.7466  50.9684
```

Por lo tanto, se obtiene

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] = [-157.6336 \quad -35.3733 \quad -56.0652 \quad -36.7466]$$

y

$$k_I = -50.9684$$

Características de la respuesta a un escalón unitario del sistema diseñado. Una vez que se han determinado la matriz de ganancia de realimentación **K** y la constante de ganancia integral k_1, la respuesta a un escalón en la posición del carro se puede obtener resolviendo la siguiente ecuación, que se deduce sustituyendo la Ecuación (10-49) en la Ecuación (10-35):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{B}k_I \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{10-53}$$

La salida del sistema es $x_3(t)$ o bien

$$y = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + [0]r \tag{10-54}$$

Se definen la matriz de estado, la matriz de control, la matriz de salida y la matriz de transmisión directa del sistema obtenida mediante las Ecuaciones (10-53) y (10-54), como `AA`, `BB`, `CC` y `DD`, respectivamente. Se puede utilizar el programa MATLAB 10-7 para obtener las curvas de respuesta escalón del sistema diseñado. Observe que, para obtener la respuesta a un escalón unitario, se introduce la orden

```
[y,x,t] = step(AA,BB,CC,DD, 1, t)
```

La Figura 10-10 muestra las curvas x_1 respecto de t, x_2 respecto t, x_3 $(=\text{salida } y)$ respecto de t, x_4 respecto t y x_5 $(=\xi)$ respecto de t. Observe que $y(t)$ $[=x_3(t)]$ tiene aproximadamente el 15% de sobreelongación y el tiempo de asentamiento es aproximadamente de 4,5 seg. $\xi(t)$ $[=x_5(t)]$ tiende a 1,1. Este resultado se puede deducir como sigue. Como

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}u(\infty)$$

o bien

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(\infty)$$

MATLAB Programa 10-7

```
%**** El siguiente programa obtiene la respuesta escalón
% del péndulo invertido que se acaba de diseñar *****

A=[0 1 0 0;20.601 0 0 0;0 0 0 1;–0.4905 0 0 0];
B=[0;–1;0;0.5];
C=[0 0 1 0]
D=[0];
K=[–157.6336 –35.3733 –56.0652 –36.7466];
KI=–50.9684;
AA=[A–B*K B*KI;–C 0];
BB=[0;0;0;0;1];
CC=[C 0];
DD=[0];

%***** Para obtener las curvas de respuesta x1 respecto de t,
x2 respecto de t, % x3 respecto de t, x4 respecto de t, y x5
respecto de t, de forma separada, introduzca % la orden
siguiente *****

t=0:0.02:6;
[y,x,t]=step(AA,BB,CC,DD,1,t);

x1=[1 0 0 0 0]*x';
x2=[0 1 0 0 0]*x';
x3=[0 0 1 0 0]*x';
x4=[0 0 0 1 0]*x';
x5=[0 0 0 0 1]*x';

subplot(3,2,1); plot(t,x1); grid
title('x1–t')
xlabel('t Seg'); ylabel('x1')

subplot(3,2,2); plot(t,x2); grid
title('x2–t')
xlabel('t Seg'); ylabel('x2')

subplot(3,2,3); plot(t,x3); grid
title('x3–t')
xlabel('t Seg'); ylabel('x3')

subplot(3,2,4); plot(t,x4); grid
title('x4–t')
xlabel('t Seg'); ylabel('x4')

subplot(3,2,5); plot(t,x5); grid
title('x5–t')
xlabel('t Seg'); ylabel('x5')
```

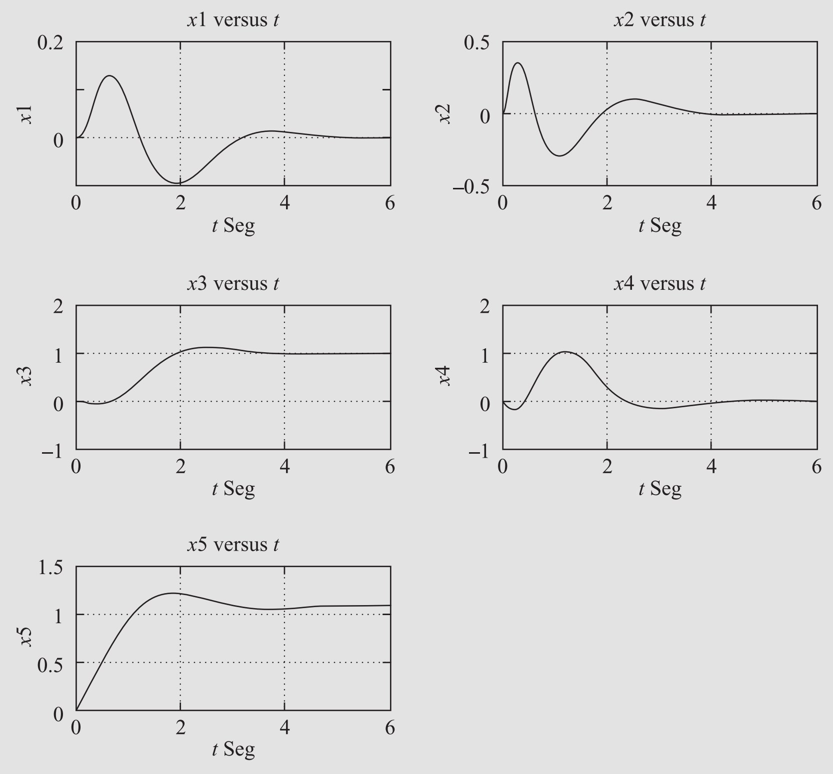


Figura 10-10. Curvas $x_1 - t$, $x_2 - t$, x_3 (=salida y) $- t$, $x_4 - t$ y x_5 $(=\xi) - t$.

se obtiene

$$u(\infty) = 0$$

Como $u(\infty) = 0$, de la Ecuación (10-33) se tiene

$$u(\infty) = 0 = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\infty) + k_1\xi(\infty)$$

de forma que

$$\xi(\infty) = \frac{1}{k_I}[\mathbf{K}\mathbf{x}(\infty)] = \frac{1}{k_I}k_3x_3(\infty) = \frac{-56.0652}{-50.9684}r = 1.1r$$

Por lo tanto, para $r = 1$, se obtiene

$$\xi(\infty) = 1.1$$

Se observa que, como en cualquier problema de diseño, si la velocidad y el amortiguamiento no son suficientemente aceptables se debe modificar la ecuación característica deseada y determinar una nueva matriz $\hat{\mathbf{K}}$. Las simulaciones en la computadora se deben repetir hasta que se alcance un resultado satisfactorio.

10-5 Observadores de estado

En el método de asignación de polos para el diseño de sistemas de control, se supuso que todas las variables de estado estaban disponibles para su realimentación. Sin embargo, en la práctica no todas las variables de estado están accesibles para poder realimentarse. Entonces, se necesita

estimar las variables de estado que no están disponibles. La estimación de variables de estado no medibles se denomina normalmente *observación*. Un dispositivo (o un programa de computador) que estima u observa las variables de estado se llama un *observador de estado*, o, simplemente, un *observador*. Si el observador de estado capta todas las variables de estado del sistema, sin importar si algunas están disponibles por medición directa, se denomina *observador de estado de orden completo*. Hay ocasiones en las que un observador de este tipo no es necesario, ya que sólo se requiere la observación de las variables de estado que no se miden, pero no de aquellas que también se miden directamente. Por ejemplo, como las variables de salida son observables y se relacionan en forma lineal con las variables de estado, no se necesita observar todas las variables de estado, sino sólo las $n - m$ variables de estado, donde n es la dimensión del vector de estado y m es la dimensión del vector de salida.

Un observador que estima menos de n variables de estado, donde n es la dimensión del vector de estado, se denomina *observador de estado de orden reducido* o, simplemente, un *observador de orden reducido*. Si el observador de estado de orden reducido es el orden mínimo posible, se denomina *observador de estado de orden mínimo* u *observador de orden mínimo*. En esta sección se analizará el observador de estado de orden completo y el observador de estado de orden mínimo.

Observador de estado. Un observador de estado estima las variables de estado basándose en las mediciones de las variables de salida y de control. Por lo tanto, el concepto de observabilidad analizado en la Sección 9.7 juega un papel importante. Como se verá más adelante, los observadores de estado pueden diseñarse si y sólo si se satisface la condición de observabilidad.

En el análisis que sigue de los observadores de estado, se utilizará la notación $\tilde{\mathbf{x}}$ para designar el vector de estado observado. En muchos casos prácticos, el vector de estado observado $\tilde{\mathbf{x}}$ se usa en la realimentación del estado para generar el vector de control deseado.

Sea el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{10-55}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10-56}$$

El observador es un subsistema para reconstruir el vector de estado de la planta. El modelo matemático del observador es básicamente el mismo que el de la planta, salvo que se incluye un término adicional que contiene el error de estimación para compensar las imprecisiones en las matrices **A** y **B** y la falta del error inicial. El error de estimación o error de observación es la diferencia entre la salida medida y la salida estimada. El error inicial es la diferencia entre el estado inicial y el estado estimado inicial. De esta forma, se define el modelo matemático del observador como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e(y - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y \end{aligned} \tag{10-57}$$

donde $\tilde{\mathbf{x}}$ es el estado estimado y $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}$ es la salida estimada. Las entradas al observador son la salida y y la entrada de control u. La matriz $\mathbf{K}_e$, que se llama matriz de ganancia del observador, es una matriz de ponderación al término de corrección que involucra la diferencia entre la salida medida y y la salida estimada $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}$. Este término corrige de forma continua la salida del modelo y mejora el comportamiento del observador. La Figura 10-11 muestra el diagrama de bloques del observador de estado de orden completo del sistema.

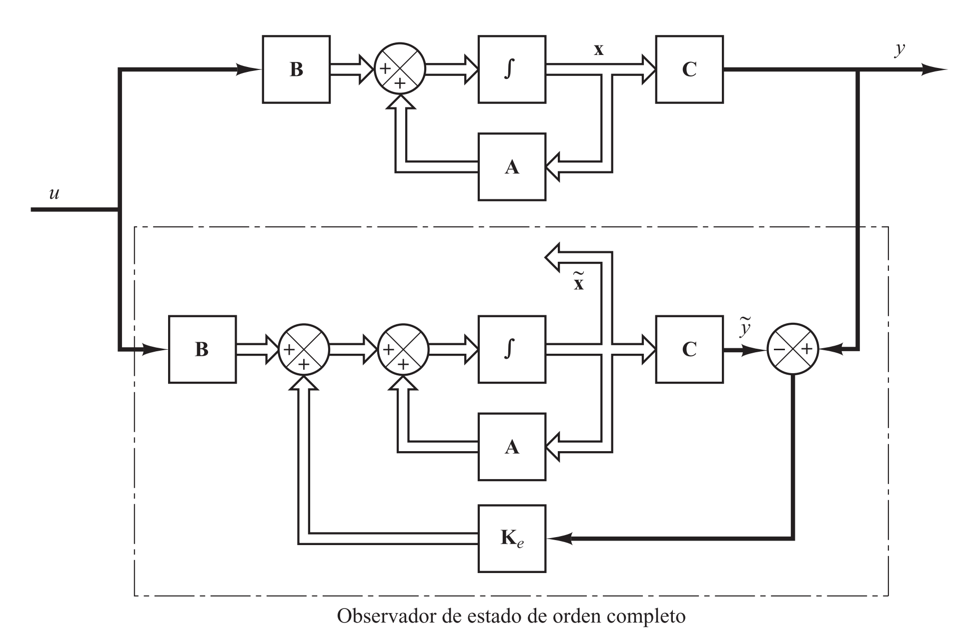


Figura 10-11. Diagrama de bloque del sistema y del observador de estado de orden completo, cuando la entrada *u* y la salida *y* son escalares.

Observador de estado de orden completo. El orden del observador de estado que se analizará aquí es igual al del sistema. Supóngase que el sistema se define mediante las Ecuaciones (10-55) y (10-56) y que el modelo del observador se define mediante la Ecuación (10-57).

Para obtener la ecuación de error del observador, se resta la Ecuación (10-57) de la Ecuación (10-55).

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_e(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}})$$

$$= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \qquad (10\text{-}58)$$

Se define la diferencia entre $\mathbf{x}$ y $\tilde{\mathbf{x}}$ como el vector de error $\mathbf{e}$, o bien

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$$

Entonces, la Ecuación (10-58) se convierte en

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e} \qquad (10\text{-}59)$$

A partir de la Ecuación (10-59) se ve que el comportamiento dinámico del vector de error está determinado por los valores propios de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$. Si la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ es estable, el vector de error convergerá a cero para cualquier vector de error inicial $\mathbf{e}(0)$. Es decir, $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ convergerá a $\mathbf{x}(t)$ sin tomar en cuenta los valores de $\mathbf{x}(0)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(0)$. Si se eligen los valores propios de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ de tal forma que el comportamiento dinámico del vector de error sea asintóticamente estable y suficientemente rápido, entonces cualquier vector de error tenderá a 0 (el origen) con una velocidad adecuada.

Si el sistema es completamente observable, se puede demostrar que es posible seleccionar una matriz $\mathbf{K}_e$ tal que $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ tenga valores propios arbitrariamente deseados. Es decir, se puede determinar la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$, para obtener la matriz deseada $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$. A continuación se analizará esta cuestión.

Problema dual. El problema de diseñar un observador de orden completo está en determinar la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ de forma que la dinámica de error definida mediante la Ecuación (10-59) sea asintóticamente estable con una velocidad de respuesta suficiente. (La estabilidad asintótica y la velocidad de respuesta de la dinámica de error se determinan mediante los valores característicos de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$.) Por tanto, el diseño del observador de orden completo se convierte en determinar un $\mathbf{K}_e$ apropiado tal que $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ tenga los valores propios deseados. Por tanto, el problema es el mismo que en el caso de asignación de polos analizado en la Sección 10-2. De hecho, los dos problemas son matemáticamente el mismo. Esta propiedad se llama dualidad.

Considérese el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

al diseñar el observador de estado de orden completo, se resuelve el problema dual, es decir, se obtiene la solución del problema de asignación de polos para el sistema dual

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*v$$

$$n = \mathbf{B}^*\mathbf{z}$$

suponiendo que la señal de control v es

$$v = -\mathbf{K}\mathbf{z}$$

Si el sistema dual es de estado completamente controlable, la matriz de ganancias de realimentación del estado $\mathbf{K}$ se puede determinar de forma que la matriz $\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K}$ produzca un conjunto de valores propios deseados.

Si $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ son los valores propios deseados de la matriz del observador de estado, entonces si se toman los mismos μ_i como los valores propios deseados de la matriz de ganancias de realimentación del estado del sistema dual, se obtiene

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K})| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n)$$

Considerando que los valores característicos de $\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K}$ y los de $\mathbf{A} - \mathbf{K}^*\mathbf{C}$ son iguales, se tiene que

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K})| = |s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}^*\mathbf{C})|$$

Si se compara el polinomio característico $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}^*\mathbf{C})|$ y el polinomio característico $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})|$ para el sistema observador [véase la Ecuación (10-57)], se encuentra que $\mathbf{K}_e$ y $\mathbf{K}^*$ están relacionadas mediante

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^*$$

Por tanto, si se utiliza la matriz $\mathbf{K}$ determinada mediante el método de asignación de polos en el sistema dual, la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ para el sistema original se determina a partir de la relación $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^*$. (Véanse los detalles en el Problema **A-10-10**.)

Condición necesaria y suficiente para la observación del estado. Como ya se analizó, una condición necesaria y suficiente para la determinación de la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ para los valores propios deseados de $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ es que el dual del sistema original

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*v$$

sea de estado completamente controlable. La condición de controlabilidad completa del estado para este sistema dual es que el rango de

$$[\mathbf{C}^* \,\vdots\, \mathbf{A}^*\mathbf{C} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

sea n. Esta es la condición para una observabilidad completa del sistema original definido mediante las Ecuaciones (10-55) y (10-56). Esto significa que una condición necesaria y suficiente para la observación del estado del sistema definido por las Ecuaciones (10-55) y (10-56) es que el sistema sea completamente observable.

Una vez que se han seleccionado los valores propios deseados (o la ecuación característica deseada), se puede diseñar el observador de estado de orden completo, si la planta es completamente observable. Los valores propios deseados de la ecuación característica se deberían escoger de forma que el observador de estado responda al menos de dos a cinco veces más rápido que el sistema en lazo cerrado considerado. Como ya se ha visto anteriormente, la ecuación para el observador de estado de orden completo es

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y \tag{10-60}$$

Debe observarse que hasta ahora se ha supuesto que las matrices **A**, **B** y **C** en el observador son exactamente iguales a las de la planta física. Si hay discrepancias en las matrices **A**, **B** y **C** de la planta y del observador, entonces la dinámica del error del observador no viene ya expresada por la Ecuación (10-59). Esto quiere decir que el error puede no tender a cero tal como se supuso. Por tanto, se necesita seleccionar $\mathbf{K}_e$ de forma que el observador sea estable y que el error permanezca aceptablemente pequeño cuando hay pequeños errores de modelado.

Método de transformación para obtener la matriz de ganancia del observador de estado $\mathbf{K}_e$. Si se sigue el mismo método que se utilizó al deducir la ecuación de la matriz de ganancia de realimentación del estado **K**, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1}\begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \tag{10-61}$$

donde $\mathbf{K}_e$ es una matriz $n \times 1$.

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1}$$

y

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \,\vdots\, \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Véase el Problema **A-10-10** para la obtención de la Ecuación (10-61).)

Método de sustitución directa para obtener la matriz de ganancias del observador de estado $\mathbf{K}_e$. Al igual que en el caso de la asignación de polos, si el sistema es de orden bajo, puede ser más sencilla la sustitución directa de la matriz $\mathbf{K}_e$ dentro del polinomio característico deseado. Por ejemplo, si $\mathbf{x}$ es un vector de dimensión 3, se puede escribir la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ como

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \\ k_{e3} \end{bmatrix}$$

Se sustituye esta matriz $\mathbf{K}_e$ en el polinomio característico deseado:

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de s en ambos miembros de esta última ecuación, se pueden determinar los valores de k_{e1}, k_{e2} y k_{e3}. Este método es conveniente si $n = 1$, 2 o 3, donde n es la dimensión del vector de estado $\mathbf{x}$. (Aunque este método se puede utilizar cuando $n = 4, 5, 6, ...$, los cálculos que hay que realizar se vuelven muy tediosos.)

Otra manera de determinar la matriz de ganancias del observador de estado $\mathbf{K}_e$ es utilizar la fórmula de Ackermann. El método se presenta a continuación.

Fórmula de Ackermann. Sea el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{10-62}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10-63}$$

En la Sección 10-2 se obtuvo la fórmula de Ackermann para la asignación de polos para el sistema definido por la Ecuación (10-62). El resultado se obtuvo mediante la Ecuación (10-18), que se reescribe a continuación:

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1}\phi(\mathbf{A})$$

Para el dual del sistema definido mediante las Ecuaciones (10-62) y (10-63),

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*v$$

$$n = \mathbf{B}^*\mathbf{z}$$

la fórmula de Ackermann anterior para la asignación de polos se modifica a

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1][\mathbf{C}^* \mid \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \mid \cdots \mid (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]^{-1}\phi(\mathbf{A}^*) \tag{10-64}$$

Como se señaló antes, la matriz de ganancias del observador de estado $\mathbf{K}_e$ se obtiene mediante $\mathbf{K}^*$, donde $\mathbf{K}$ viene dada por la Ecuación (10-64). Por tanto,

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^* = \phi(\mathbf{A}^*)^* \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \phi(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10-65}$$

donde $\phi(s)$ es el polinomio característico deseado para el observador de estado, o

$$\phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n)$$

donde μ_1, μ_2, ..., μ_n son los valores propios deseados. La Ecuación (10-65) se denomina fórmula de Ackermann para la determinación de la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$.

Comentarios sobre la selección de la mejor $\mathbf{K}_e$. Refiriéndose a la Figura 10-11, se observa que la señal de realimentación a través de la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ funciona como una señal de corrección para el modelo de planta que da cuenta de los factores desconocidos en la planta. Si existen factores desconocidos significativos, entonces la señal de realimentación a través de la matriz $\mathbf{K}_e$ debe ser relativamente grande. Sin embargo, si la señal de salida se contamina en forma significativa con perturbaciones y ruido en la medida, la salida y no es fiable y la señal de realimentación a través de la matriz $\mathbf{K}_e$ debe ser relativamente pequeña. Al determinar la matriz $\mathbf{K}_e$, se deben examinar cuidadosamente los efectos de las perturbaciones y el ruido que hay en la salida y.

Recuérdese que la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ depende de la ecuación característica deseada

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_n) = 0$$

La elección de un conjunto de μ_1, μ_2, ..., μ_n, en muchos casos, no es única. Como regla general, los polos del observador deben ser de dos a cinco veces más rápidos que los polos del controlador para asegurarse de que el error de observación (error de estimación) converge a cero rápidamente. Esto quiere decir que el error de estimación del observador decae de dos a cinco veces más rápido que el vector de estado $\mathbf{x}$. Este decaimiento más rápido del error del observador en comparación con la dinámica deseada hace que los polos del controlador dominen la respuesta del sistema.

Es importante observar que si el ruido del sensor es considerable, se pueden seleccionar los polos del observador para que sean más lentos que dos veces los polos del controlador, de manera que el ancho de banda del sistema se hará más pequeño y se atenúa el ruido. En este caso la respuesta del sistema estará fuertemente influenciada por los polos del observador. Si los polos del observador se localizan a la derecha de los polos del controlador en el semiplano izquierdo de s, la respuesta del sistema estará dominada por los polos del observador en lugar de los polos de control.

En el diseño de un observador de estado, es conveniente determinar algunas otras matrices de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ basándose en diferentes ecuaciones características deseadas. Para cada una de las distintas matrices $\mathbf{K}_e$, deben realizarse pruebas de simulación con el fin de evaluar el comportamiento del sistema resultante. Así, se selecciona la mejor K, desde el punto de vista del comportamiento general del sistema. En muchos casos prácticos la elección de la mejor matriz $\mathbf{K}_e$ se resuelve como un compromiso entre velocidad de respuesta rápida y sensibilidad frente a perturbaciones y ruidos.

EJEMPLO 10-6 Sea el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [0 \quad 1]$$

Se utiliza la realimentación de estado observada tal que

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$$

Diseñe un observador de estado de orden completo suponiendo que la configuración del sistema es idéntica a la que se observa en la Figura 10-11. Suponga que los valores propios deseados de la matriz del observador son

$$\mu_1 = -10, \qquad \mu_2 = -10$$

El diseño del observador de estado se reduce a la determinación de una matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ apropiada.

Se examina ahora la matriz de observabilidad. El rango de

$$[\mathbf{C}^* \;\vdots\; \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es 2. Por tanto, el sistema es completamente observable y es posible la determinación de la matriz de ganancias del observador deseada. Se resolverá este problema mediante tres métodos.

Método 1. Se determina la matriz de ganancias del observador mediante la Ecuación (10-61). El sistema dado está ya en la forma canónica observable. Por tanto, la matriz de transformación $\mathbf{Q} = (\mathbf{WN}^*)^{-1}$ es $\mathbf{I}$. Como la ecuación característica del sistema dado es

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -20.6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

se tiene que

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = -20.6$$

La ecuación característica deseada es

$$(s + 10)^2 = s^2 + 20s + 100 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 = 0$$

Por tanto,

$$\alpha_1 = 20, \qquad \alpha_2 = 100$$

Así, la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ se obtiene de la Ecuación (10-61) del modo siguiente:

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{WN}^*)^{-1}\begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 + 20.6 \\ 20 - \;\; 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Método 2. Refiriéndose a la Ecuación (10-59),

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e}$$

la ecuación característica para el observador se convierte en

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0$$

Se define

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{ee} \end{bmatrix}$$

Entonces, la ecuación característica es

$$\left|\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{e1} \\ k_{e2} \end{bmatrix}[0 \quad 1]\right| = \begin{vmatrix} s & -20.6 + k_{e1} \\ -1 & s + k_{e2} \end{vmatrix}$$

$$= s^2 + k_{e2}s - 20.6 + k_{e1} = 0 \qquad (10\text{-}66)$$

Como la ecuación característica deseada es

$$s^2 + 20s + 100 = 0$$

si se compara la Ecuación (10-66) con esta última ecuación, se obtiene

$$k_{e1} = 120.6, \qquad k_{e2} = 20$$

o bien

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Método 3. Se utilizará la fórmula de Ackermann dada por la Ecuación (10-65):

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$\phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + 20s + 100$$

Por tanto,

$$\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 20\mathbf{A} + 100\mathbf{I}$$

y

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{A}^2 + 20\mathbf{A} + 100\mathbf{I}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 120.6 & 412 \\ 20 & 120.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Por supuesto, se obtiene la misma $\mathbf{K}_e$ independientemente del método que se utilice.

La ecuación para el observador de estado de orden completo viene dada por la Ecuación (10-57):

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 120.6 \\ 20 \end{bmatrix} y$$

Finalmente, observe que, al igual que en el caso de la asignación de polos, si el orden del sistema n es 4 o mayor, se prefieren los métodos 1 y 3, debido a que todos los cálculos matriciales se realizan con una computadora, mientras que el método 2 siempre requiere cálculos manuales de la ecuación característica que contiene parámetros desconocidos k_{e1}, k_{e2}, ..., k_{en}.

Efectos de la adición del observador sobre el sistema en lazo cerrado. En el proceso de diseño por asignación de polos, se supuso que el estado $\mathbf{x}(t)$ estaba disponible para su realimentación. Sin embargo, en la práctica $\mathbf{x}(t)$ puede no ser medible, por lo que se necesitará diseñar un observador y usar el estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ para su realimentación, tal como se muestra en la Figura 10-12. Por tanto, el proceso de diseño se convierte en un proceso de dos etapas: la primera es la determinación de la matriz de ganancias de realimentación $\mathbf{K}$ que genera la ecuación característica deseada y la segunda es la determinación de la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ para obtener la ecuación característica deseada del observador.

Se examinan a continuación los efectos del uso del estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ en lugar del estado real $\mathbf{x}(t)$ en la ecuación característica de un sistema en lazo cerrado.

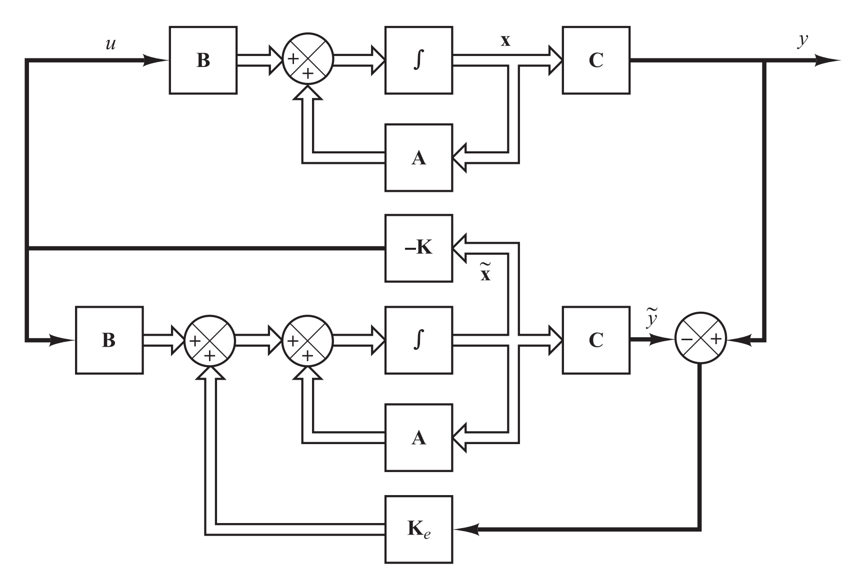


Figura 10-12. Sistema de control realimentado con estado observado.

Considérese el sistema de estado completamente controlable y observable definido mediante las ecuaciones

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Para el control mediante realimentación del estado basado en el estado observado $\tilde{\mathbf{x}}$,

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$$

Con este control, la ecuación de estado resulta

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \tag{10-67}$$

La diferencia entre el estado real $\mathbf{x}(t)$ y el estado observado $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ se definió como el error $\mathbf{e}(t)$:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)$$

La sustitución del vector de error $\mathbf{e}(t)$ en la Ecuación (10-67) da

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e} \tag{10-68}$$

Obsérvese que la ecuación del error del observador viene dada por la Ecuación (10-59), que se repite a continuación:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e} \tag{10-69}$$

Combinando las Ecuaciones (10-68) y (10-69), se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \tag{10-70}$$

La Ecuación (10-70) describe la dinámica del sistema de control mediante realimentación del estado observado. La ecuación característica para el sistema es

$$\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{vmatrix} = 0$$

o bien

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}|\,|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| = 0$$

Obsérvese que los polos en lazo cerrado del sistema de control mediante realimentación del estado observado consisten en los polos debidos sólo al diseño mediante asignación de polos y los polos originados sólo por el diseño del observador. Esto significa que el diseño mediante asignación de polos y el diseño del observador son independientes uno del otro. Se diseñan por separado y se combinan para formar el sistema de control mediante realimentación del estado observado. Obsérvese que, si el orden de la planta es n, entonces el observador es también de orden n (si se usa el observador de estado de orden completo), y la ecuación característica resultante para el sistema completo en lazo cerrado es de orden $2n$.

Función de transferencia del controlador basado en observador. Sea el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{Cx}$$

Supóngase que el sistema es completamente observable, y que se utiliza el control mediante realimentación del estado observado $u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$. Entonces, las ecuaciones para el observador están dadas por

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_e y \tag{10-71}$$

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} \tag{10-72}$$

donde la Ecuación (10-71) se obtiene sustituyendo $u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$ en la Ecuación (10-57).

Si se toma la transformada de Laplace de la Ecuación (10-71), suponiendo condiciones iniciales nulas y resolviendo para $\tilde{\mathbf{X}}(s)$, se obtiene

$$\tilde{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e Y(s)$$

Sustituyendo $\tilde{\mathbf{X}}(s)$ en la transformada de Laplace de la Ecuación (10-72) se obtiene

$$U(s) = -\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e Y(s) \tag{10-73}$$

Entonces, la función de transferencia $U(s)/Y(s)$ se puede obtener como

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = -\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e$$

La Figura 10-13 muestra la representación del sistema en diagrama de bloques. Obsérvese que la función de transferencia

$$\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e$$

actúa como controlador del sistema. Por tanto, se llamará a la función de transferencia

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e \tag{10-74}$$

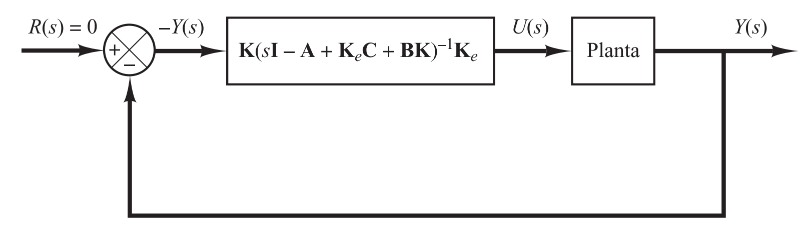


Figura 10-13. Representación en diagramas de bloques del sistema con un controlador-observador.

la función de transferencia del controlador basado en observador o simplemente la función de transferencia del controlador-observador.

Obsérvese que la matriz del controlador-observador

$$\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK}$$

puede ser o no estable, aunque $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ y $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ se escojan estables. De hecho, en algunos casos la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK}$ puede ser pobremente estable o incluso inestable.

EJEMPLO 10-7 Considere el diseño de un sistema regulador para la planta siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u \tag{10-75}$$

$$y = \mathbf{Cx} \tag{10-76}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

Suponga que se utiliza el método de asignación de polos para el diseño del sistema y que los polos en lazo cerrado deseados para este sistema están en $s = \mu_i$ $(i = 1, 2)$, donde $\mu_1 = -1.8 + j2.4$ y $\mu_2 = -1.8 - j2.4$. La matriz de ganancias de realimentación del estado $\mathbf{K}$ para este caso se puede obtener del modo siguiente:

$$\mathbf{K} = [29.6 \quad 3.6]$$

Usando esta matriz de ganancias de realimentación del estado $\mathbf{K}$, la señal de control u está dada por

$$u = -\mathbf{Kx} = -[29.6 \quad 3.6]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Suponga que se usa el control por realimentación del estado observado en lugar del control mediante realimentación del estado real, o

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = -[29.6 \quad 3.6]\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

donde los polos del observador se escogen en

$$s = -8, \qquad s = -8$$

Obtenga la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ y dibuje un diagrama de bloques para el sistema de control mediante realimentación del estado observado. A continuación obtenga la función de transferencia $U(s)/[-Y(s)]$ para el controlador-observador y dibuje otro diagrama de bloques con el controlador observador como un controlador serie en el camino directo. Finalmente, obtenga la respuesta del sistema a la siguiente condición inicial:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}(0) = \mathbf{x}(0) - \tilde{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para el sistema definido por la Ecuación (10-75), el polinomio característico es

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -20.6 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1 s + a_2$$

Así,

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = -20.6$$

El polinomio característico deseado para el observador es

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = (s + 8)(s + 8) = s^2 + 16s + 64$$
$$= s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$$

Por tanto,

$$\alpha_1 = 16, \qquad \alpha_2 = 64$$

Para la determinación de la matriz de ganancias del observador, se usa la Ecuación (10-61), o

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{WN}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

donde

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \,\vdots\, \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\mathbf{K}_e = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 64 + 20.6 \\ 16 - 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84.6 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} \tag{10-77}$$

La Ecuación (10-77) da la matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$. La ecuación del observador se obtiene mediante la Ecuación (10-60):

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y \tag{10-78}$$

Como

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$$

la Ecuación (10-78) se convierte en

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_e y$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} [1 \quad 0] - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [29.6 \quad 3.6] \right\} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} y$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93.6 & -3.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} y$$

El diagrama de bloques del sistema con realimentación del estado observado aparece en la Figura 10-14(a).

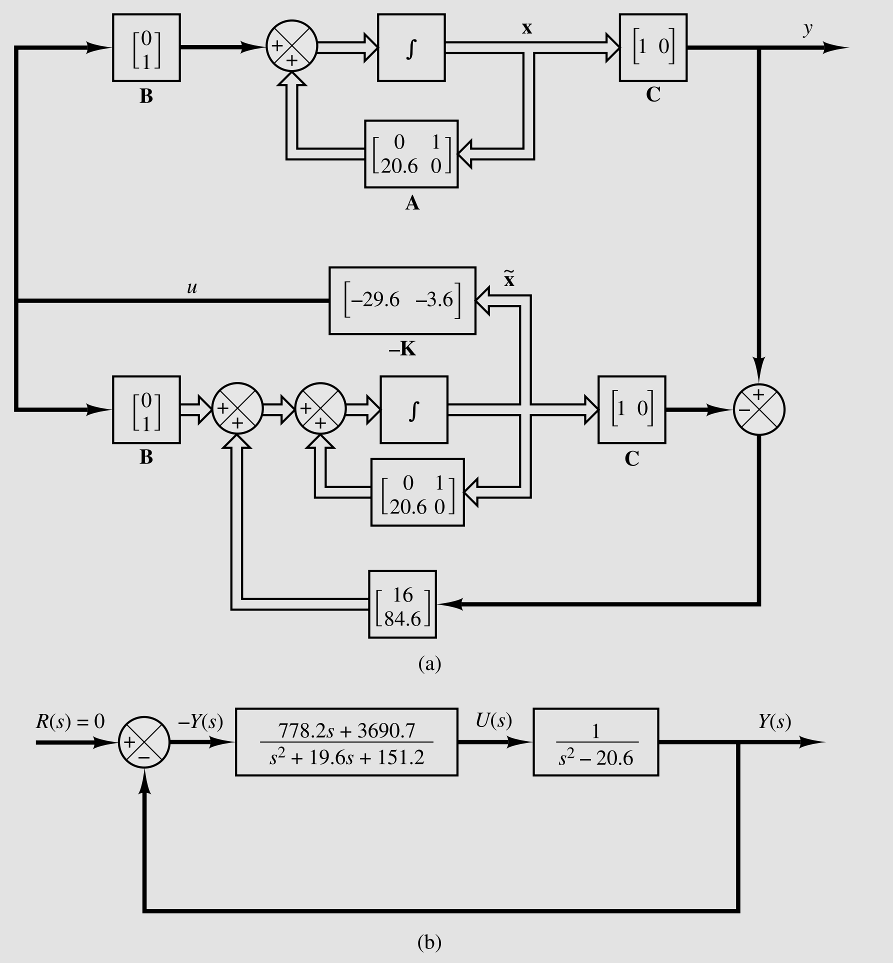


Figura 10-14. (a) Diagrama de bloques del sistema con realimentación del estado observado; (b) diagrama de bloques de la función de transferencia del sistema.

Refiriéndose a la Ecuación (10-74), la función de transferencia del controlador-observador es

$$\frac{\mathbf{U}(s)}{-\mathbf{Y}(s)} = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{K}_e$$

$$= [29.6 \quad 3.6]\begin{bmatrix} s+16 & -1 \\ 93.6 & s+3.6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{778.2s + 3690.7}{s^2 + 19.6s + 151.2}$$

La misma función de transferencia se puede obtener con MATLAB. Por ejemplo, el Programa MATLAB 10-8 produce la función de transferencia del controlador-observador cuando el observador es de orden completo. La Figura 10-14(b) muestra un diagrama de bloques del sistema.

MATLAB Programa 10-8

```
% Obtener la función de transferencia del
% controlador-observador --- observador de orden completo

A=[0  1;20.6  0];
B=[0;1];
C=[1  0];
K=[29.6  3.6];
Ke=[16;84.6];
AA=A-Ke*C-B*K;
BB=Ke;
CC=K;
DD=0;
[num,den]=ss2tf(AA,BB,CC,DD)

num=
   1.0e+003*
      0  0.7782  3.6907

den=

   1.0000  19.6000  151.2000
```

La dinámica del sistema de control mediante realimentación del estado observado recién diseñado se puede describir mediante las ecuaciones siguientes: para la planta,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para el observador,

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93.6 & -3.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} y$$

$$u = -[29.6 \quad 3.6] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

El sistema, como un todo, es de cuarto orden. La ecuación característica para el mismo es

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}|\,|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}| &= (s^2 + 3.6s + 9)(s^2 + 16s + 64) \\ &= s^4 + 19.6s^3 + 130.6s^2 + 374.4s + 576 = 0 \end{aligned}$$

La ecuación característica también se puede obtener a partir del diagrama de bloques del sistema que se muestra en la Figura 10-14(b). Como la función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{778.2s + 3690.7}{(s^2 + 19.6s + 151.2)(s^2 - 20.6) + 778.2s + 3690.7}$$

La ecuación característica es

$$(s^2 + 19.6s + 151.2)(s^2 - 20.6) + 778.2s + 3690.7$$
$$= s^4 + 19.6s^3 + 130.6s^2 + 374.4s + 576 = 0$$

Por supuesto, la ecuación característica es igual para el sistema representado en el espacio de estado y el representado mediante la función de transferencia.

Finalmente se obtendrá la respuesta del sistema a la siguiente condición inicial:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Refiriéndose a la Ecuación (10-70), la respuesta a la condición inicial se puede determinar de

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{e}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Un programa en MATLAB para obtener la respuesta se muestra en el Programa MATLAB 10-9. En la Figura 10-15 se muestran las curvas de respuesta resultantes.

MATLAB Programa 10-9

```
A=[0  1; 20.6  0];
B=[0;1];
C=[1  0];
K=[29.6  3.6];
Ke=[16; 84.6];
sys=ss([A–B*K B*K; zeros(2,2) A–Ke*C],eye(4),eye(4),eye(4));
t=0:0.01:4;
z=initial(sys,[1;0;0.5;0],t);
x1=[1  0  0  0]*z';
x2=[0  1  0  0]*z';
e1=[0  0  1  0]*z';
e2=[0  0  0  1]*z';

subplot(2,2,1); plot(t,x1),grid
title('Respuesta a condición inicial')
ylabel('Variable de estado x1')

subplot(2,2,2); plot(t,x2),grid
title('Respuesta a condición inicial')
ylabel('Variable de estado x2')

subplot(2,2,3); plot(t,e1),grid
xlabel('t (seg)'), ylabel('Variable de estado del error e1')

subplot(2,2,4); plot(t,e2),grid
xlabel('t (seg)'), ylabel('Variable de estado del error e2')
```

Figura 10-15. Curvas de respuesta a condición inicial.

Observador de orden mínimo. Los observadores analizados hasta ahora se diseñaron para reconstruir todas las variables de estado. En la práctica, algunas de las variables de estado se pueden medir con precisión. Tales variables de estado medidas con precisión no necesitan estimarse.

Supóngase que el vector de estado **x** es un vector de dimensión n y que el vector de salida **y** es un vector de dimensión m medible. Como las m variables de salida son combinaciones lineales de las variables de estado, no necesitan estimarse m variables de estado, sino sólo $n - m$ variables de estado. Así, el observador de orden reducido se vuelve un observador de $(n - m)$-ésimo orden. Tal observador de $(n - m)$-ésimo orden es el observador de orden mínimo. La Figura 10-16 muestra el diagrama de bloques de un sistema con un observador de orden mínimo.

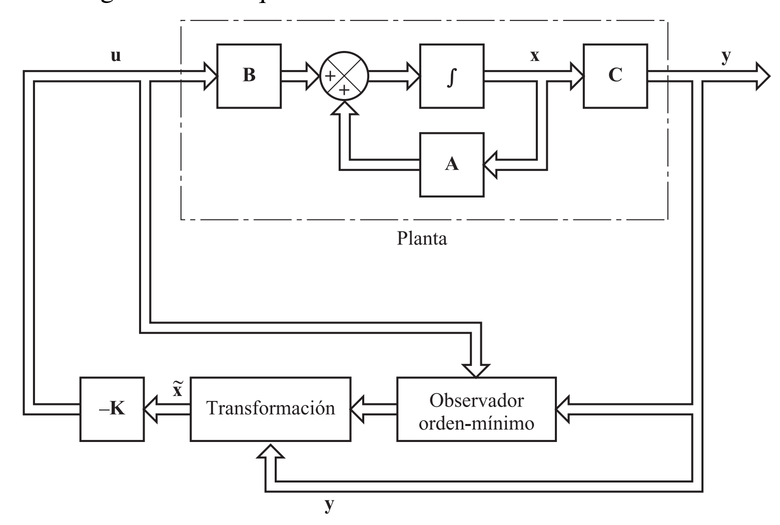


Figura 10-16. Sistema de control realimentado con estado observado con un observador de orden mínimo.

Sin embargo, es importante considerar que, si la medida de las variables de salida contiene ruido significativo y es relativamente imprecisa, el uso del observador de orden completo puede dar un mejor comportamiento del sistema.

Para presentar la idea básica del observador de orden mínimo, sin complicaciones matemáticas innecesarias, se expondrá el caso en el que la salida es un escalar (es decir, $m = 1$) y se derivará la ecuación de estado para el observador de orden mínimo. Sea el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{10-79}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10-80}$$

donde el vector de estado $\mathbf{x}$ se particiona en dos partes x_a (un escalar) y $\mathbf{x}_b$ [un vector de dimensión $(n - 1)$]. Aquí la variable de estado x_a es igual a la salida y de modo que se mide directamente, y $\mathbf{x}_b$ es la parte no medible del vector de estado. De esta forma, el estado particionado y las ecuaciones de salida son

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix} u \tag{10-81}$$

$$y = [1 \;\vdots\; \mathbf{0}] \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} \tag{10-82}$$

donde A_{aa} = escalar

$\mathbf{A}_{ab}$ = matriz de $1 \times (n - 1)$

$\mathbf{A}_{ba}$ = matriz de $(n - 1) \times 1$

$\mathbf{A}_{bb}$ = matriz de $(n - 1) \times (n - 1)$

B_a = escalar

$\mathbf{B}_b$ = matriz de $(n - 1) \times 1$

A partir de la Ecuación (10-81), la ecuación para la parte medida del estado es

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b + B_a u$$

o bien

$$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b \tag{10-83}$$

Los términos del miembro izquierdo de la Ecuación (10-83) se pueden medir. La Ecuación (10-83) funciona como la ecuación de salida. A1 diseñar el observador de orden mínimo, se considera que el lado izquierdo de la Ecuación (10-83) contiene cantidades conocidas. Por tanto, la Ecuación (10-83) relaciona las cantidades medibles y no medibles del estado.

A partir de la Ecuación (10-81), la ecuación de la parte no medida del estado es

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b u \tag{10-84}$$

Si se considera que los términos $\mathbf{A}_{ba}x_a$ y $\mathbf{B}_b u$ son cantidades conocidas, la Ecuación (10-84) describe la dinámica de la parte no medida del estado.

A continuación se presentará un método para diseñar un observador de orden mínimo. El procedimiento de diseño se simplifica si se utiliza la técnica de diseño desarrollada para el observador de estado de orden completo.

Compárese la ecuación de estado para el observador de orden completo con la del observador de orden mínimo. La ecuación de estado para el observador de orden completo es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

y la «ecuación de estado» para el observador de orden mínimo es

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u$$

La ecuación de salida para el observador de orden completo es

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

y la «ecuación de salida» para el observador de orden mínimo es

$$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b$$

El diseño del observador de orden mínimo se realiza del modo siguiente. Primero, obsérvese que la ecuación del observador para el observador de orden completo se obtuvo a partir de la Ecuación (10-57), la cual se repite aquí:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y \tag{10-85}$$

Así, haciendo las sustituciones de la Tabla 10-1 en la Ecuación (10-85), se obtiene

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b + \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u + \mathbf{K}_e(\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u) \tag{10-86}$$

donde la matriz de ganancias del observador de estado $\mathbf{K}_e$ es una matriz de $(n - 1) \times 1$. En la Ecuación (10-86), obsérvese que para estimar $\tilde{\mathbf{x}}_b$ se necesita la derivada de x_a. Esto presenta una dificultad, porque la diferenciación amplifica el ruido. Si x_a $(=y)$ tiene ruido, el uso de $\dot{x}_a$ no es aceptable. Para evitar esta dificultad, se elimina $\dot{x}_a$ de la forma siguiente. En primer lugar se reescribe la Ecuación (10-86) como

Tabla 10-1. Lista de sustituciones necesarias para escribir la ecuación del observador para el observador de estado de orden mínimo.

Observador de estado de orden completo	Observador de estado de orden mínimo
$\tilde{\mathbf{x}}$	$\tilde{\mathbf{x}}_b$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}_{bb}$
$\mathbf{B}u$	$\mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u$
y	$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u$
$\mathbf{C}$	$\mathbf{A}_{ab}$
$\mathbf{K}_e$ (matriz $n \times 1$)	$\mathbf{K}_e$ [matriz $(n - 1) \times 1$]

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b - \mathbf{K}_e \dot{x}_a = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b + (\mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa})y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a)u$$
$$= (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})(\bar{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y)$$
$$+ [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})\mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}]y$$
$$(\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a)u \tag{10-87}$$

Se define

$$\mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e y = \mathbf{x}_b - \mathbf{K}_e x_a = \boldsymbol{\eta}$$

y

$$\tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e x_a = \tilde{\boldsymbol{\eta}} \tag{10-88}$$

Entonces, la Ecuación (10-87) se hace

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})\tilde{\boldsymbol{\eta}} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})\mathbf{K}_e$$
$$+ \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}]y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a)u \tag{10-89}$$

Se define

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}$$
$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}$$
$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a$$

Entonces, la Ecuación (10-89) es

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = \hat{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\mathbf{B}}y + \hat{\mathbf{F}}u \tag{10-90}$$

La Ecuación (10-90), junto con la Ecuación (10-88), definen el observador de orden mínimo.

Como

$$y = [1 \;\vdots\; \mathbf{0}]\begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \mathbf{x}_b \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \hdashline \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}[\tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y] + \begin{bmatrix} 1 \\ \hdashline \mathbf{K}_e \end{bmatrix}y$$

donde $\mathbf{0}$ es un vector fila consistente en $(n - 1)$ ceros, si se define

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hdashline \mathbf{K}_e \end{bmatrix}$$

entonces se puede escribir $\tilde{\mathbf{x}}$ en términos de $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ e y como sigue:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{C}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\mathbf{D}}y \tag{10-91}$$

Esta ecuación da la transformación de $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ a $\tilde{\mathbf{x}}$.

La Figura 10-17 muestra el diagrama de bloques del sistema de control realimentado con estado observado con el observador de orden mínimo, basado en las Ecuaciones (10-79), (10-80), (10-90), (10-91) y $u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$.

A continuación se obtendrá la ecuación del error del observador. Utilizando la Ecuación (10-83), la Ecuación (10-86) se modifica a

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab})\tilde{\mathbf{x}}_b + \mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u + \mathbf{K}_e \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b \tag{10-92}$$

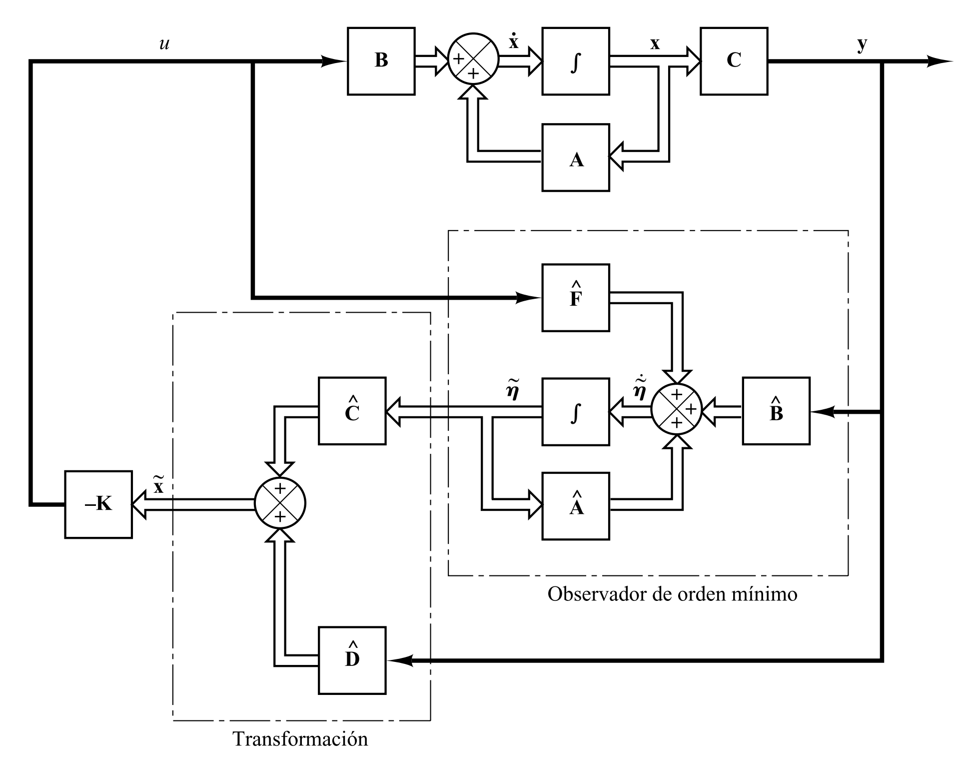


Figura 10-17. Sistema con realimentación de estado observado donde el observador es el observador de orden mínimo.

Restando la Ecuación (10-92) de la Ecuación (10-84), se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}}_b - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})(\mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b) \tag{10-93}$$

Se define

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b = \boldsymbol{\eta} - \tilde{\boldsymbol{\eta}}$$

Así, la Ecuación (10-93) se hace

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{e} \tag{10-94}$$

Esta es la ecuación del error para el observador de orden mínimo. Obsérvese que **e** es un vector de dimensión $(n - 1)$.

La dinámica del error se puede escoger como se desee siguiendo la técnica desarrollada para el observador de orden completo, siempre y cuando el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}$$

sea $n - 1$. (Esta es la condición de observabilidad completa aplicable al observador de orden mínimo.)

La ecuación característica para el observador de orden mínimo se obtiene a partir de la Ecuación (10-94) del modo siguiente:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)\cdots(s - \mu_{n-1})$$

$$= s^{n-1} + \hat{\alpha}_1 s^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2}s + \hat{\alpha}_{n-1} = 0 \qquad (10\text{-}95)$$

donde μ_1, μ_2, ..., μ_{n-1} son valores propios deseados para el observador de orden mínimo. La matriz de ganancias del observador $\mathbf{K}_e$ se determina seleccionando primero los valores propios deseados para el observador de orden mínimo [es decir, colocando las raíces de la ecuación característica, Ecuación (10-95), en las posiciones deseadas] y después empleando el procedimiento desarrollado para el observador de orden completo con las modificaciones adecuadas. Por ejemplo, si se va a usar la fórmula para determinar la matriz $\mathbf{K}_e$ obtenida mediante la Ecuación (10-61), debe modificarse a

$$\mathbf{K}_e = \hat{\mathbf{Q}}\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{a}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix} = (\hat{\mathbf{W}}\hat{\mathbf{N}}^*)^{-1}\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} - \hat{a}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} - \hat{a}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 - \hat{a}_1 \end{bmatrix} \qquad (10\text{-}96)$$

donde $\mathbf{K}_e$ es una matriz de $(n - 1) \times 1$ y

$$\hat{\mathbf{N}} = [\mathbf{A}_{ab}^* \,\vdots\, \mathbf{A}_{bb}^*\mathbf{A}_{ab}^* \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (\mathbf{A}_{bb}^*)^{n-2}\mathbf{A}_{ab}^*] = (n - 1) \times (n - 1) \text{ matriz}$$

$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{n-2} & \hat{a}_{n-3} & \cdots & \hat{a}_1 & 1 \\ \hat{a}_{n-3} & \hat{a}_{n-4} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = (n - 1) \times (n - 1) \text{ matriz}$$

Obsérvese que $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, ..., $\hat{a}_{n-2}$ son coeficientes en la ecuación característica para la ecuación de estado

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb}| = s^{n-1} + \hat{a}_1 s^{n-2} + \cdots + \hat{a}_{n-2}s + \hat{a}_{n-1} = 0$$

También, si se va a usar la fórmula de Ackermann dada por la Ecuación (10-65), debe modificarse a

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{A}_{bb})\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{n-3} \\ \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (10\text{-}97)$$

donde

$$\phi(\mathbf{A}_{bb}) = \mathbf{A}_{bb}^{n-1} + \hat{\alpha}_1 \mathbf{A}_{bb}^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2}\mathbf{A}_{bb} + \hat{\alpha}_{n-1}\mathbf{I}$$

Sistema de control con realimentación del estado observado con observador de orden mínimo. Para el caso del sistema de control realimentado con estado observado con observador de estado de orden completo, se ha demostrado que los polos en lazo cerrado del sistema de control realimentado de estado observado contienen solamente los polos debido al diseño por asignación de polos más los del diseño del observador. Por tanto, los diseños de asignación de polos y del observador de orden completo son independientes uno de otro.

Para el sistema de control realimentado de estado observado con observador de orden mínimo se aplica la misma conclusión. La ecuación característica del sistema se puede deducir como

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}||s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}| = 0 \tag{10-98}$$

(Véase el Problema **A-10-11** para los detalles.) Los polos en lazo cerrado del sistema de control realimentado de estado observado con un observador de orden mínimo contienen los polos en lazo cerrado debidos a la asignación de polos [los valores propios de la matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$] y los polos en lazo cerrado del observador de orden mínimo [los valores propios de la matriz $(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})$]. Por tanto, los diseños de asignación de polos y del observador de orden mínimo son independientes uno de otro.

Determinación de la matriz de ganancia del observador $\mathbf{K}_e$ con MATLAB. Debido a la dualidad del diseño de asignación de polos y del observador, se puede aplicar el mismo algoritmo a ambos problemas. Así las órdenes `acker` y `place` se pueden utilizar para determinar la matriz de ganancia del observador $\mathbf{K}_e$.

Los polos en lazo cerrado del observador son los valores propios de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$. Los polos en lazo cerrado de la asignación de polos son los valores propios de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$.

Si se tiene en cuenta el problema de dualidad entre los problemas de asignación de polos y de diseño del observador, se puede determinar $\mathbf{K}_e$ al considerar el problema de asignación de polos para el sistema dual. Esto es, se determina $\mathbf{K}_e$ colocando los valores propios de $\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K}_e$ en el lugar deseado. Como $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^*$, para el observador de orden completo se utiliza la orden

```
Ke = acker(A',C',L)'
```

donde `L` es el vector de los valores propios deseados para el observador. Análogamente, para el observador de orden completo se puede utilizar

```
Ke = place(A',C',L)'
```

a condición de que `L` no incluya polos múltiples. (En las órdenes anteriores, el apóstrofo (`'`) indica la transpuesta.) Para los observadores de orden mínimo (u orden reducido), se utilizan las siguientes órdenes:

```
Ke = acker(Abb',Aab',L)'
```

o bien

```
Ke = place(Abb',Aab',L)'
```

EJEMPLO 10-8 Sea el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Suponga que se desea colocar los polos en lazo cerrado en

$$s_1 = -2 + j2\sqrt{3}, \quad s_2 = -2 - j2\sqrt{3}, \quad s_3 = -6$$

Entonces la matriz de ganancia de realimentación del estado **K** que es necesaria se puede obtener como sigue:

$$\mathbf{K} = [90 \quad 29 \quad 4]$$

(Véase el Programa 10-10 de MATLAB para el cálculo en MATLAB de esta matriz **K**.)

Suponga que la salida y se puede medir con precisión, de forma que la variable de estado x_1 (que es igual a y), no necesita estimarse. Diseñe un observador de orden mínimo. (El observador de orden mínimo es de segundo orden.) Suponga también que los polos del observador deseados se seleccionan en

$$s = -10, \quad s = -10$$

Si se tiene en cuenta la Ecuación (10-95), la ecuación característica para el observador de orden mínimo es

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}| &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \\ &= (s + 10)(s + 10) \\ &= s^2 + 20s + 100 = 0 \end{aligned}$$

A continuación, se utilizará la fórmula de Ackermann dada por la Ecuación (10-97).

$$\mathbf{K}_e = \phi(\mathbf{A}_{bb}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ab} \\ \hdashline \mathbf{A}_{ab}\mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10-99}$$

donde

$$\phi(\mathbf{A}_{bb}) = \mathbf{A}_{bb}^2 + \hat{\alpha}_1\mathbf{A}_{bb} + \hat{\alpha}_2\mathbf{I} = \mathbf{A}_{bb}^2 + 20\mathbf{A}_{bb} + 100\mathbf{I}$$

Como

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hdashline \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c:cc} 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{array}\right], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$A_{aa} = 0, \quad \mathbf{A}_{ab} = [1 \quad 0], \quad \mathbf{A}_{ba} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad B_a = 0, \quad \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La Ecuación (10-99) se convierte en

$$\mathbf{K}_e = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}^2 + 20 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 89 & 14 \\ -154 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(Véase el Programa 10-10 de MATLAB para el cálculo en MATLAB de $\mathbf{K}_e$.)

MATLAB Programa 10-10

```
A=[0  1  0;0  0  1;-6  -11  -6];
B=[0;0;1];
J=[-2+j*2*sqrt(3)  -2-j*2*sqrt(3)  -6];
K=acker(A,B,J)

K=

    90.0000  29.0000  4.0000

Abb=[0  1;-11  -6];
Aab=[1  0];
L=[-10  -10];
Ke=acker(Abb',Aab',L)'

Ke=

     14
      5
```

Si se tienen en cuenta las Ecuaciones (10-88) y (10-89), la ecuación para el observador de orden mínimo se obtiene mediante

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\tilde{\boldsymbol{\eta}} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}]y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a)u \qquad (10\text{-}100)$$

donde

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e x_1$$

Considerando que

$$\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix}$$

la ecuación para el observador de orden mínimo, Ecuación (10-100), resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}}_2 \\ \dot{\tilde{\eta}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} 0 \right\} y + \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} 0 \right\} u$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}}_2 \\ \dot{\tilde{\eta}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -191 \\ -260 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

donde

$$\begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} - \mathbf{K}_e y$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\eta}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{K}_e x_1$$

Si se usa la realimentación del estado observado, la señal de control u se convierte en

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\begin{bmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$$

donde **K** es la matriz de ganancias de realimentación del estado. La Figura 10-18 es un diagrama de bloques que muestra la configuración del sistema con una realimentación del estado observado, donde el observador es el observador de orden mínimo.

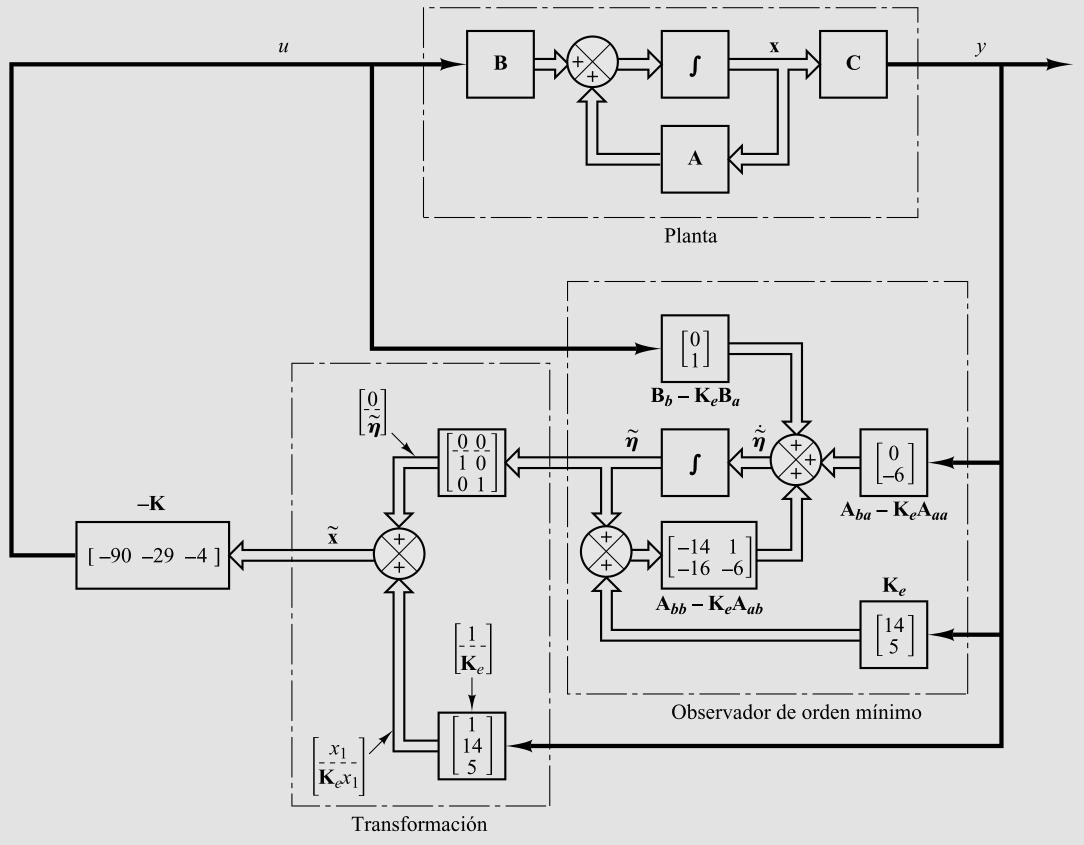


Figura 10-18. Sistema con realimentación de estado observado donde el observador es el observador de orden mínimo diseñado en el Ejemplo 10-8.

Función de transferencia del controlador basado en observador de orden mínimo. En la ecuación del observador de orden mínimo dada por la Ecuación (10-89):

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\tilde{\boldsymbol{\eta}} + [(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{aa}]\,y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a)u$$

se define, de forma análoga al caso de la deducción de la Ecuación (10-90),

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}$$
$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{K}_e + \mathbf{A}_{ba} - \mathbf{K}_e A_{aa}$$
$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{B}_b - \mathbf{K}_e B_a$$

Las tres ecuaciones siguientes definen el observador de orden mínimo:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = \hat{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\mathbf{B}}y + \hat{\mathbf{F}}u \tag{10-101}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{K}_e y \tag{10-102}$$

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} \tag{10-103}$$

Como la Ecuación (10-103) se puede reescribir como

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = -[K_a \quad \mathbf{K}_b]\begin{bmatrix} y \\ \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = -K_a y - \mathbf{K}_b\tilde{\mathbf{x}}_b$$
$$= -\mathbf{K}_b\tilde{\boldsymbol{\eta}} - (K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e)y \tag{10-104}$$

al sustituir la Ecuación (10-104) en la Ecuación (10-101), se obtiene

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = \hat{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\mathbf{B}}y + \hat{\mathbf{F}}[-\mathbf{K}_b\tilde{\boldsymbol{\eta}} - (K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e)y]$$
$$= (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{F}}\mathbf{K}_b)\tilde{\boldsymbol{\eta}} + [\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{F}}(K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e)]y \tag{10-105}$$

Si se define

$$\tilde{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{F}}\mathbf{K}_b$$
$$\tilde{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{F}}(K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e)$$
$$\tilde{\mathbf{C}} = -\mathbf{K}_b$$
$$\tilde{D} = -(K_a + \mathbf{K}_b\mathbf{K}_e)$$

Entonces las Ecuaciones (10-105) y (10-104) se pueden escribir como

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{\mathbf{B}}y \tag{10-106}$$

$$u = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{D}y \tag{10-107}$$

Las Ecuaciones (10-106) y (10-107) definen el controlador basado en observador de orden mínimo. Si se considera u como la salida y $-y$ como la entrada, $U(s)$ se puede escribir como

$$U(s) = [\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{D}]Y(s)$$
$$= -[\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{D}][-Y(s)]$$

Como la entrada al controlador observador es $-Y(s)$, en lugar de $Y(s)$, la función de transferencia del controlador observador es

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = -[\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{D}] \tag{10-108}$$

Esta función de transferencia se puede obtener fácilmente utilizando la siguiente sentencia de MATLAB:

```
[num,den] = ss2tf(Atilde, Btilde, -Ctilde, -Dtilde)        (10-109)
```

10-6 Diseño de sistemas reguladores con observadores

En esta sección se considerará un problema de diseño de reguladores utilizando el método de asignación de polos con observador.

Sea el sistema regulador que se muestra en la Figura 10-19. (La entrada de referencia es cero.) La función de transferencia de la planta es

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+4)(s+6)}$$

Utilizando el método de asignación de polos, diséñese un controlador de forma tal que cuando el sistema está sujeto a la siguiente condición inicial

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{x}$ es el vector de estado para la planta y $\mathbf{e}$ es el vector error del observador, la máxima sobreelongación de $y(t)$ es del 25 al 35% y el tiempo de asentamiento es alrededor de 4 seg. Suponga que se utiliza el observador de orden mínimo. (Se considera que sólo la salida y es medible.)

Se utilizará el siguiente procedimiento de diseño:

1. Obtener un modelo en el espacio de estado de la planta.
2. Escoger los polos en lazo cerrado deseados para la asignación de polos. Seleccionar los polos del observador deseados.
3. Determinar la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$ y la matriz de ganancia del observador $\mathbf{K}_e$.
4. Utilizando las matrices de ganancia $\mathbf{K}$ y $\mathbf{K}_e$ obtenidas en el paso 3, deducir la función de transferencia del controlador observador. Si es un controlador estable, comprobar la respuesta para la condición inicial dada. Si la respuesta no es aceptable, ajustar la localización de los polos en lazo cerrado y/o la localización de los polos del observador hasta que se obtenga una respuesta aceptable.

Paso de diseño 1. Se deducirá la representación en el espacio de estados de la planta. Como la función de transferencia de la planta es

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10(s+2)}{s(s+4)(s+6)}$$

la ecuación diferencial correspondiente es

$$\dddot{y} + 10\ddot{y} + 24\dot{y} = 10\dot{u} + 20u$$

r = 0
+
−
−y
Controlador
u
Planta
y

Figura 10-19. Sistema regulador.

Si se tiene en cuenta la Sección 2-5, se definen las variables de estado x_1, x_2, x_3 tal como sigue:

$$x_1 = y - \beta_0 u$$
$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$
$$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 u$$

Tambien $\dot{x}_3$ se define por:

$$\dot{x}_3 = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + \beta_3 u = 24x_2 - 10x_3 + \beta_3 u$$

donde

$$\beta_0 = 0$$
$$\beta_1 = 0$$
$$\beta_2 = 10$$
$$\beta_3 = -80$$

[Véase la Ecuación (2-35) para el cálculo de las β.] Entonces la ecuación en el espacio de estados y de la salida se pueden obtener como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -80 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]u$$

Paso de diseño 2. Como primer intento se seleccionan los polos en lazo cerrado deseados en

$$s = -1 + j2, \qquad s = -1 - j2, \qquad s = -5$$

y se escogen los polos del observador deseados en

$$s = -10, \qquad s = -10$$

Paso de diseño 3. Se utilizará MATLAB para calcular la matriz de ganancia de realimentación del estado **K** y la matriz de ganancia del observador $\mathbf{K}_e$. El programa de MATLAB 10-11

MATLAB Programa 10-11

```
% Cálculo de la matriz de ganancia de realimentación del estado K
A=[0 1 0;0 0 1;0 -24 -10];
B=[0;10;-80];
C=[1 0 0];
J=[-1+j*2 -1-j*2 -5];
K=acker(A,B,J)
K=
   1.2500  1.2500  0.19375
% Cálculo de la matriz de ganancia del observador Ke
Aaa=0; Aab=[1 0]; Aba=[0;0]; Abb=[0 1;-24 -10];Ba=0; Bb=[10;-80];
L=[-10 -10];
Ke=acker(Abb',Aab',L)'
Ke=
    10
   -24
```

da las matrices $\mathbf{K}$ y $\mathbf{K}_e$. En el programa, las matrices $\mathbf{J}$ y $\mathbf{L}$ representan los polos en lazo cerrado deseados para la asignación de polos y los polos deseados para el observador, respectivamente. Las matrices $\mathbf{K}$ y $\mathbf{K}_e$ se obtienen como

$$\mathbf{K} = [1.25 \quad 1.25 \quad 0.19375]$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 10 \\ -24 \end{bmatrix}$$

Paso de diseño 4. Se determinará la función de transferencia del controlador observador. Si se tiene en cuenta la Ecuación (10-108), la función de transferencia del controlador observador puede darse por

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{-Y(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = -[\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{D}]$$

Se utilizará MATLAB para calcular la función de transferencia del controlador observador. El Programa 10-12 de MATLAB obtiene esta función de transferencia. El resultado es

$$G_c(s) = \frac{9.1s^2 + 73.5s + 125}{s^2 + 17s - 30}$$

$$= \frac{9.1(s + 5.6425)(s + 2.4344)}{(s + 18.6119)(s - 1.6119)}$$

Defínase el sistema con este controlador observador como sistema 1. La Figura 10-20 muestra el diagrama de bloques del sistema 1.

MATLAB Programa 10-12

```
% Determinación de la función de transferencia del controlador-observador

A=[0  1  0;0  0  1;0  -24  -10];
B=[0;10;-80];
Aaa=0; Aab=[1  0]; Aba=[0;0]; Abb=[0  1;-24  -10];
Ba=0; Bb=[10;-80];
Ka=1.25; Kb=[1.25  0.19375];
Ke=[10;-24];
Ahat=Abb-Ke*Aab;
Bhat=Ahat*Ke + Aba-Ke*Aaa;
Fhat=Bb-Ke*Ba;
Atilde=Ahat-Fhat*Kb;
Btilde=Bhat-Fhat*(Ka + Kb*Ke);
Ctilde=-Kb;
Dtilde=-(Ka + Kb*Ke);
[num,den]=ss2tf(Atilde, Btilde, -Ctilde, -Dtilde)

num=
   9.1000  73.5000  125.0000

den=

   1.0000  17.0000  -30.0000
```

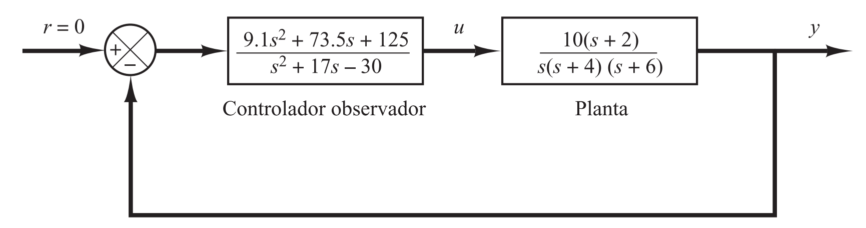


Figura 10-20. Diagrama de bloques del Sistema 1.

El controlador observador tiene un polo en el semiplano derecho del plano s ($s = 1{,}6119$). La existencia de un polo en lazo abierto en el semiplano derecho del plano s en el controlador observador significa que el sistema es inestable en lazo abierto, aunque el sistema en lazo cerrado sea estable. Lo último puede verse a partir de la ecuación característica del sistema:

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| \cdot |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}| \\
&= s^5 + 27s^4 + 255s^3 + 1025s^2 + 2000s + 2500 \\
&= (s + 1 + j2)(s + 1 - j2)(s + 5)(s + 10)(s + 10) = 0
\end{aligned}
$$

(Véase el Programa 10-13 de MATLAB para el cálculo de la ecuación característica.)

Una desventaja de utilizar un controlador inestable es que el sistema se hace inestable si la ganancia del sistema se hace pequeña. Un sistema de control de esta naturaleza no es ni deseable ni aceptable. Por tanto, para obtener un sistema satisfactorio se necesita modificar la localización de los polos en lazo cerrado y/o de los polos del observador.

MATLAB Programa 10-13

```
% Cálculo de la ecuación característica

[num1,den1]=ss2tf(A-B*K,eye(3),eye(3),eye(3),1);
[num2,den2]=ss2tf(Abb-Ke*Aab,eye(2),eye(2),eye(2),1);
charact_eq=conv(den1,den2)

charact_eq=

   1.0e+003*

   0.0010  0.0270  0.2550  1.0250  2.0000  2.5000
```

Segunda prueba. Como antes, se mantienen los polos en lazo cerrado deseados para la asignación de polos pero se modifica la posición de los polos del observador como sigue:

$$s = -4.5, \qquad s = -4.5$$

Así,

$$\mathbf{L} = [-4.5 \quad -4.5]$$

Utilizando MATLAB se encuentra que la nueva matriz $\mathbf{K}_e$ es

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} -1 \\ 6.25 \end{bmatrix}$$

A continuación se obtendrá la función de transferencia del controlador observador. El Programa 10-14 de MATLAB da esta función de transferencia como sigue:

$$G_c(s) = \frac{1.2109s^2 + 11.2125s + 25.3125}{s^2 + 6s + 2.1406}$$

$$= \frac{1.2109(s + 5.3582)(s + 3.9012)}{(s + 5.619)(s + 0.381)}$$

MATLAB Programa 10-14

```
% Determinación de la función de transferencia del controlador-observador
A=[0 1 0;0 0 1;0 -24 -10];
B=[0;10;-80];
Aaa=0; Aab=[1 0]; Aba=[0;0]; Abb=[0 1;-24 -10];
Ba=0; Bb=[10;-80];
Ka=1.25; Kb=[1.25 0.19375];
Ke=[-1;6.25];
Ahat=Abb-Ke*Aab;
Bhat=Ahat*Ke + Aba-Ke*Aaa;
Fhat=Bb-Ke*Ba;
Atilde=Ahat-Fhat*Kb;
Btilde=Bhat-Fhat*(Ka + Kb*Ke);
Ctilde=-Kb;
Dtilde=-(Ka + Kb*Ke);
[num,den]=ss2tf(Atilde,Btilde,-Ctilde,-Dtilde)

num=

   1.2109  11.2125  25.3125

den=

   1.0000  6.0000  2.1406
```

Obsérvese que este es un controlador estable. Se define el sistema con este controlador observador como Sistema 2. Seguidamente se procederá a obtener la respuesta del Sistema 2 a la condición inicial dada:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al sustituir $u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$ en la ecuación del espacio de estado para la planta, se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\begin{bmatrix} x_a \\ \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b - \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\left\{\mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}\right\} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{B}[K_a \quad \mathbf{K}_b]\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \tag{10-110}$$

La ecuación de error para el observador de orden mínimo es

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{e} \tag{10-111}$$

Al combinar las Ecuaciones (10-110) y (10-111), se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

con la condición inicial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{e}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El Programa 10-15 de MATLAB da la respuesta a la condición inicial dada. En la Figura 10-21 se muestran las curvas de respuesta que parecen aceptables.

MATLAB Programa 10-15

```
% Respuesta a condición inicial.

A = [0  1  0;0  0  1;0  -24  -10];
B = [0;10;-80];
K = [1.25  1.25  0.19375];
Kb = [1.25  0.19375];
Ke = [-1;6.25];
Aab = [1  0]; Abb = [0  1;-24  -10];
AA = [A-B*K  B*Kb; zeros(2,3)  Abb-Ke*Aab];
sys = ss(AA,eye(5),eye(5),eye(5));
t = 0:0.01:8;
x = initial(sys,[1;0;0;1;0],t);
x1 = [1  0  0  0  0]*x';
x2 = [0  1  0  0  0]*x';
x3 = [0  0  1  0  0]*x';
e1 = [0  0  0  1  0]*x';
e2 = [0  0  0  0  1]*x';

subplot(3,2,1); plot(t,x1); grid
xlabel ('t (seg)'); ylabel('x1')

subplot(3,2,2); plot(t,x2); grid
xlabel ('t (seg)'); ylabel('x2')

subplot(3,2,3); plot(t,x3); grid
xlabel ('t (seg)'); ylabel('x3')

subplot(3,2,4); plot(t,e1); grid
xlabel('t (seg)'); ylabel('e1')

subplot(3,2,5); plot(t,e2); grid
xlabel('t (seg)'); ylabel('e2')
```

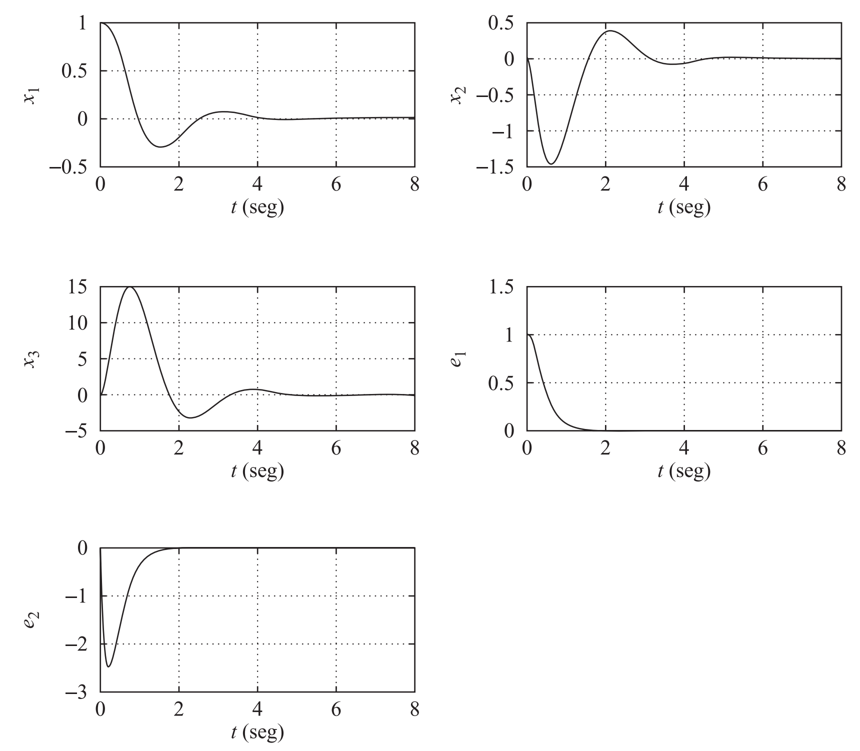


Figura 10-21. Respuesta a la condición inicial dada; $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$, $e_1(0) = 1$, $e_2(0) = 0$.

Ahora se comprobarán las características de la respuesta en frecuencia. En la Figura 10-22 se muestra el diagrama de Bode del sistema en lazo abierto que se acaba de diseñar. El margen de fase es de alrededor de 40º y el margen de ganancia es $+\infty$ dB. En la Figura 10-23 se muestra el diagrama de Bode del sistema en lazo cerrado. El ancho de banda del sistema es de aproximadamente de 3,8 rad/seg.

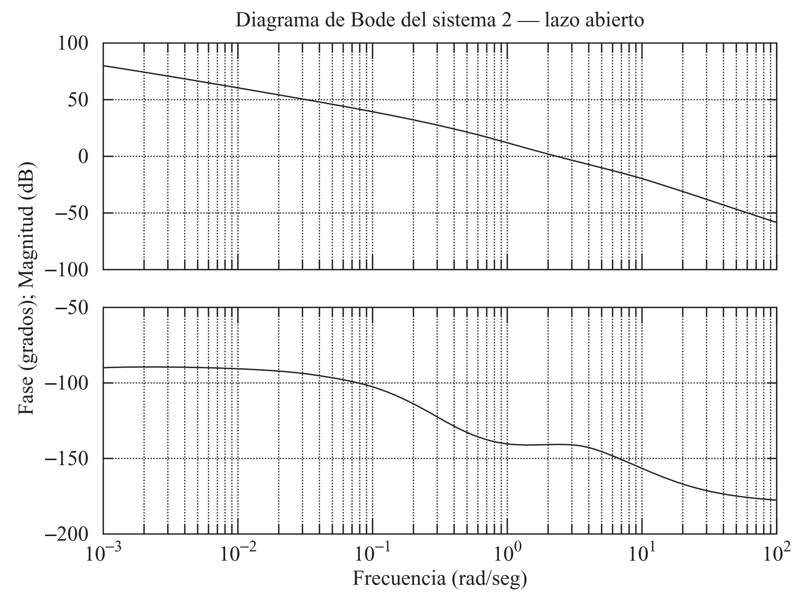


Figura 10-22. Diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo abierto del Sistema 2.

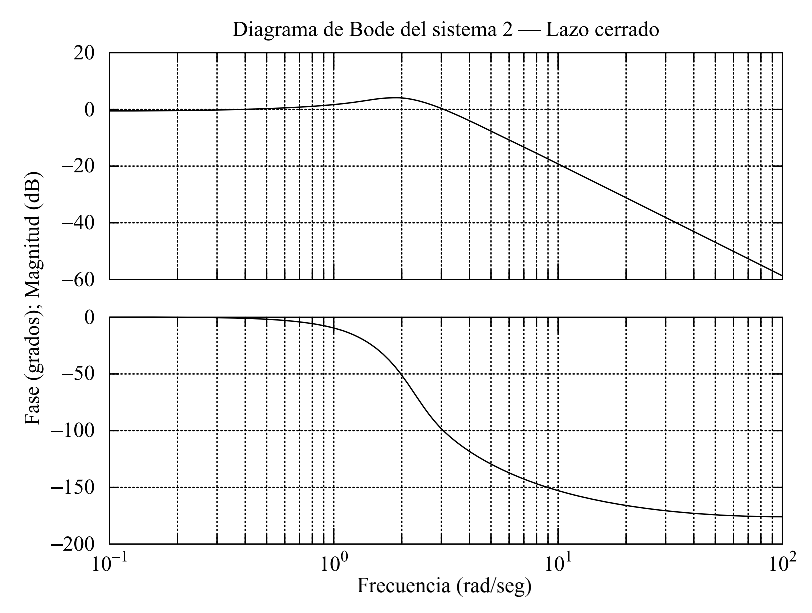


Figura 10-23. Diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo cerrado del Sistema 2.

Finalmente, se compararán los diagramas del lugar de las raíces del primer sistema con $L = [-10 \quad -10]$ y el segundo sistema con $L = [-4{,}5 \quad -4{,}5]$. El diagrama del primer sistema que se representa en la Figura 10-24(a) muestra que el sistema es inestable para pequeñas ganancias y que se estabiliza cuando la ganancia aumenta. El diagrama del segundo sistema representado en la Figura 10-24(b), por otra parte, muestra que el sistema es estable para cualquier ganancia positiva.

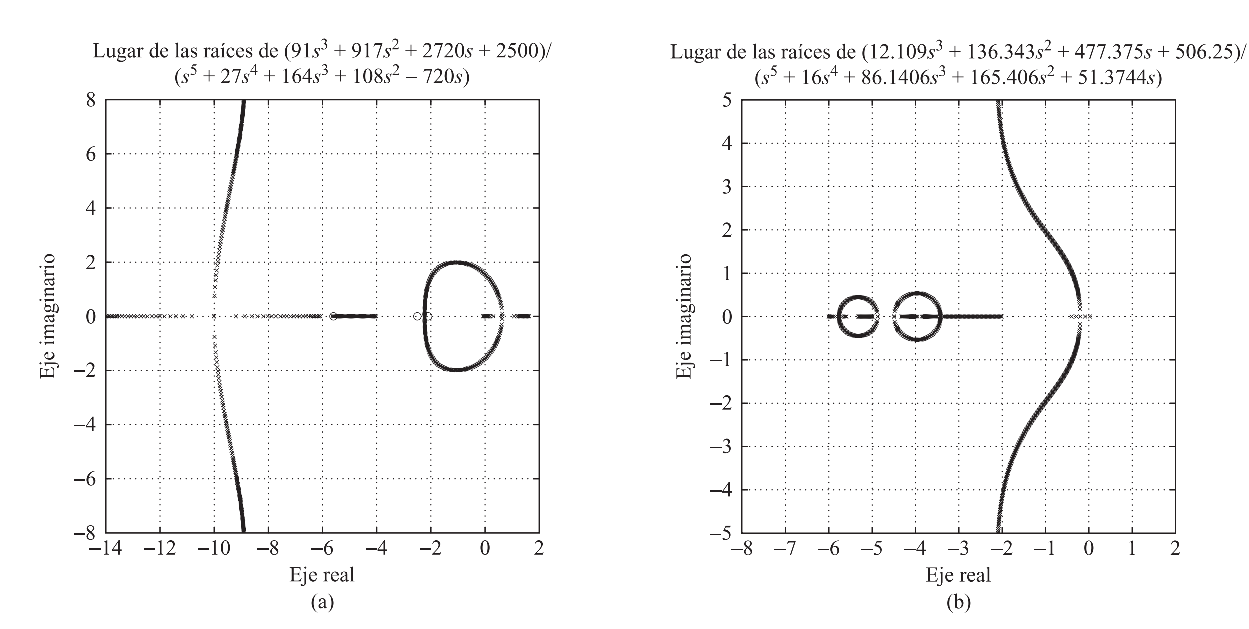


Figura 10-24. (a) Lugar de las raíces del sistema con polos del observador en $s = -10$ y $s = -10$; (b) lugar de las raíces del sistema con polos del observador en $s = -4.5$ y $s = -4.5$.

Comentarios

1. Al diseñar un sistema regulador, obsérvese que si los polos dominantes del controlador se colocan suficientemente lejos a la izquierda del eje $j\omega$, los elementos de la matriz de ganancia de realimentación del estado **K** se harán grandes. Grandes valores de la ganancia harán que la salida del actuador sea también grande, de manera que puede dar lugar a saturación. Entonces el sistema diseñado no se comportará como estaba previsto.
2. También, al colocar los polos del observador suficientemente lejos a la izquierda del eje $j\omega$, el controlador observador se hace inestable, aunque el sistema en lazo cerrado es estable. Un controlador observador inestable no es aceptable.
3. Si el controlador observador se hace inestable, se mueven los polos del observador a la derecha en el semiplano izquierdo del plano s hasta que se estabilice. También, la localización de los polos en lazo cerrado deseados pueden tener que modificarse.
4. Obsérvese que si los polos del observador se colocan suficientemente lejos a la izquierda del eje $j\omega$, el ancho de banda del observador aumentará y originará problemas de ruido. Si hay un problema de ruido serio, los polos del observador no deberían colocarse demasiado lejos a la izquierda del eje $j\omega$. El requisito general es que el ancho de banda debería ser suficientemente bajo para que el ruido del sensor no se convierta en un problema.
5. El ancho de banda del sistema con el observador de orden mínimo es más grande que con el observador de orden completo, ya que los polos múltiples del observador se sitúan en el mismo lugar para ambos observadores. Si el ruido del sensor es un problema serio, se recomienda utilizar un observador de orden completo.

10-7 Diseño de sistemas de control con observadores

En la Sección 10-6 se presentó el diseño de sistemas de regulación con observadores. (Los sistemas no tenían entradas de referencia.) En esta sección se considerará el diseño de sistemas de control con observadores cuando los sistemas tienen entradas de referencia. La salida del sistema de control debe seguir a la entrada que es variable en el tiempo. En el seguimiento de la entrada, el sistema debe mostrar un comportamiento satisfactorio (un tiempo de subida, sobreelongación y tiempo de asentamiento razonables).

En esta sección se consideran sistemas de control que se diseñan por el método de asignación de polos con observador. Específicamente, se considerarán sistemas de control utilizando controladores observadores. En la Sección 10-6 se analizaron los sistemas de regulación cuyo diagrama de bloques se muestra en la Figura 10-25. Este sistema no tiene entrada de referencia, o $r = 0$. Cuando el sistema tiene una entrada de referencia son posibles algunas configuraciones diferentes del diagrama de bloques, cada una con un controlador observador. En las Figuras 10-26(a) y (b) se muestran dos de estas configuraciones; en esta sección se considerarán ambas.

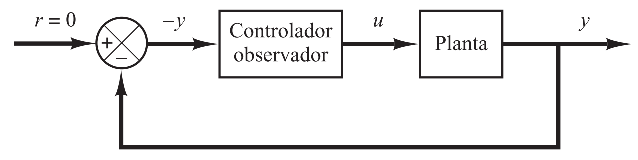
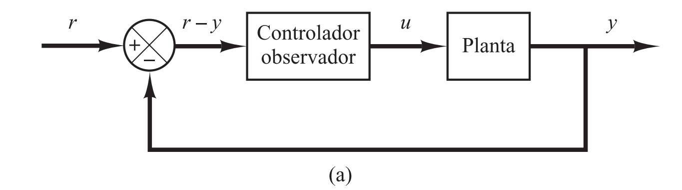
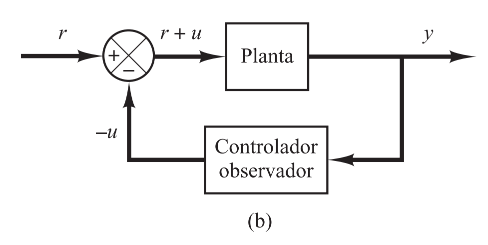


Figura 10-25. Sistema regulador.



(a)



(b)

Figura 10-26. (a) Sistema de control con controlador-observador en el camino directo; (b) sistema de control con controlador-observador en el camino de realimentación.

Configuración 1. Sea el sistema mostrado en la Figura 10-27. En este sistema la entrada de referencia se añade simplemente en el punto de suma. Se desea diseñar el controlador observador de manera que en la respuesta a un escalón unitario la sobreelongación máxima sea menor que el 30% y el tiempo de asentamiento alrededor de 5 seg.

En lo que sigue se diseñará en primer lugar un sistema de regulación. Luego, utilizando el controlador observador diseñado, simplemente se añade la entrada de referencia r en el punto de suma.

Antes de diseñar el controlador observador, se necesita obtener una representación en el espacio de estados de la planta. Como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$$

se obtiene

$$\dddot{y} + \dot{y} = u$$

Si se eligen las variables de estado como

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{y}$$
$$x_3 = \ddot{y}$$

se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Figura 10-27. Sistema de control con controlador-observador en el camino directo.

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

A continuación se seleccionan los polos en lazo cerrado deseados para la asignación de polos en

$$s = -1 + j, \qquad s = -1 - j, \qquad s = -8$$

y los polos del observador deseados en

$$s = -4, \qquad s = -4$$

La matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$ y la matriz de ganancia del observador $\mathbf{K}_e$ se pueden obtener como sigue:

$$\mathbf{K} = [16 \quad 17 \quad 10]$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Véase el Programa 10-16 de MATLAB.

MATLAB Programa 10-16

```
A=[0 1 0;0 0 1;0 -1 0];
B=[0;0;1];
J=[-1+j -1-j -8];
K=acker(A,B,J)

K=

   16  17  10

Aab=[1 0];
Abb=[0 1;-1 0];
L=[-4 -4];
Ke=acker(Abb',Aab',L)'

Ke=
   8
   15
```

La función de transferencia del controlador observador se obtiene utilizando el Programa 10-17 de MATLAB. El resultado es

$$G_c(s) = \frac{302s^2 + 303s + 256}{s^2 + 18s + 113}$$

$$= \frac{302(s + 0.5017 + j0.772)(s + 0.5017 - j0.772)}{(s + 9 + j5.6569)(s + 9 - j5.6569)}$$

MATLAB Programa 10-17

```
% Determinación de la función de transferencia del controlador-observador

A=[0 1 0;0 0 1;0 -1 0];
B=[0;0;1];
Aaa=0; Aab=[1 0]; Aba=[0;0]; Abb=[0 1;-1 0];
Ba=0; Bb=[0;1];
Ka=16; Kb=[17 10];
Ke=[8;15];
Ahat=Abb-Ke*Aab;
Bhat=Ahat*Ke + Aba-Ke*Aaa;
Fhat=Bb-Ke*Ba;
Atilde=Ahat-Fhat*Kb;
Btilde=Bhat-Fhat*(Ka + Kb*Ke);
Ctilde=-Kb;
Dtilde=-(Ka + Kb*Ke);
[num,den]=ss2tf(Atilde,Btilde,-Ctilde,-Dtilde)

num=

   302.0000  303.0000  256.0000
den=

   1  18  113
```

La Figura 10-28 muestra el diagrama de bloques del sistema regulador que se acaba de diseñar. La Figura 10-29 muestra el diagrama de bloques de una configuración posible del sistema de control basado en el sistema regulador que se muestra en la Figura 10-28. En la Figura 10-30 se muestra la curva de respuesta a un escalón unitario para este sistema de control. La máxima sobreelongación es alrededor del 28% y el tiempo de asentamiento de unos 4,5 seg. Así, el sistema diseñado satisface los requisitos de diseño.

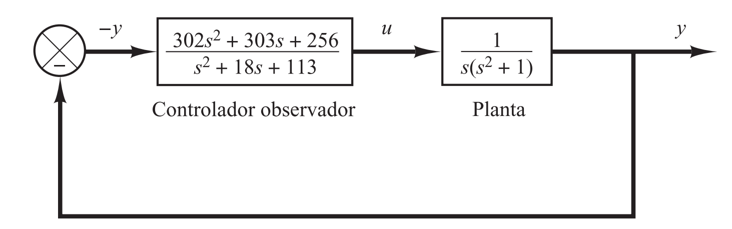


Figura 10-28. Sistema regulador con controlador-observador.

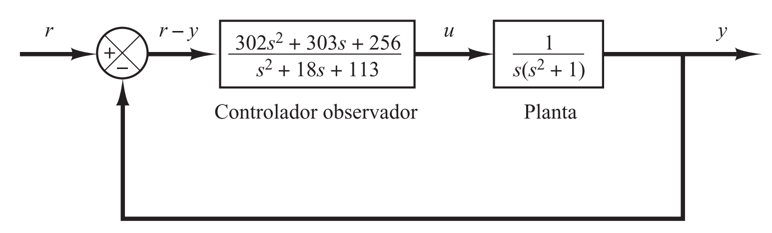


Figura 10-29. Sistema de control con controlador-observador en el camino directo.

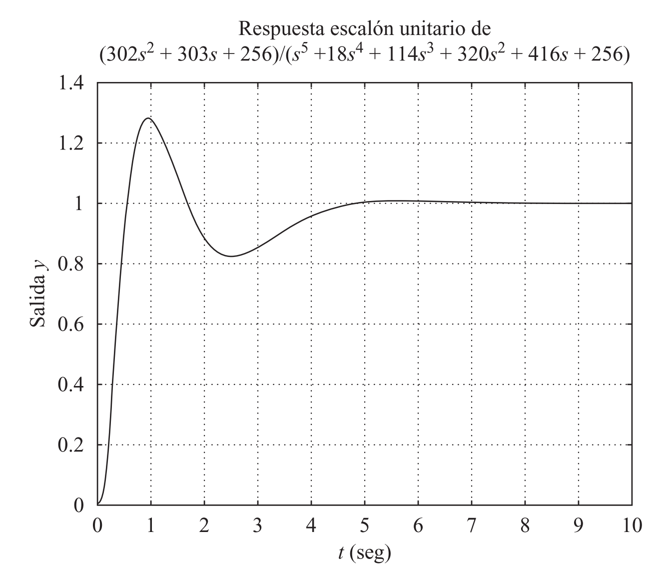


Figura 10-30. Respuesta a un escalón unitario del sistema de control mostrado en la Figura 10-29.

Configuración 2. En la Figura 10-31 se muestra una configuración diferente del sistema de control. El controlador observador se coloca en el camino de realimentación. La entrada r se introduce en el sistema en lazo cerrado a través del bloque con ganancia N. De este diagrama de bloques, la función de transferencia en lazo cerrado se obtiene como

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{N(s^2 + 18s + 113)}{s(s^2 + 1)(s^2 + 18s + 113) + 302s^2 + 303s + 256}$$

Se determina ahora el valor de la constante N de forma que para una entrada en escalón unitario r, la salida y es la unidad cuando t tiende a infinito. Así, se escoge

$$N = \frac{256}{113} = 2.2655$$

En la Figura 10-32 se muestra la respuesta a un escalón unitario del sistema. Obsérvese que la sobreelongación máxima es muy pequeña, aproximadamente del 4%. El tiempo de asentamiento es alrededor de 5 seg.

Comentarios. Se han considerado dos posibles configuraciones para el sistema de control en lazo cerrado utilizando controladores observadores. Como ya se ha dicho, son posibles otras configuraciones.

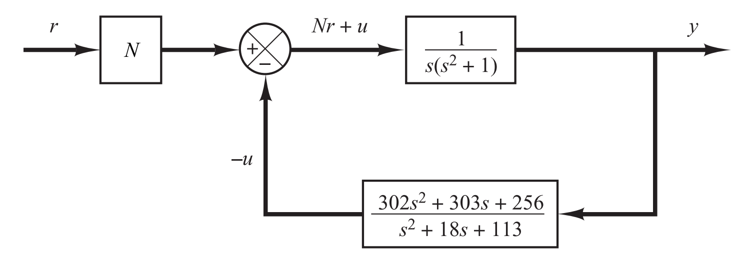


Figura 10-31. Sistema de control con controlador-observador en el camino de realimentación.

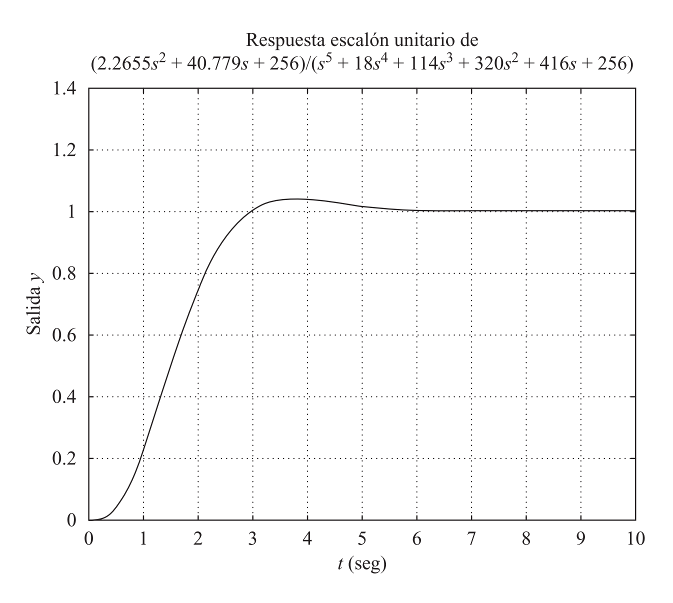


Figura 10-32. Respuesta a un escalón unitario del sistema mostrado en la Figura 10-31. (Los polos en lazo cerrado para la asignación de polos están en $s = -1 \pm j$, $s = -8$. Los polos del observador están en $s = -4$, $s = -4$.)

La primera configuración, que coloca el controlador observador en el camino directo, generalmente da una sobreelongación relativamente grande. La segunda configuración, que coloca el controlador observador en el camino de realimentación, da una sobreelongación más pequeña. Esta curva de respuesta es bastante similar a la del sistema diseñado por el método de asignación de polos sin utilizar el controlador observador. Véase la curva de respuesta a un escalón unitario del sistema que se muestra en la Figura 10-33, diseñada por el método de asignación de polos sin observador. Aquí los polos en lazo cerrado deseados utilizados son

$$s = -1 + j, \qquad s = -1 - j, \qquad s = -8$$

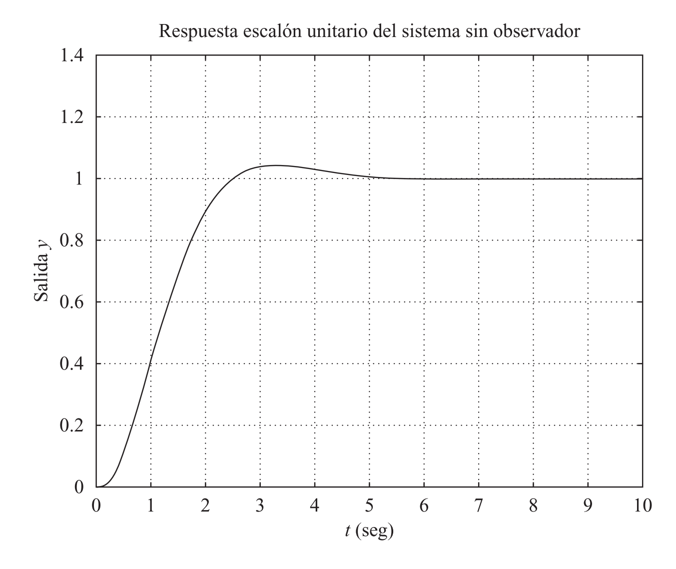


Figura 10-33. Respuesta a un escalón unitario del sistema de control diseñado por el método de asignación de polos sin observador. (Los polos en lazo cerrado están en $s = -1 \pm j$, $s = -8$.)

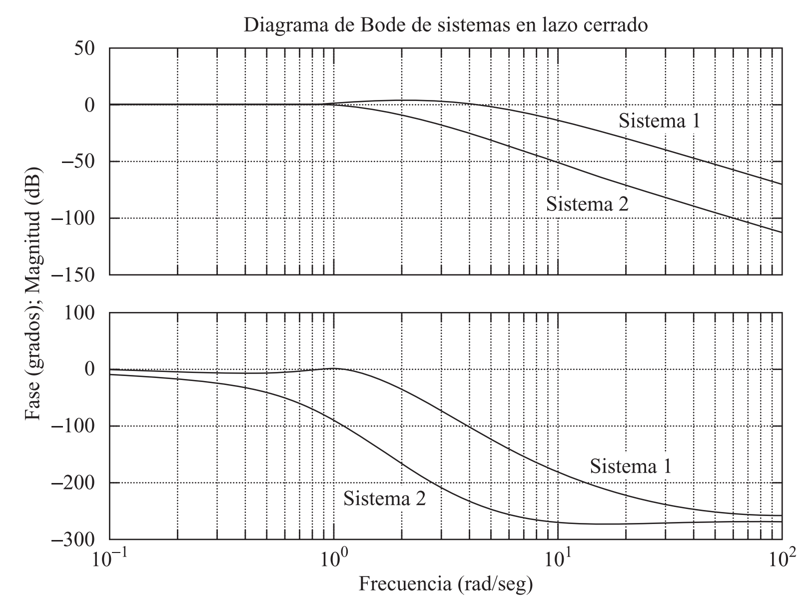


Figura 10-34. Diagramas de Bode del Sistema 1 en lazo cerrado (mostrado en la Figura 10-29) y del Sistema 2 en lazo cerrado (mostrado en la Figura 10-31).

Obsérvese que, en estos dos sistemas, los tiempos de subida y asentamiento están determinados fundamentalmente por los polos en lazo cerrado deseados para la asignación de polos. (Véanse las Figuras 10-32 y 10-33.)

En la Figura 10-34 se muestran los diagramas de Bode del Sistema 1 en lazo cerrado (mostrado en la Figura 10-29) y del Sistema 2 en lazo cerrado (mostrado en la Figura 10-31). De esta figura se encuentra que el ancho de banda del Sistema 1 es de 5 rad/seg y la del Sistema 2 es 1.3 rad/seg.

Resumen del método de diseño en el espacio de estados

1. El método de diseño en el espacio de estados basado en el enfoque de asignación de polos combinado con observador es muy potente. Es un método en el dominio temporal. Los polos en lazo cerrado deseados se pueden colocar arbitrariamente, a condición de que la planta sea de estado completamente controlable.
2. Si no se pueden medir todas las variables de estado, se debe incorporar un observador para estimar las variables de estados no medibles.
3. Al diseñar un sistema utilizando el método de asignación de polos se necesita considerar algunos conjuntos diferentes de polos en lazo cerrado. Deben compararse sus características de respuesta y elegir la mejor.
4. El ancho de banda del controlador observador es generalmente grande, debido a que se seleccionan los polos del observador suficientemente alejados a la izquierda en el plano s. Un ancho de banda grande permite pasar los ruidos de alta frecuencia y origina el problema del ruido.
5. La inclusión de un observador en el sistema generalmente reduce el margen de estabilidad. En algunos casos, un controlador observador puede tener ceros en el semiplano izquierdo del plano s, lo que significa que el controlador puede ser estable pero de fase no mínima. En otros casos el controlador puede tener polos en el semiplano derecho del plano s —esto es, el controlador es inestable—. En este caso el sistema diseñado puede ser condicionalmente estable.

6. Cuando el sistema se diseña por el método de asignación de polos con observador es aconsejable comprobar los márgenes de estabilidad (margen de fase y margen de ganancia), utilizando un método de respuesta en frecuencia. Si el sistema diseñado tiene márgenes de estabilidad pobres, es posible que se pueda hacer inestable si el modelo matemático contiene incertidumbres.

7. Obsérvese que para un sistema de orden n, los métodos de diseño clásicos (lugar de las raíces y método de respuesta en frecuencia) dan compensadores de bajo orden (primer o segundo orden). Como los controladores basados en observador son de orden n (u orden m si se utiliza observador de orden mínimo) para un sistema de orden n, el sistema diseñado se hará de orden $2n$ [u orden $(n + m)$]. Como los compensadores de bajo orden son de menor coste que los de orden elevado, el diseñador debería primero aplicar métodos clásicos y, si no se pueden determinar compensadores adecuados, entonces intentar el método de diseño de asignación de polos con observador presentado en esta capítulo.

10-8 Sistema regulador óptimo cuadrático

Una ventaja del método de control óptimo cuadrático respecto del método de asignación de polos es que el primero proporciona un procedimiento sistemático de calcular la matriz de ganancia de control de realimentación del estado.

Problemas de control óptimo cuadrático. Ahora se considerará el problema de regulador óptimo que, dadas las ecuación del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{10-112}$$

determina la matriz $\mathbf{K}$ del vector de control óptimo

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \tag{10-113}$$

con el objetivo de minimizar la función de coste

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^*\mathbf{R}\mathbf{u})\, dt \tag{10-114}$$

donde $\mathbf{Q}$ es una matriz hermítica definida positiva (o semidefinida positiva) o simétrica real y $\mathbf{R}$ es una matriz hermítica definida positiva o simétrica real. Obsérvese que el segundo término del miembro derecho de la Ecuación (10-114) considera el coste de energía de las señales de control. Las matrices $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ determinan la importancia relativa del error y del coste de esta energía. En este problema, se supone que el vector de control $\mathbf{u}(t)$ no está restringido.

Como se verá después, la ley de control lineal obtenida mediante la Ecuación (10-113) es la ley de control óptimo. Por tanto, si se determinan los elementos desconocidos de la matriz $\mathbf{K}$

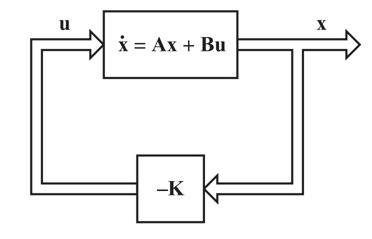


Figura 10-35. Sistema regulador óptimo.

para minimizar la función de coste, entonces $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ es óptima para cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$. El diagrama de bloques que da la configuración óptima se muestra en la Figura 10-35.

Ahora se resuelve el problema de optimización. Sustituyendo la Ecuación (10-113) en la Ecuación (10-112), se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

En las deducciones siguientes, se supone que la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ es estable, o que los valores propios de $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ tienen partes reales negativas.

Al sustituir la Ecuación (10-113) en la Ecuación (10-14) resulta

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{x})\, dt$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{x}^*(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}\, dt$$

Si se iguala

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x})$$

donde $\mathbf{P}$ es una matriz hermítica definida positiva o simétrica real. Así, se obtiene

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^*\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^*[(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^*\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})]\mathbf{x}$$

Al comparar ambos lados de esta última ecuación y considerando que la misma debe ser válida para cualquier $\mathbf{x}$, se requiere que

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^*\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K}) \tag{10-115}$$

Se puede demostrar que si $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ es una matriz estable, existe una matriz $\mathbf{P}$ definida positiva que satisface la Ecuación (10-115). (Véase el Problema **A-10-15**.)

Por tanto, el procedimiento se basa en determinar los elementos de $\mathbf{P}$ a partir de la Ecuación (10-115) y ver si es definida positiva. (Obsérvese que más de una matriz $\mathbf{P}$ puede satisfacer esta condición. Si el sistema es estable, siempre existe una matriz $\mathbf{P}$ definida positiva que satisface esta ecuación. Esto significa que, si se despeja la ecuación y se encuentra una matriz $\mathbf{P}$ definida positiva, el sistema es estable. Otras matrices $\mathbf{P}$ que satisfacen esta ecuación no son definidas positivas y deben descartarse.)

El índice de comportamiento J se calcula como

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^*(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}\, dt = -\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x}\Big|_0^\infty = -\mathbf{x}^*(\infty)\mathbf{P}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$$

Como se supone que todos los valores propios de $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ tienen partes reales negativas, tenemos que $\mathbf{x}(\infty) \to \mathbf{0}$. Por tanto, se obtiene

$$J = \mathbf{x}^*(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \tag{10-116}$$

Así, el índice de comportamiento J se obtiene en términos de la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ y $\mathbf{P}$.

Para obtener la solución al problema de control óptimo cuadrático, se procede del modo siguiente. Como se ha supuesto que $\mathbf{R}$ es una matriz hermítica definida positiva o simétrica real, se puede escribir

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^*\mathbf{T}$$

donde $\mathbf{T}$ es una matriz no singular. Así, la Ecuación (10-115) se escribe como

$$(\mathbf{A}^* - \mathbf{K}^*\mathbf{B}^*)\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{T}^*\mathbf{TK} = \mathbf{0}$$

que puede reescribirse como

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{PA} + [\mathbf{TK} - (\mathbf{T}^*)^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}]^*[\mathbf{TK} - (\mathbf{T}^*)^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}] - \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

La minimización de J con respecto a $\mathbf{K}$ requiere la minimización de

$$\mathbf{x}^*[\mathbf{TK} - (\mathbf{T}^*)^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}]^*[\mathbf{TK} - (\mathbf{T}^*)^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}]\mathbf{x}$$

con respecto a $\mathbf{K}$. (Véase el Problema **A-10-16**.) Como esta última expresión es no negativa, el mínimo ocurre cuando es cero, o cuando

$$\mathbf{TK} = (\mathbf{T}^*)^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P}$$

Por tanto,

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}^*)^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P} \tag{10-117}$$

La Ecuación (10-117) da la matriz óptima $\mathbf{K}$. Así, la ley del control óptimo para el problema de control óptimo cuadrático es lineal cuando el índice de comportamiento está dado por la Ecuación (10-114) y se puede expresar como

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{Kx}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{Px}(t)$$

La matriz $\mathbf{P}$ en la Ecuación (10-117) debe satisfacer la Ecuación (10-115) o la ecuación reducida siguiente:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{PA} - \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{10-118}$$

La Ecuación (10-118) se denomina ecuación matricial reducida de Riccati. Los pasos del diseño se plantean del modo siguiente:

1. Resolver la Ecuación (10-118), ecuación matricial reducida de Riccati, para la matriz $\mathbf{P}$. [Si existe una matriz $\mathbf{P}$ definida positiva (ciertos sistemas pueden no tener una matriz $\mathbf{P}$ definida positiva), el sistema es estable o la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ es estable.]
2. Sustituir esta matriz $\mathbf{P}$ en la Ecuación (10-117). La matriz $\mathbf{K}$ resultante es la matriz óptima.

Un ejemplo de diseño basado en este método se da en el Ejemplo 10-9. Obsérvese que, si la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ es estable, el método propuesto siempre da el resultado correcto.

Por último, obsérvese que si el índice de comportamiento se obtiene en términos del vector de salida en lugar del vector de estado, es decir,

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{y}^*\mathbf{Qy} + \mathbf{u}^*\mathbf{Ru})\,dt$$

entonces el índice se modifica mediante la ecuación de salida

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$$

a

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^*\mathbf{C}^*\mathbf{QCx} + \mathbf{u}^*\mathbf{Ru})\,dt \tag{10-119}$$

y los pasos del diseño que se presentaron en esta sección se pueden aplicar para obtener la matriz $\mathbf{K}$ óptima.

EJEMPLO 10-9 Sea el sistema de la Figura 10-36. Suponiendo que la señal de control es

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

determine la matriz de ganancias de realimentación óptima **K** tal que se minimice el índice de comportamiento siguiente:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + u^2)\,dt$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\mu \geqslant 0)$$

A partir de la Figura 10-36, se encuentra que la ecuación de estado para la planta es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se demuestra el uso de la ecuación matricial reducida de Riccati en el diseño del sistema de control óptimo. Se resuelve la Ecuación (10-118), que puede reescribirse como

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

Si se considera que la matriz **A** es real y que la matriz **Q** es simétrica real, la matriz **P** es una matriz simétrica real. Por tanto, esta última ecuación se escribe como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[1]\,[0 \quad 1]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación se simplifica a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

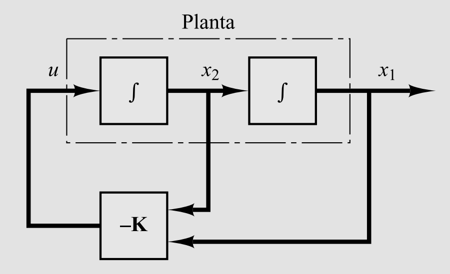


Figura 10-36. Sistema de control.

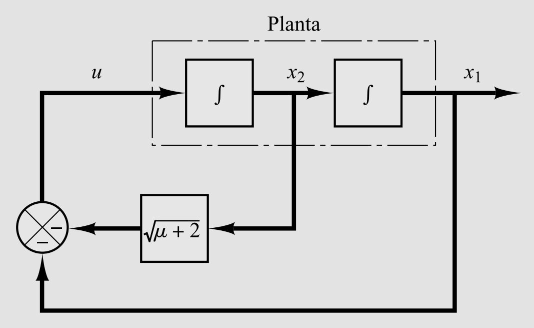


Figura 10-37. Control óptimo de la planta mostrada en la Figura 10-36.

a partir de la cual se obtienen las tres ecuaciones siguientes:

$$1 - p_{12}^2 = 0$$

$$p_{11} - p_{12}p_{22} = 0$$

$$\mu + 2p_{12} - p_{22}^2 = 0$$

Despejando estas tres ecuaciones simultáneas para p_{11}, p_{12} y p_{22}, para lo cual es necesario que **P** sea definida positiva, se obtiene

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu+2} & 1 \\ 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix}$$

Si se tiene en cuenta la Ecuación (10-117), la matriz de ganancias de realimentación óptima **K** se obtiene como

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P} \\ &= [1]\,[0 \quad 1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \\ &= [p_{12} \quad p_{22}] \\ &= [1 \quad \sqrt{\mu+2}] \end{aligned}$$

Así, la señal de control óptimo es

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -x_1 - \sqrt{\mu+2}\,x_2 \tag{10-120}$$

Observe que la ley de control obtenida mediante la Ecuación (10-120) da un resultado óptimo para cualquier estado inicial bajo el índice de comportamiento determinado. La Figura 10-37 es el diagrama de bloques para este sistema.

Como la ecuación característica es

$$|\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = s^2 + \sqrt{\mu+2}\,s + 1 = 0$$

si $\mu = 1$, los dos polos en lazo cerrado están localizados en

$$s = -0.866 + j0.5, \qquad s = -0.866 - j0.5$$

Estos corresponden a los polos en lazo cerrado deseados cuando $\mu = 1$.

Solución de problemas de regulador óptimo cuadrático con MATLAB. En MATLAB, la orden

```
lqr(A,B,Q,R)
```

resuelve el problema del regulador lineal cuadrático en tiempo continuo y la ecuación de Riccati asociada. Esta orden calcula la matriz de ganancias de realimentación óptima **K** tal que la ley de control de realimentación

$$u = -\mathbf{Kx}$$

minimice el índice de comportamiento

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^*\mathbf{Qx} + \mathbf{u}^*\mathbf{Ru})\,dt$$

sujeto a la ecuación de restricción

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

Otra orden

```
[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)
```

devuelve la matriz **K**, el vector de valores propios **E** y la matriz **P**, que es la única solución definida positiva para la ecuación matricial de Riccati asociada:

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}^*\mathbf{P} - \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

Si la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ es estable, siempre existe una solución **P** definida positiva. Los polos en lazo cerrado o los valores propios de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ también se obtienen mediante esta orden.

Es importante señalar que para ciertos sistemas la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ no puede hacerse estable, independientemente de la **K** que se elija. En este caso, no existe una matriz **P** definida positiva para la ecuación matricial de Riccati. Para tales casos, las órdenes

```
K = lqr(A,B,Q,R)
[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)
```

no dan la solución. Véase el Programa MATLAB 10-18.

EJEMPLO 10-10 Sea el sistema definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Demuestre que el sistema no se puede estabilizar mediante el esquema de control de realimentación del estado

$$u = -\mathbf{Kx}$$

sin importar qué matriz **K** se seleccione. (Observe que el sistema no es de estado controlable.) Defina

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$$

Así,

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2]$$

$$= \begin{bmatrix} -1 - k_1 & 1 - k_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la ecuación característica es

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = \begin{vmatrix} s + 1 + k_1 & -1 + k_2 \\ 0 & s - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (s + 1 + k_1)(s - 2) = 0$$

Los polos en lazo cerrado se localizan en

$$s = -1 - k_1, \qquad s = 2$$

Como el polo en $s = 2$ está en el semiplano derecho del plano s, el sistema es inestable con cualquier matriz **K** que se seleccione. Por tanto, las técnicas de control óptimo cuadrático no se pueden aplicar a este sistema.

Se supone que las matrices **Q** y **R** del índice de comportamiento cuadrático se obtienen mediante

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = [1]$$

y que se escribe el Programa MATLAB 10-18. La solución MATLAB resultante es

```
K = [NaN  NaN]
```

(NaN significa 'no es un número'.) Cuando no existe solución para un problema de control óptimo cuadrático, MATLAB indica que la matriz **K** está formada por NaN.

MATLAB Programa 10-18

```
% ---------- Diseño del sistema regulador óptimo cuadrático ----------

A = [-1  1;0  2];
B = [1;0];
Q = [1  0;0  1];
R = [1];

K = lqr(A,B,Q,R)

Warning: Matrix is singular to working precision.

K =

   NaN  NaN

% ***** Si se introduce la orden [K,P,E] = lqr(A,B,Q,R), entonces *****

[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)

Warning: Matrix is singular to working precision.

K =

   NaN  NaN

P =

   -Inf  -Inf
   -Inf  -Inf

E =

   -2.0000
   -1.4142
```

EJEMPLO 10-11 Sea el sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El índice de comportamiento J se obtiene mediante

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + u'Ru)\, dt$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = [1]$$

Suponga que se usa el control u siguiente:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Determine la matriz de ganancias de realimentación óptima **K**.

La matriz de ganancias de realimentación óptima **K** se puede obtener resolviendo la ecuación de Riccati siguiente para una matriz **P** definida positiva:

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

El resultado es

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Al sustituir esta matriz **P** en la ecuación siguiente da la matriz **K** óptima:

$$\mathbf{K} = R^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P}$$

$$= [1]\,[0 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1]$$

Por tanto, la señal de control óptimo se obtiene mediante

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -x_1 - x_2$$

El Programa MATLAB 10-19 también da la solución para este problema.

MATLAB Programa 10-19

```
% ---------- Diseño del sistema regulador óptimo cuadrático ----------
A=[0  1;0  -1];
B=[0;1];
Q=[1  0;0  1];
R=[1];
K=lqr(A,B,Q,R)
K=

   1.0000  1.0000
```

EJEMPLO 10-12 Sea el sistema dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -35 & -27 & -9 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La función de coste J se obtiene mediante

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + u'Ru)\, dt$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = [1]$$

Obtenga la matriz solución **P** definida positiva de la ecuación de Ricatti, la matriz de ganancia de realimentación óptima **K** y los valores propios de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$.

El Programa MATLAB 10-20 resolverá este problema.

A continuación se obtiene la respuesta $\mathbf{x}$ del sistema regulador a la condición inicial $\mathbf{x}(0)$, donde

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB Programa 10-20

```
% ---------- Diseño del sistema regulador óptimo cuadrático ----------
A=[0  1  0;0  0  1;-35  -27  -9];
B=[0;0;1];
Q=[1  0  0;0  1  0;0  0  1];
R=[1];
[K,P,E]=lqr(A,B,Q,R)

K=

   0.0143  0.1107  0.0676

P=

   4.2625  2.4957  0.0143
   2.4957  2.8150  0.1107
   0.0143  0.1107  0.0676

E=

   -5.0958
   -1.9859+1.7110i
   -1.9859-1.7110i
```

Con la realimentación de estado $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, la ecuación de estado para el sistema resulta

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

Entonces el sistema, o sys, está dado por

```
sys = ss(A − B*K, eye(3), eye(3), eye(3))
```

El Programa MATLAB 10-21 da la respuesta a la condición inicial dada. En la Figura 10-38 se muestran las curvas de respuesta.

MATLAB Programa 10-21

```
% Respuesta a condición inicial.

A=[0 1 0;0 0 1;–35 –27 –9];
B=[0;0;1];
K=[0.0143 0.1107 0.0676];
sys=ss(A–B*K, eye(3),eye(3),eye(3));
t=0:0.01:8;
x=initial(sys,[1;0;0],t);
x1=[1 0 0]*x';
x2=[0 1 0]*x';
X3=[0 0 1]*x';

subplot(2,2,1); plot(t,x1); grid
xlabel('t (seg)'); ylabel('x1')

subplot(2,2,2); plot(t,x2); grid
xlabel('t (seg)'); ylabel('x2)

subplot(2,2,3); plot(t,x3); grid
xlabel('t (seg)'); ylabel('x3')
```

EJEMPLO 10-13 Sea el sistema que se muestra en la Figura 10-39. La planta se define mediante las siguientes ecuaciones en el espacio de estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \qquad D = [0]$$

La señal de control u está dada por

$$u = k_1(r - x_1) - (k_2x_2 + k_3x_3) + k_1r - (k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)$$

Al determinar una ley de control óptimo, se supone que la entrada es cero, o $r = 0$.

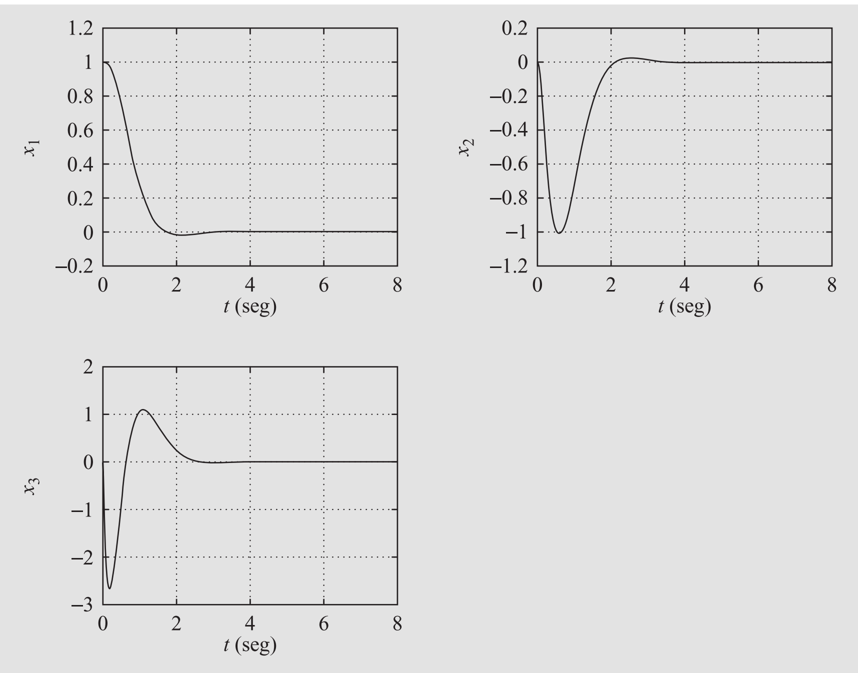


Figura 10-38. Curvas de respuesta a condición inicial.

Se determina la matriz de ganancias de realimentación del estado **K**, donde

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

tal que el índice de comportamiento siguiente se minimice:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + u'Ru)\,dt$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{bmatrix}, \qquad R = 1, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}$$

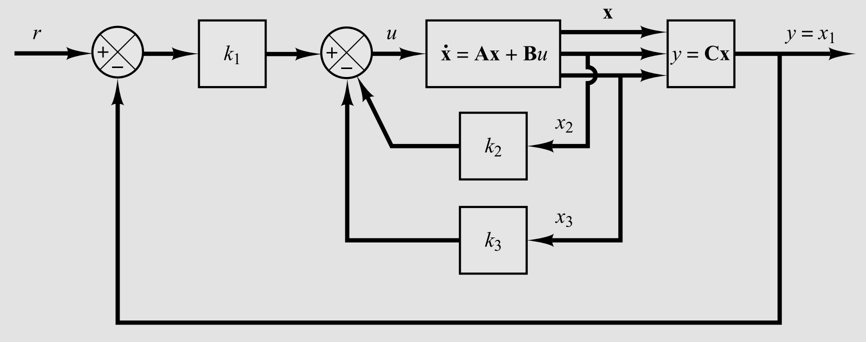


Figura 10-39. Sistema de control.

Para obtener una respuesta rápida, q_{11} debe ser suficientemente grande comparada con q_{22}, q_{33} y R. En este problema se selecciona

$$q_{11} = 100, \qquad q_{22} = q_{33} = 1, \qquad R = 0.01$$

Para resolver este problema con MATLAB, se utiliza la orden

```
K = lqr(A,B,Q,R)
```

El Programa MATLAB 10-22 da la solución para este problema.

MATLAB Programa 10-22

```
% ---------- Diseño del sistema regulador óptimo cuadrático ----------

A=[0  1  0;0  0  1;0  -2  -3];
B=[0;0;1];
Q=[100  0  0;0  1  0;0  0  1];
R=[0.01];

K=Iqr(A,B,Q,R)

K=

   100.0000  53.1200  11.6711
```

A continuación se investigan las características de respuesta escalón del sistema diseñado a partir de la matriz **K** así determinada. La ecuación de estado para el sistema diseñado es

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x} + k_1 r) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}k_1 r\end{aligned}$$

y la ecuación de salida es

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} = [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Para obtener la respuesta escalón unitario, se utiliza la siguiente orden:

```
[y,x,t] = step(AA,BB,CC,DD)
```

donde

$$\texttt{AA} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}, \qquad \texttt{BB} = \mathbf{B}k_1, \qquad \texttt{CC} = \mathbf{C}, \qquad \texttt{DD} = D$$

El Programa MATLAB 10-23 da la respuesta escalón unitario del sistema diseñado. La Figura 10-40 muestra en un diagrama las curvas de respuesta x_1, x_2 y x_3 respecto de t.

MATLAB Programa 10-23

```
% ---------- Respuesta a un escalón unitario del sistema diseñado ----------

A=[0  1  0;0  0  1;0  -2  -3];
B=[0;0;1]
C=[1  0  0];
D=[0];
K=[100.0000  53.1200  11.6711];
k1=K(1); k2=K(2); k3=K(3);

% ***** Definir la matriz de estado, la matriz de control, la matriz de salida,
% y la matriz de transmisión directa del sistema diseñado como AA,
% BB,CC, and DD *****

AA=A-B*K;
BB=B*k1;
CC=C;
DD=D;
t=0:0.01:8;
[y,x,t]=step (AA,BB,CC,DD,1,t);

plot(t,x)
grid
title('Curvas de respuesta x1, x2, x3, respecto de t')
xlabel('t Seg')
ylabel('x1,x2,x3')
text(2.6,1.35,'x1')
text(1.2,1.5,'x2')
text(0.6,3.5,'x3')
```

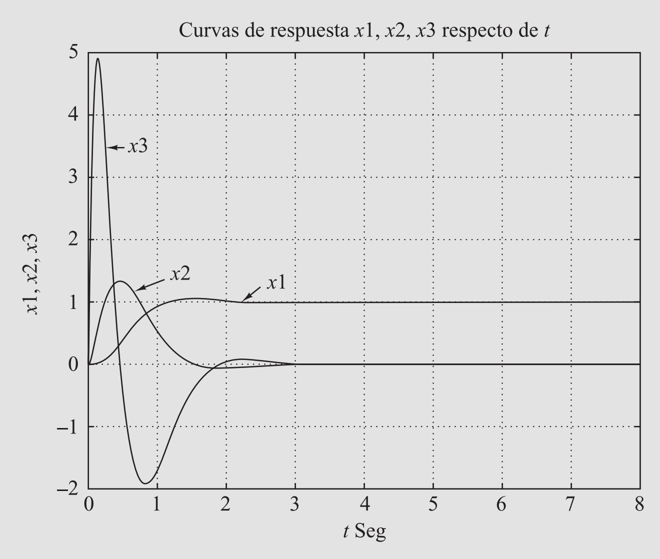


Figura 10-40. Curvas de respuesta x_1 respecto de t, x_2 respecto de t y x_3 respecto de t.

Comentarios finales sobre sistemas de reguladores óptimos

1. Dado cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$, el problema de control óptimo es encontrar un vector de control admisible $\mathbf{u}(t)$ que transfiera el estado a la región deseada del espacio de estados y para el cual se minimice el índice de comportamiento. Para la existencia de un vector de control óptimo $\mathbf{u}(t)$, el sistema debe ser de estado completamente controlable.

2. El sistema que minimiza (o maximiza, según el caso) el índice de comportamiento seleccionado es, por definición, óptimo. Aunque en muchas aplicaciones prácticas el controlador puede no tener nada que ver con una condición «óptima», lo importante es que el diseño basado en el índice de comportamiento cuadrático da un sistema de control estable.

3. La característica de una ley de control óptimo basada en un índice de comportamiento cuadrático es que se trata de una función lineal de las variables de estado, lo cual implica que se necesita realimentar todas las variables de estado. Esto requiere que estén disponibles todas ellas para su realimentación. Si esto no es posible, entonces se necesita emplear un observador del estado para estimar variables de estado no medibles y usar los valores estimados para generar señales de control óptimas.

   Obsérvese que los polos en lazo cerrado del sistema diseñado mediante el uso del método del regulador óptimo cuadrático se pueden encontrar a partir de

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = 0$$

   Como estos polos en lazo cerrado corresponden a los polos en lazo cerrado deseados en el método de asignación de polos, las funciones de transferencia de los controladores del observador se pueden obtener o bien a partir de la Ecuación (10-74) si el observador es de orden completo o de la Ecuación (10-108) si el observador es del tipo de orden mínimo.

4. Cuando se diseña el sistema de control óptimo en el dominio del tiempo es deseable investigar las características de respuesta en frecuencia para compensar los efectos del ruido. Las características de respuesta en frecuencia deben ser tales que el sistema se atenúa fuertemente en el rango de frecuencias donde se esperan ruido y resonancia de los componentes. (Para compensar los efectos del ruido se debe, en algunos casos, o bien modificar la configuración óptima y aceptar comportamiento subóptimo o modificar el índice de comportamiento.)

5. Si el límite superior de integración en el índice de comportamiento J dado por la Ecuación (10-114) es finito, entonces se puede demostrar que el vector de control óptimo es todavía una función lineal de las variables de estado, pero con coeficientes variables con el tiempo. (Por lo tanto, la determinación del vector de control óptimo incluye las matrices variables con el tiempo óptimas.)

10-9 Sistemas de control robusto

Suponga que se desea diseñar un sistema de control para una planta dada (como por ejemplo un sistema con un brazo flexible). El primer paso en el diseño del sistema de control consiste en obtener un modelo matemático del sistema a controlar basado en leyes físicas. Es bastante frecuente que el modelo no sea lineal y posiblemente tenga parámetros distribuidos. Tales modelos pueden ser difíciles de analizar. Es conveniente aproximarlo por un sistema de coeficientes constantes lineales que aproxime a la planta real relativamente bien.

Observe que incluso cuando el modelo utilizado para propósitos de diseño se pueda simplificar, es necesario que deba incluir cualquier característica intrínseca del sistema real. Suponiendo que se pueda obtener un modelo que se aproxime al sistema real bastante bien, se debe de obtener un modelo simplificado para el propósito del diseño del sistema de control que requiera un compensador del menor orden posible. Por tanto, un modelo del sistema a controlar (cualquiera que sea) incluirá, probablemente, un error en el proceso de modelado. Observe que en el método de la respuesta en frecuencia para el diseño de sistemas de control, se utilizan los márgenes de fase y de ganancia para tener en cuenta los errores de modelado. Sin embargo, en el método del espacio de estados, el cual se basa en las ecuaciones diferenciales de la dinámica de la planta, tales «márgenes» no aparecen en el proceso de diseño.

Como las plantas reales difieren del modelo utilizado en el diseño, surge la cuestión de si el controlador diseñado a partir del modelo funcionará satisfactoriamente con la planta real. Para asegurar que lo hará, la teoría del control robusto ha sido desarrollada desde los años 80.

La teoría de control robusto utiliza la hipótesis de que los modelos que se utilizan en el diseño de los sistemas de control tienen errores de modelado. En esta sección se presenta una introducción de esta teoría. Básicamente, la teoría supone que existe una incertidumbre o error en el proceso de diseño del sistema de control.

Los sistemas diseñados a partir de la teoría del control robusto tendrán las siguientes propiedades:

1. *Estabilidad robusta*. El sistema de control diseñado es estable en presencia de perturbaciones.

2. *Comportamiento robusto*. El sistema de control presenta características de respuesta predeterminadas en presencia de perturbaciones.

Esta teoría requiere consideraciones basadas en los análisis de respuesta en frecuencia y en el dominio del tiempo. Debido a las complicaciones matemáticas asociadas con la teoría del control robusto, el análisis detallado de esta teoría se encuentra fuera del alcance de un estudiante de ingeniería. En esta sección únicamente se hace un análisis introductorio a la teoría de control robusto.

Elementos con incertidumbre en la dinámica de la planta. El término *incertidumbre* se refiere a las diferencias o errores entre el modelo de la planta y el sistema real.

Los elementos con incertidumbre que pueden aparecer en los sistemas prácticos se pueden clasificar como incertidumbres *estructuradas* e incertidumbres *no estructuradas*. Un ejemplo de incertidumbre estructurada es cualquier variación paramétrica en la dinámica de la planta, tales como variaciones en los polos y ceros de la función de transferencia de la planta. Ejemplos de incertidumbres no estructuradas incluyen incertidumbres dependientes de la frecuencia, tales como modos de alta frecuencia que normalmente se desprecian en el modelado de la dinámica de la planta. Por ejemplo, en el modelado del sistema de un brazo flexible, el modelo puede incluir un número finito de modos de oscilación. Los modos de oscilación que no se incluyen en el modelo se comportan como incertidumbres del sistema. Otro ejemplo de incertidumbre aparece en la linealización de una planta no lineal. Si la planta real es no lineal y su modelo es lineal, la diferencia actúa como incertidumbre no estructurada.

En esta sección se considera el caso de las incertidumbres no estructuradas. Además se supone que la planta tiene una única incertidumbre. (Algunas plantas pueden implicar múltiples elementos con incertidumbre).

En la teoría de control robusto, se define incertidumbre no estructurada como $\Delta(s)$. Como la descripción exacta de $\Delta(s)$ es desconocida, se utiliza una estimación de $\Delta(s)$ (lo mismo que las características de magnitud y fase) y se utiliza esta estimación en el diseño del controlador que estabiliza el sistema de control. La estabilidad de un sistema con incertidumbre no estructurada se puede examinar a partir del teorema de pequeña ganancia que proporciona la siguiente definición de la norma H_∞.

Norma H_∞. La norma H_∞ de un sistema estable de una entrada y una salida es el factor máximo de amplificación posible de la respuesta en estado estacionario a una excitación sinusoidal.

Para un escalar $\Phi(s)$, $\|\Phi\|_\infty$ proporciona el máximo valor de $|\Phi(j\omega)|$. Se denomina la norma H_∞. Véase la Figura 10-41.

En la teoría de control robusto se mide la magnitud de la función de transferencia con la norma H_∞. Se supone que la función de transferencia $\Phi(s)$ es propia y estable. [Obsérvese que una función de transferencia $\Phi(s)$ se denomina propia si $\Phi(\infty)$ está limitada y definida. Si $\Phi(\infty) = 0$, se denomina estríctamente propia]. La norma H_∞ de $\Phi(s)$ se define como

$$\|\Phi\|_\infty = \bar{\sigma}[\Phi(j\omega)]$$

$\bar{\sigma}[\Phi(j\omega)]$ significa el máximo valor singular de $[\Phi(j\omega)]$. ($\bar{\sigma}$ significa $\sigma_{\max}$). Observe que el valor singular de una función de transferencia Φ se define como

$$\sigma_i(\Phi) = \sqrt{\lambda_i(\Phi^*\Phi)}$$

donde $\lambda_i(\Phi^*\Phi)$ es el i-ésimo valor propio mayor de $\Phi^*\Phi$ y es siempre un valor real no negativo. Al hacer $\|\Phi\|_\infty$ más pequeño el efecto de la entrada w sobre la salida z es menor. Frecuentemente en lugar de utilizar el máximo valor singular de $\|\Phi\|_\infty$ se utiliza la siguiente desigualdad

$$\|\Phi\|_\infty < \gamma$$

y se limita la magnitud de $\Phi(s)$ a γ. Para hacer la magnitud de $\|\Phi\|_\infty$ pequeña se escoge un valor pequeño de γ y se exige $\|\Phi\|_\infty < \gamma$.

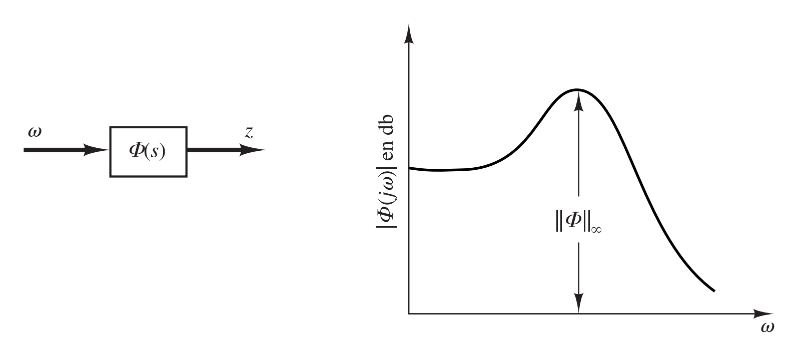


Figura 10-41. Diagrama de Bode y la norma H_∞, $\|\Phi\|_\infty$.

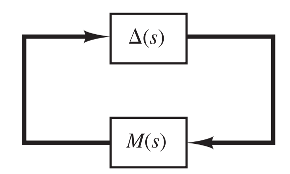


Figura 10-42. Sistema en lazo cerrado.

Teorema de la pequeña ganancia. Considere el sistema en lazo cerrado que se muestra en la Figura 10-42. En la figura, $\Delta(s)$ y $M(s)$ son funciones de transferencia estables y apropiadas.

El teorema de la pequeña ganancia establece que si

$$\|\Delta(s)M(s)\|_\infty < 1$$

entonces este sistema en lazo cerrado es estable. Es decir, si la norma H_∞ de $\Delta(s)\ M(s)$ es menor que 1, este sistema en lazo cerrado es estable. Este teorema es una extensión del criterio de estabilidad de Nyquist.

Es importante observar que el teorema de la pequeña ganancia proporciona una condición suficiente para la estabilidad. Esto es, un sistema puede ser estable incluso si no se satisface este teorema. Sin embargo, si un sistema satisface el teorema de la pequeña ganancia es siempre estable.

Sistema con incertidumbre no estructurada. En algunos casos un error de incertidumbre no estructurada se puede considerar multiplicativo como

$$\tilde{G} = G(1 + \Delta_m)$$

donde $\tilde{G}$ es la dinámica de la planta real y G es la dinámica de la planta modelada. En otras situaciones un error de una incertidumbre no estructurada se puede considerar como aditivo, como por ejemplo

$$\tilde{G} = G + \Delta_a$$

En cualquier caso se supone que la norma de Δ_m o Δ_a está acotada tal que

$$\|\Delta_m\| < \gamma_m, \qquad \|\Delta_a\| < \gamma_a$$

donde γ_m y γ_a son constantes positivas.

EJEMPLO 10-14 Considérese un sistema de control con incertidumbre no estructurada multiplicativa. Se considerará la estabilidad robusta y el comportamiento robusto. (El Problema **A-10-18** analizará un sistema con incertidumbre no estructurada aditiva).

Estabilidad robusta. Se define

$\tilde{G}$ = dinámica de la planta real

G = modelo de la dinámica de la planta

Δ_m = incertidumbre no estructurada multiplicativa

Se supone que Δ_m es estable y que su límite superior es conocido. También se supone que $\tilde{G}$ y G están relacionadas mediante

$$\tilde{G} = G(I + \Delta_m)$$

Considere el sistema que se muestra en la Figura 10-43(a). Al examinar la función de transferencia entre los puntos A y B observe que la Figura 10-43(a) se puede dibujar como muestra la Figura 10-43(b). La función de transferencia entre el punto A y el punto B se puede expresar como

$$\frac{KG}{1 + KG} = (1 + KG)^{-1} KG$$

Se define

$$(1 + KG)^{-1} KG = T \tag{10-121}$$

Utilizando la Ecuación (10-121) se puede redibujar la Figura 10-43(b) como se muestra en la Figura 10-43(c). Aplicando el teorema de la pequeña ganancia al sistema que consiste en Δ_m y T como muestra la Figura 10-43(c), se obtiene que la condición de estabilidad es

$$\|\Delta_m T\|_\infty < 1 \tag{10-122}$$

En general, es imposible modelar exactamente Δ_m. Por tanto, se utiliza una función de transferencia escalar $W_m(j\omega)$ tal que

$$\bar{\sigma}\{\Delta_m(j\omega)\} < \|W_m(j\omega)\|$$

donde $\bar{\sigma}\{\Delta_m(j\omega)\}$ es el valor singular mayor de $\Delta_m(j\omega)$.

Considérese, en lugar de la Desigualdad (10-122), la siguiente desigualdad:

$$|W_m T|_\infty < 1 \tag{10-123}$$

Si se cumple la Desigualdad (10-123), la Desigualdad (10-122) siempre se cumplirá. Haciendo que la norma H_∞ de $W_m T$ sea menor que 1, se obtiene el controlador K que hará que el sistema sea estable.

Supóngase que se corta la línea en el punto A en la Figura 10-43(a). Se obtiene la Figura 10-43(d). Sustituyendo Δ_m por $W_m I$, se obtiene la Figura 10-43(e). Redibujando la Figura 10-43(e) se obtiene la Figura 10-43(f). La Figura 10-43(f) se denomina *diagrama de planta generalizado*.

De la Ecuación (10-121), T viene expresado como

$$T = \frac{KG}{1 + KG} \tag{10-124}$$

Por tanto la Desigualdad (10-123) se puede reescribir como:

$$\left\| \frac{W_m K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \right\|_\infty < 1 \tag{10-125}$$

Claramente, para un modelo de planta estable $G(s)$, $K(s) = 0$ cumplirá la Desigualdad (10-125). Sin embargo, $K(s) = 0$ no es una función de transferencia deseable para el controlador. Para encontrar una función de transferencia aceptable para $K(s)$, se puede añadir otra condición —por ejemplo, que el sistema resultante tenga un comportamiento robusto tal que la salida del sistema siga a la entrada con el mínimo error o cualquier otra condición razonable. A continuación se obtendrán las condiciones para el comportamiento robusto.

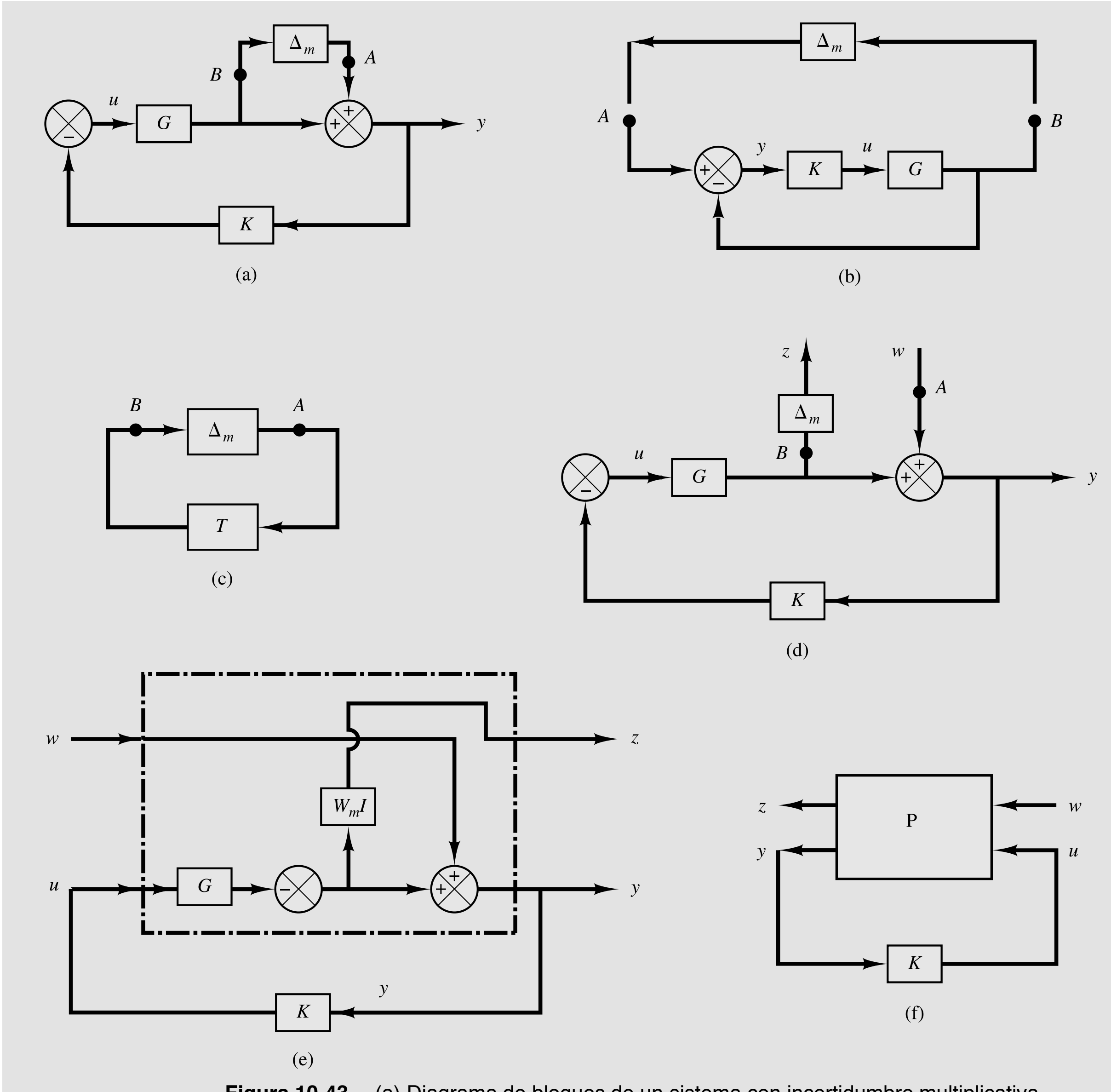


Figura 10-43. (a) Diagrama de bloques de un sistema con incertidumbre multiplicativa no estructurada; (b)-(d) sucesivas modificaciones del diagrama de bloques de (a); (e) diagrama de bloques mostrando una planta generalizada con incertidumbre multiplicativa no estructurada; (f) diagrama de planta generalizada.

Comportamiento robusto. Considérese el sistema que se muestra en la Figura 10-44. Supóngase que se quiere que la salida $y(t)$ siga a la entrada $r(t)$ con el menor error posible, es decir

$$\lim_{t\to\infty} [r(t) - y(t)] = \lim_{t\to\infty} e(t) \to 0$$

Como la función de transferencia $Y(s)/R(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG}{1 + KG}$$

se tiene

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - Y(s)}{R(s)} = 1 - \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + KG}$$

Se define

$$\frac{1}{1 + KG} = S$$

Donde S se denomina comúnmente como función de sensibilidad y T, definido en la Ecuación (10-124), se denomina función de sensibilidad complementaria. En este problema de comportamiento robusto se quiere hacer la norma H_∞ de S más pequeña que la función de transferencia deseada W_s^{-1} o $\|S\|_\infty < W_s^{-1}$ con lo cual se puede escribir como

$$\|W_s S\|_\infty < 1 \tag{10-126}$$

Al combinar las Desigualdades (10-123) y (10-126) se obtiene

$$\left\| \begin{matrix} W_m T \\ W_s S \end{matrix} \right\|_\infty < 1$$

Donde $T + S = 1$, o bien

$$\left\| \begin{matrix} W_m(s) \dfrac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \\ W_s(s) \dfrac{1}{1 + K(s)G(s)} \end{matrix} \right\|_\infty < 1 \tag{10-127}$$

El problema se convierte en encontrar $K(s)$ que satisfaga la Desigualdad (10-127). Obsérvese que dependiendo de la elección de $W_m(s)$ y $W_s(s)$ existen muchas $K(s)$ que satisfacen la Desigualdad (10-127), o por el contrario puede ser que ninguna $K(s)$ satisfaga la Desigualdad (10-127). Al problema de control robusto que utiliza la Desigualdad (10-127) se le denomina problema de sensibilidad mixto.

La Figura 10-45(a) es un diagrama de planta generalizado, donde se especifican dos condiciones (estabilidad robusta y comportamiento robusto). La Figura 10-45(b) muestra una versión simplificada de este diagrama.

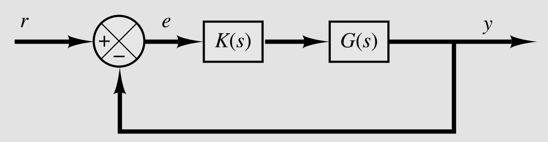


Figura 10-44. Sistema en lazo cerrado.

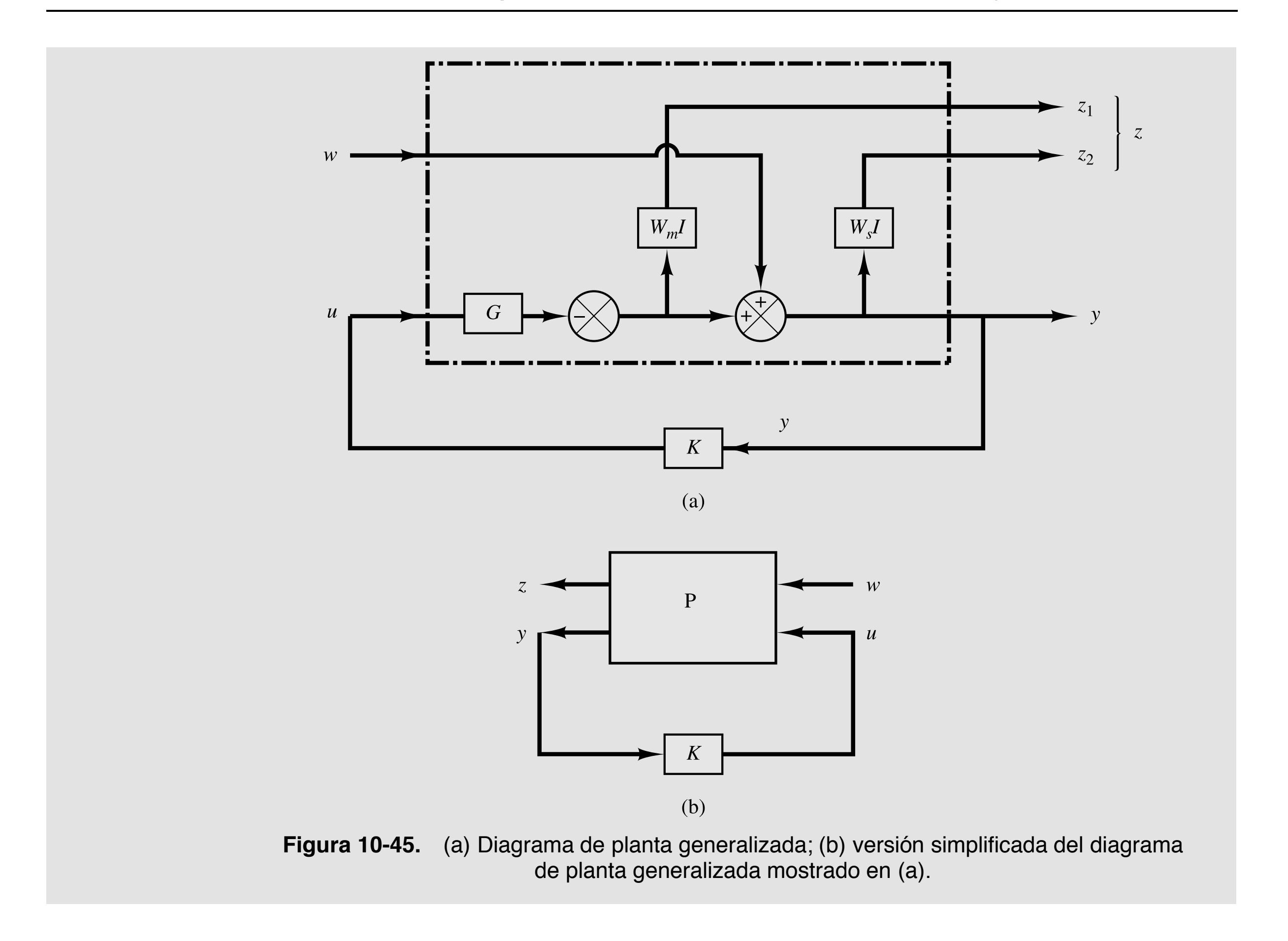


Figura 10-45. (a) Diagrama de planta generalizada; (b) versión simplificada del diagrama de planta generalizada mostrado en (a).

Determinación de la función de transferencia $z(s)/w(s)$ a partir de un diagrama de planta generalizado. Considere el diagrama de planta generalizado que se muestra en la Figura 10-46.

En este diagrama $w(s)$ es la perturbación exógena y $u(s)$ es la variable manipulada. $z(s)$ es la variable controlada e $y(s)$ es la variable observada.

Considere el sistema de control formado por la planta generalizada $P(s)$ y el controlador $K(s)$. La ecuación que relaciona las salidas $z(s)$ e $y(s)$ y las entradas $w(s)$ y $u(s)$ de la planta generalizada $P(s)$ es

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix}$$

La ecuación que relaciona $u(s)$ e $y(s)$ es

$$u(s) = K(s)y(s)$$

Se define la función de transferencia que relaciona la variable controlada $z(s)$ con la perturbación exógena $w(s)$ como $\Phi(s)$. Por tanto

$$z(s) = \Phi(s)w(s)$$

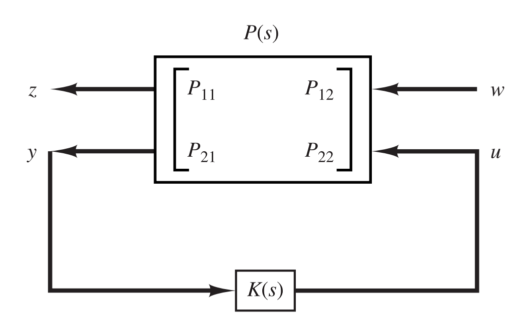


Figura 10-46. Un diagrama de planta generalizada.

Obsérvese que se puede calcular $\Phi(s)$ de la siguiente manera: como

$$z(s) = P_{11}w(s) + P_{12}u(s)$$

$$y(s) = P_{21}w(s) + P_{22}u(s)$$

$$u(s) = K(s)y(s)$$

se obtiene

$$y(s) = P_{21}w(s) + P_{22}K(s)y(s)$$

Por tanto

$$[I - P_{22}K(s)]y(s) = P_{21}w(s)$$

o bien

$$y(s) = [I - P_{22}K(s)]^{-1}P_{21}w(s)$$

Entonces

$$z(s) = P_{11}w(s) + P_{12}K(s)[I - P_{22}K(s)]^{-1}P_{21}w(s)$$

$$= \{P_{11} + P_{12}K(s)[I - P_{22}K(s)]^{-1}P_{21}\}w(s)$$

Por tanto

$$\Phi(s) = P_{11} + P_{12}K(s)[I - P_{22}(s)]^{-1}P_{21} \qquad (10\text{-}128)$$

EJEMPLO 10-15 A continuación se determina la matriz P en el diagrama de planta generalizado del sistema de control considerado en el Ejemplo 10-14. Se deduce la Desigualdad (10-125) para que el sistema de control sea robustamente estable. Reescribiendo la Desigualdad (10-125), se tiene

$$\left\| \frac{W_m KG}{1 + KG} \right\|_\infty < 1 \qquad (10\text{-}129)$$

Si se define

$$\Phi_1 = \frac{W_m KG}{1 + KG} \tag{10-130}$$

La Desigualdad (10-129) se puede escribir como

$$\|\Phi_1\|_\infty < 1$$

La Ecuación (10-128) se puede reescribir como

$$\Phi = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$$

Obsérvese que si se escoge la planta generalizada P como

$$P = \begin{bmatrix} 0 & W_m G \\ I & -G \end{bmatrix} \tag{10-131}$$

Se obtiene que

$$\begin{aligned}\Phi &= P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \\ &= W_m KG(I + KG)^{-1}\end{aligned}$$

Que es exactamente lo mismo que Φ_1 en la Ecuación (10-130).

En el Ejemplo 10-14 se obtuvo que si se deseaba que la salida y siga a la entrada r tan próximo como sea posible, es necesario hacer que la norma H_∞ de $\Phi_2(s)$, donde

$$\Phi_2 = \frac{W_s}{I + KG} \tag{10-132}$$

sea menor que 1. [Véase la Desigualdad (10-126)].

Obsérvese que la variable controlada z está relacionada con la perturbación exógena w mediante

$$z = \Phi(s)w$$

y refiriéndose a la Ecuación (10-128)

$$\Phi(s) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$$

Obsérvese que si se escoge la matriz P como

$$P = \begin{bmatrix} W_s & -W_s G \\ I & -G \end{bmatrix} \tag{10-133}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\Phi &= P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \\ &= W_s - W_s KG(I + KG)^{-1} \\ &= W_s \left[1 - \frac{KG}{1 + KG}\right] \\ &= W_s \left[\frac{1}{1 + KG}\right]\end{aligned}$$

Que es lo mismo que Φ_2 en la Ecuación (10-132).

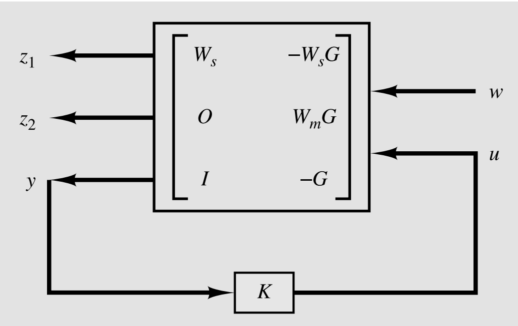


Figura 10-47. Planta generalizada del sistema analizado en el Ejemplo 10-15.

Si se requieren las condiciones de estabilidad y comportamiento robusto, el sistema de control debe de satisfacer la condición dada por la Desigualdad (10-127), reescrita como

$$\left\| \begin{matrix} W_m \dfrac{KG}{1+KG} \\ W_s \dfrac{1}{1+KG} \end{matrix} \right\|_\infty < 1 \qquad (10\text{-}134)$$

Para la matriz P, se combinan las Ecuaciones (10-133) y (10-131) y se obtiene

$$P = \begin{bmatrix} W_s & -W_sG \\ 0 & W_mG \\ I & -G \end{bmatrix} \qquad (10\text{-}135)$$

Si se construye $P(s)$ a partir de la Ecuación (10-135), el problema del diseño de un sistema de control que satisfaga las condiciones de estabilidad robusta y comportamiento robusto se puede formular con la planta generalizada representada en la Ecuación (10-135). Como se mencionó anteriormente, a ese problema se le denomina problema de sensibilidad mixto. A partir de la planta generalizada de la Ecuación (10-135) se puede determinar el controlador $K(s)$ que satisfaga la Desigualdad (10-134). La Figura 10-47 muestra el diagrama de la planta generalizada para el sistema considerado en el Ejemplo 10-14.

Problema de control *H* infinito. Para diseñar un controlador K de un sistema de control que tenga que satisfacer varias especificaciones de estabilidad y comportamiento, se utiliza el concepto de planta generalizada.

Como se mencionó anteriormente una planta generalizada es un modelo lineal que consiste de un modelo de la planta y funciones de peso correspondientes a las especificaciones para el comportamiento requerido. A partir de la planta generalizada que se muestra en la Figura 10-48, el problema de control H infinito es un problema que consiste en diseñar un controlador K de tal forma que la norma H_∞ de la función de transferencia desde la perturbación exógena w a la variable controlada z sea menor que un valor especificado.

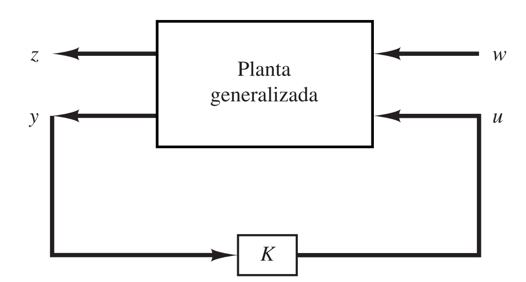


Figura 10-48. Un diagrama de planta generalizada.

La razón de utilizar plantas generalizadas, además de los diagramas de bloques individuales de los sistemas de control, es que un gran número de sistemas de control con elementos de incertidumbre han sido diseñados utilizando plantas generalizadas y, consecuentemente, métodos de diseño utilizando tales plantas se encuentran disponibles.

Obsérvese que cualquier función de peso, como por ejemplo $W(s)$, es un parámetro importante que influye en el controlador resultante $K(s)$. En realidad, lo bueno que sea el sistema diseñado resultante depende de la elección de la función o funciones de peso utilizadas en el proceso de diseño.

Obsérvese que el controlador que es la solución del problema de control H infinito se denomina comúnmente como controlador H infinito.

Resolución de los problemas de control robusto. Existen tres métodos para resolver los problemas de control robusto:

1. Resolver los problemas de control robusto derivando las ecuaciones de Riccati y resolviéndolas.
2. Resolver los problemas de control robusto utilizando el método de la desigualdad de la matriz lineal.
3. Resolver los problemas de control robusto suponiendo incertidumbres estructurales a partir del método de análisis μ y de síntesis μ.

Resolver problemas de control robusto a partir de alguno de los tres métodos mencionados anteriormente requiere una amplia base matemática.

En esta sección se ha presentado únicamente una introducción a la teoría del control robusto. Resolver cualquier problema de control robusto necesita de un conocimiento matemático profundo que se encuentra fuera del alcance de un estudiante de ingeniería. Por tanto, un lector interesado puede realizar un curso de control a nivel de grado en una universidad o colegio universitario y estudiar este tema en detalle.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES

A-10-1. Sea el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

Suponga que este sistema no es de estado completamente controlable. De este modo, el rango de la matriz de controlabilidad es menor que n, o

$$\text{rango}\,[\mathbf{B} \;\vdots\; \mathbf{A}\mathbf{B} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = q < n \tag{10-136}$$

Esto significa que hay q vectores columna linealmente independientes en la matriz de controlabilidad. Se definen tales q vectores columna linealmente independientes como $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_q$. Asimismo, se seleccionan $n - q$ vectores adicionales de dimensión n $\mathbf{v}_{q+1}, \mathbf{v}_{q+2}, ..., \mathbf{v}_n$ tales que

$$\mathbf{P} = [\mathbf{f}_1 \;\vdots\; \mathbf{f}_2 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \mathbf{f}_q \;\vdots\; \mathbf{v}_{q+1} \;\vdots\; \mathbf{v}_{q+2} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \mathbf{v}_n]$$

sea de rango n. Usando la matriz $\mathbf{P}$ como la matriz de transformación, se define

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \hat{\mathbf{A}}, \qquad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}$$

Demuestre que $\hat{\mathbf{A}}$ se obtiene mediante

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{A}_{11}$ es una matriz de $q \times q$, $\mathbf{A}_{12}$ es una matriz de $q \times (n - q)$, $\mathbf{A}_{22}$ es una matriz de $(n - q) \times (n - q)$ y $\mathbf{0}$ es una matriz de $(n - q) \times q$. Demuestre también que la matriz de $\hat{\mathbf{B}}$ se obtiene mediante

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{B}_{11}$ es una matriz de $q \times 1$ y $\mathbf{0}$ es una matriz de $(n - q) \times 1$.

Solución. Observe que

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{A}}$$

o bien

$$\begin{aligned} &[\mathbf{A}\mathbf{f}_1 \;\vdots\; \mathbf{A}\mathbf{f}_2 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \mathbf{A}\mathbf{f}_q \;\vdots\; \mathbf{A}\mathbf{v}_{q+1} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \mathbf{A}\mathbf{v}_n] \\ &\quad = [\mathbf{f}_1 \;\vdots\; \mathbf{f}_2 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \mathbf{f}_q \;\vdots\; \mathbf{v}_{q+1} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \mathbf{v}_n]\hat{\mathbf{A}} \end{aligned} \tag{10-137}$$

Asimismo,

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{B}} \tag{10-138}$$

Como se tienen q vectores columna linealmente independiente $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_q$, se puede utilizar el teorema de Cayley-Hamilton para expresar los vectores $\mathbf{A}\mathbf{f}_1, \mathbf{A}\mathbf{f}_2, ..., \mathbf{A}\mathbf{f}_q$ en términos de estos q vectores. Es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{f}_1 &= a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{q1}\mathbf{f}_q \\ \mathbf{A}\mathbf{f}_2 &= a_{12}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{q2}\mathbf{f}_q \\ &\;\;\vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{f}_q &= a_{1q}\mathbf{f}_1 + a_{2q}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{qq}\mathbf{f}_q \end{aligned}$$

Por tanto, la Ecuación (10-137) se escribe del modo siguiente:

$$[\mathbf{Af}_1 \,\vdots\, \mathbf{Af}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{Af}_q \,\vdots\, \mathbf{Av}_{q+1} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{Av}_n]$$

$$= [\mathbf{f}_1 \,\vdots\, \mathbf{f}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{f}_q \,\vdots\, \mathbf{v}_{q+1} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{v}_n] \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1q} & a_{1q+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & a_{2q+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & a_{qq+1} & \cdots & a_{qn} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{q+1q+1} & \cdots & a_{q+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nq+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right]$$

Se define

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{11}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1q+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2q+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{qq+1} & \cdots & a_{qn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{12}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{21} = (n - q) \times q \text{ matriz cero}$$

$$\begin{bmatrix} a_{q+1q+1} & \cdots & a_{q+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nq+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{22}$$

Entonces, la Ecuación (10-137) se escribe como

$$[\mathbf{Af}_1 \,\vdots\, \mathbf{Af}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{Af}_q \,\vdots\, \mathbf{Av}_{q+1} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{Av}_n]$$

$$= [\mathbf{f}_1 \,\vdots\, \mathbf{f}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{f}_q \,\vdots\, \mathbf{v}_{q+1} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{v}_n] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right]$$

Por tanto,

$$\mathbf{AP} = \mathbf{P}\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right]$$

Así,

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \hat{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right]$$

A continuación, si se toma en cuenta la Ecuación (10-138), se tiene que

$$\mathbf{B} = [\mathbf{f}_1 \mid \mathbf{f}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{f}_q \mid \mathbf{v}_{q+1} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]\hat{\mathbf{B}} \tag{10-139}$$

Tomando en consideración la Ecuación (10-136) se observa que el vector **B** se puede escribir en términos de q vectores columna linealmente independientes $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_q$. Por tanto, se tiene que

$$\mathbf{B} = b_{11}\mathbf{f}_1 + b_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + b_{q1}\mathbf{f}_q$$

En consecuencia, la Ecuación (10-139) se escribe del modo siguiente:

$$b_{11}\mathbf{f}_1 + b_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + b_{q1}\mathbf{f}_q = [\mathbf{f}_1 \mid \mathbf{f}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{f}_q \mid \mathbf{v}_{q+1} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{q1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

De este modo,

$$\hat{\mathbf{B}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_{11} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right]$$

donde

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{q1} \end{bmatrix}$$

A-10-2. Sea un sistema de estado completamente controlable

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u$$

Defina la matriz de controlabilidad como **M**:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

Demuestre que

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son los coeficientes del polinomio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Solución. Se considera el caso en el que $n = 3$. Se demostrará que

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{M}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{10-140}$$

El miembro izquierdo de la Ecuación (10-140) es

$$\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{A}[\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = [\mathbf{A}\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}^3\mathbf{B}]$$

El miembro derecho de la Ecuación (10-140) es

$$[\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B}]\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{A}\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B} \vdots -a_3\mathbf{B} - a_2\mathbf{A}\mathbf{B} - a_1\mathbf{A}^2\mathbf{B}] \tag{10-141}$$

El teorema de Cayley-Hamilton dice que la matriz $\mathbf{A}$ satisface su propia ecuación característica o, en el caso de $n = 3$,

$$\mathbf{A}^3 + a_1\mathbf{A}^2 + a_2\mathbf{A} + a_3\mathbf{I} = \mathbf{0} \tag{10-142}$$

Usando la Ecuación (10-142), la tercera columna del lado derecho de la Ecuación (10-141) es

$$-a_3\mathbf{B} - a_2\mathbf{A}\mathbf{B} - a_1\mathbf{A}^2\mathbf{B} = (-a_3\mathbf{I} - a_2\mathbf{A} - a_1\mathbf{A}^2)\mathbf{B} = \mathbf{A}^3\mathbf{B}$$

Así, la Ecuación (10-141), se convierte en

$$[\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B}]\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{A}\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}^3\mathbf{B}]$$

Por tanto, ambos miembros de la Ecuación (10-140) son iguales. Se ha demostrado así que la Ecuación (10-140) es verdadera. En consecuencia,

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

La deducción anterior se extiende con facilidad al caso general de cualquier entero positivo n.

A-10-3. Sea un sistema de estado completamente controlable

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

Defina

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}\mathbf{B} \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

y

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde las a_i son coeficientes del polinomio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Defina también

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW}$$

Demuestre que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución. Se considera el caso en el que $n = 3$. Se demostrará que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = (\mathbf{MW})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{MW}) = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM})\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{10-143}$$

Si se toma en cuenta el Problema **A-10-2**, se tiene que

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la Ecuación (10-143) puede reescribirse como

$$\mathbf{W}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, se necesita demostrar que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W} = \mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{10-144}$$

El miembro izquierdo de la Ecuación (10-144) es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El miembro derecho de la Ecuación (10-144) es

$$\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En este caso, es evidente la validez de la Ecuación (10-144). Por tanto, se ha demostrado que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

A continuación se comprobará que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10-145}$$

Observe que la Ecuación (10-145) se puede escribir como

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}\mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considerando que

$$\mathbf{T}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \mathbf{A}^2\mathbf{B}] \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \mathbf{A}^2\mathbf{B}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

se tiene que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La deducción que se ha mostrado se extiende con facilidad al caso general de cualquier entero positivo n.

A-10-4. Sea la Ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz de controlabilidad **M**,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

es 2. Por tanto, el sistema es de estado completamente controlable. Transforme la ecuación de estado determinada a la forma canónica controlable.

Solución. Como

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ 4 & s+3 \end{vmatrix} = (s-1)(s+3) + 4$$

$$= s^2 + 2s + 1 = s^2 + a_1 s + a_2$$

se tiene que

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 1$$

Defina

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW}$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Defina

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$$

Por tanto, la ecuación de estado es

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u$$

Como

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

que está en la forma canónica controlable.

A-10-5. Sea un sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{Cx}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

La ecuación característica del sistema es

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2) = 0$$

Los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ son -1 y -2.

Se desea tener valores propios en -3 y -5 usando un control mediante realimentación del estado $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$. Determine la matriz de ganancia de realimentación $\mathbf{K}$ necesaria y la señal de control u.

Solución. El sistema dado es de estado completamente controlable, como el rango de

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \;\vdots\; \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

es 2. Por tanto, es posible la asignación arbitraria de los polos.

Como la ecuación característica del sistema original es

$$s^2 + 3s + 2 = s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

se tiene que

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = 2$$

La ecuación característica deseada es

$$(s+3)(s+5) = s^2 + 8s + 15 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 = 0$$

Por tanto,

$$\alpha_1 = 8, \qquad \alpha_2 = 15$$

Es importante señalar que la ecuación de estado original no está en la forma canónica controlable, porque la matriz $\mathbf{B}$ no es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, debe determinarse la matriz de transformación $\mathbf{T}$.

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW} = [\mathbf{B} \;\vdots\; \mathbf{AB}] \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

De este modo,

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Considerando la Ecuación (10-13), la matriz de ganancias de realimentación necesaria está dada por

$$\mathbf{K} = [\alpha_2 - a_2 \;\vdots\; \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1}$$

$$= [15 - 2 \;\vdots\; 8 - 3] \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = [6.5 \quad 2.5]$$

Así, la señal de control u es

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -[6.5 \quad 2.5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A-10-6. Un sistema regulador tiene una planta

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Defina las variables de estado como

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \dot{x}_2$$

Usando el control mediante realimentación del estado $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, se desea colocar los polos en lazo cerrado en

$$s = -2 + j2\sqrt{3}, \qquad s = -2 - j2\sqrt{3}, \qquad s = -10$$

Obtenga la matriz de ganancias de realimentación del estado **K** necesaria con MATLAB.

Solución. Las ecuaciones en el espacio de estados para el sistema son

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0u$$

Por tanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \qquad D = [0]$$

(Observe que, para la asignación de los polos, las matrices **C** y D no afectan a la matriz de ganancia de realimentación del estado **K**.)

Los Programas MATLAB 10-24 y 10-25 obtienen la matriz de ganancia de realimentación del estado **K**.

MATLAB Programa 10-24

```
A=[0  1  0;0  0  1;-6  -11  -6];
B=[0;0;10];
J=[-2+j*2*sqrt(3)  -2-j*2*sqrt(3)  -10];
K=acker(A,B,J)

K=

   15.4000 4.5000 0.8000
```

MATLAB Programa 10-25

```
A=[0 1 0;0 0 1; –6 –11 –6];
B=[0;0;10];
J=[–2+j*2*sqrt(3) –2–J*2*Sqrt(3) –10];
K=place(A,B,J)
place: ndigits= 15

K=

   15.4000  4.5000  0.8000
```

A-10-7. Sea un sistema completamente observable

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Defina la matriz de observabilidad como $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \,\vdots\, \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

Demuestre que

$$\mathbf{N}^*\mathbf{A}(\mathbf{N}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \tag{10-146}$$

donde a_1, a_2, ..., a_n son los coeficientes del polinomio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Solución. Se considera el caso donde $n = 3$. La Ecuación (10-146) se escribe como

$$\mathbf{N}^*\mathbf{A}(\mathbf{N}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{10-147}$$

La Ecuación (10-147) puede reescribirse como

$$\mathbf{N}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{N}^* \tag{10-148}$$

Se demostrará que la Ecuación (10-148) es válida. El lado izquierdo de la Ecuación (10-148) es

$$\mathbf{N}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \end{bmatrix} \tag{10-149}$$

El lado derecho de la Ecuación (10-148) es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ -a_3\mathbf{C} - a_2\mathbf{CA} - a_1\mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} \qquad (10\text{-}150)$$

El teorema de Cayley-Hamilton dice que la matriz **A** satisface su propia ecuación característica, o

$$\mathbf{A}^3 + a_1\mathbf{A}^2 + a_2\mathbf{A} + a_3\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Por tanto,

$$-a_1\mathbf{CA}^2 - a_2\mathbf{CA} - a_3\mathbf{C} = \mathbf{CA}^3$$

Así, el lado derecho de la Ecuación (10-150) es igual al lado derecho de la Ecuación (10-149). En consecuencia,

$$\mathbf{N}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{N}^*$$

que es la Ecuación (10-148). Esta última ecuación se puede modificar a

$$\mathbf{N}^*\mathbf{A}(\mathbf{N}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

La deducción presentada aquí se extiende al caso general de cualquier entero positivo n.

A-10-8. Sea un sistema completamente observable definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}u \qquad (10\text{-}151)$$

$$y = \mathbf{Cx} + Du \qquad (10\text{-}152)$$

Defina

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \,\vdots\, \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]$$

y

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde las a son coeficientes del polinomio característico

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Defina también

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{WN}^*)^{-1}$$

Demuestre que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}\mathbf{Q} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

donde las b_k ($k = 0, 1, 2, ..., n$) son aquellos coeficientes que aparecen en el numerador de la función de transferencia cuando $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$ se escribe del modo siguiente:

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

donde $D = b_0$.

Solución. Se considera el caso donde $n = 3$. Se demostrará que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)\mathbf{A}(\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad (10\text{-}153)$$

Observe que, teniendo en cuenta el Problema **A-10-7**, se tiene que

$$(\mathbf{W}\mathbf{N}^*)\mathbf{A}(\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1} = \mathbf{W}[\mathbf{N}^*\mathbf{A}(\mathbf{N}^*)^{-1}]\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W}^{-1}$$

Por tanto, se necesita demostrar que

$$\mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W} \qquad (10\text{-}154)$$

El miembro izquierdo de la Ecuación (10-154) es

$$\mathbf{W}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El miembro derecho de la Ecuación (10-154) es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, se ve que la Ecuación (10-154) es válida. Por tanto, se ha comprobado la Ecuación (10-153).

A continuación se demostrará que

$$\mathbf{CQ} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

o bien

$$\mathbf{C}(\mathbf{WN}^*)^{-1} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

Observe que

$$[0 \quad 0 \quad 1](\mathbf{WN}^*) = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

Por tanto, se ha demostrado que

$$[0 \quad 0 \quad 1] = \mathbf{C}(\mathbf{WN}^*)^{-1} = \mathbf{CQ}$$

A continuación defina

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}$$

Entonces, la Ecuación (10-151) resulta

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}u \tag{10-155}$$

y la Ecuación (10-152) se convierte en

$$y = \mathbf{CQ}\hat{\mathbf{x}} + Du \tag{10-156}$$

Teniendo en cuenta la Ecuación (10-153), la Ecuación (10-155) se transforma en

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}u$$

donde

$$\begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}$$

La función de transferencia $G(s)$ para el sistema definido por las Ecuaciones (10-155) y (10-156) es

$$G(s) = \mathbf{CQ}(s\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ})^{-1}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} + D$$

Considerando que

$$\mathbf{CQ} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

se tiene que

$$G(s) = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} s & 0 & a_3 \\ -1 & s & a_2 \\ 0 & -1 & s + a_1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} + D$$

Observe que $D = b_0$. Como

$$\begin{bmatrix} s & 0 & a_3 \\ -1 & s & a_2 \\ 0 & -1 & s + a_1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}\begin{bmatrix} s^2 + a_1 s + a_2 & -a_3 & -a_3 s \\ s + a_1 & s^2 + a_1 s & -a_2 s - a_3 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}[1 \quad s \quad s^2]\begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} + D \\ &= \frac{\gamma_1 s^2 + \gamma_2 s + \gamma_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} + b_0 \\ &= \frac{b_0 s^3 + (\gamma_1 + a_1 b_0)s^2 + (\gamma_2 + a_2 b_0)s + \gamma_3 + a_3 b_0}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \\ &= \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\gamma_1 = b_1 - a_1 b_0, \qquad \gamma_2 = b_2 - a_2 b_0, \qquad \gamma_3 = b_3 - a_3 b_0$$

Así, se ha demostrado que

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_3 - a_3 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

Observe que lo que se ha deducido aquí se extiende fácilmente al caso en el que n es cualquier entero positivo.

A-10-9. Sea un sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 1]$$

El rango de la matriz de observabilidad **N**,

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \; \vdots \; \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

es 2. Por tanto, el sistema es completamente observable. Transforme las ecuaciones del sistema a su forma canónica observable.

Solución. Como

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^2 + 2s + 1 = s^2 + a_1 s + a_2$$

se tiene que

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 1$$

Defina

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1}$$

donde

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así,

$$\mathbf{Q} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Defina

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}$$

Entonces, la ecuación de estado es

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}u$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \qquad (10\text{-}157)$$

La ecuación de salida es

$$y = \mathbf{C}\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}$$

o bien

$$y = [1 \quad 1]\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \tag{10-158}$$

Las Ecuaciones (10-157) y (10-158) están en la forma canónica observable.

A-10-10. Para el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

considere el problema de diseñar un observador de estado tal que los valores propios deseados para la matriz de ganancia del observador sean $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$.

Demuestre que la matriz de ganancia del observador dada por la Ecuación (10-61), reescrita como

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1}\begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \tag{10-159}$$

se obtiene a partir de la Ecuación (10-13) considerando el problema dual. Es decir, la matriz $\mathbf{K}_e$ se puede determinar considerando el problema de asignación de polos para el sistema dual, obteniendo la matriz de ganancia de realimentación del estado $\mathbf{K}$ y tomando su transpuesta conjugada, o $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^*$.

Solución. El dual del sistema dado es

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*v \tag{10-160}$$

$$n = \mathbf{B}^*\mathbf{z}$$

Usando el control por realimentación del estado

$$v = -\mathbf{K}\mathbf{z}$$

la Ecuación (10-160) es

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K})\mathbf{z}$$

La Ecuación (10-13), que se reescribe aquí, es

$$\mathbf{K} = [\alpha_n - a_n \,\vdots\, \alpha_{n-1} - a_{n-1} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \alpha_2 - a_2 \,\vdots\, \alpha_1 - a_1]\mathbf{T}^{-1} \tag{10-161}$$

donde

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}\mathbf{W} = [\mathbf{C}^* \,\vdots\, \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*]\mathbf{W}$$

Para el sistema original, la matriz de observabilidad es

$$[\mathbf{C}^* \,\vdots\, \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*] = \mathbf{N}$$

Por tanto, la matriz $\mathbf{T}$ se puede escribir también como

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}\mathbf{W}$$

Como $\mathbf{W} = \mathbf{W}^*$, se tiene que

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{W}^*\mathbf{N}^* = \mathbf{W}\mathbf{N}^*$$

y

$$(\mathbf{T}^*)^{-1} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1}$$

Tomando la transpuesta conjugada de ambos miembros de la Ecuación (10-146), se tiene que

$$\mathbf{K}^* = (\mathbf{T}^{-1})^* \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{T}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{WN}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^*$, esta última ecuación es igual a la Ecuación (10-159). Por tanto, se ha obtenido la Ecuación (10-159) al considerar el problema dual.

A-10-11. Sea un sistema de control con realimentación del estado observado con un observador de orden mínimo descrito por las ecuaciones siguientes:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{10-162}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$u = -\mathbf{K}\tilde{x} \tag{10-163}$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \mathbf{x}_b \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix}$$

(x_a es la variable de estado que puede medirse directamente y $\tilde{\mathbf{x}}_b$ corresponde a las variables de estado observadas.)

Demuestre que los polos en lazo cerrado del sistema constituyen los polos en lazo cerrado debido a la asignación de polos [los valores propios de la matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$] y los polos en lazo cerrado debidos al observador de orden mínimo [los valores propios de la matriz $(\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})$].

Solución. La ecuación de error para el observador de orden mínimo se obtiene a partir de la Ecuación (10-94), que se reescribe como:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{e} \tag{10-164}$$

donde

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b$$

A partir de las Ecuaciones (10-162) y (10-163), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{BK}\begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{BK}\begin{bmatrix} x_a \\ \hdashline \tilde{\mathbf{x}}_b - \mathbf{e} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{BK}\left\{\mathbf{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline \mathbf{e} \end{bmatrix}\right\} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BK}\begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline \mathbf{e} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10-165}$$

Combinando las Ecuaciones (10-164) y (10-165) y escribiendo

$$\mathbf{K} = [K_a \,\vdots\, \mathbf{K}_b]$$

se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \tag{10-166}$$

La Ecuación (10-166) describe la dinámica del sistema de control con realimentación del estado observado con un observador de orden mínimo. La ecuación característica para este sistema es

$$\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK}_b \\ \mathbf{0} & s - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab} \end{vmatrix} = 0$$

o bien

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}|\,|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{bb} + \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab}| = 0$$

Los polos en lazo cerrado del sistema de control con realimentación del estado observado con un observador de orden mínimo consisten en los polos en lazo cerrado debidos a la asignación de polos y los polos en lazo cerrado debidos al observador de orden mínimo. (Por tanto, el diseño por asignación de polos y el diseño del observador de orden mínimo son independientes uno del otro.)

A-10-12. Sea un sistema de estado completamente controlable definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{10-167}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde $\mathbf{x}$ = vector de estado (vector de dimensión n)
u = señal de control (escalar)
y = señal de salida (escalar)
$\mathbf{A}$ = matriz de coeficientes constantes $n \times n$
$\mathbf{B}$ = matriz de coeficientes constantes $n \times 1$
$\mathbf{C}$ = matriz de coeficientes constantes $1 \times n$

Suponga que el rango de la matriz de $(n + 1) \times (n + 1)$ siguiente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

es $n + 1$. Demuestre que el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{B}}u_e \tag{10-168}$$

donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad u_e = u(t) - u(\infty)$$

es de estado completamente controlable.

Solución. Defina

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

Debido a que el sistema dado por la Ecuación (10-167) es de estado completamente controlable, el rango de la matriz $\mathbf{M}$ es n. Entonces, el rango de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

es $n + 1$. Considere la ecuación siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{AM} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{CM} & 0 \end{bmatrix} \tag{10-169}$$

Como la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

es de rango $n + 1$, el miembro izquierdo de la Ecuación (10-169) es de rango $n + 1$. Por tanto, el miembro derecho de la Ecuación (10-169) es también de rango $n + 1$. Como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{AM} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{CM} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C}[\mathbf{B} \,\vdots\, \mathbf{AB} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{AB} \,\vdots & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \vdots\, \cdots \,\vdots & \mathbf{A}^n\mathbf{B} & \vdots & \mathbf{B} \\ -\mathbf{CB} \,\vdots & -\mathbf{CAB} & \vdots\, \cdots \,\vdots & -\mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} & \vdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= [\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} \,\vdots\, \hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \hat{\mathbf{A}}^n\hat{\mathbf{B}} \,\vdots\, \hat{\mathbf{B}}] \end{aligned}$$

se encuentra que el rango de

$$[\hat{\mathbf{B}} \mid \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} \mid \hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}} \mid \cdots \mid \hat{\mathbf{A}}^n\hat{\mathbf{B}}]$$

es $n + 1$. Por tanto, el sistema definido por la Ecuación (10-168) es de estado completamente controlable.

A-10-13. Sea el sistema que se muestra en la Figura 10-49. Utilizando el método de asignación de polos con observador, diseñe un sistema regulador tal que mantenga la posición cero ($y_1 = 0$ e $y_2 = 0$) frente a la presencia de perturbaciones. Seleccione los polos en lazo cerrado deseados para la parte de la asignación de polos en las posiciones

$$s = -2 + j2\sqrt{3}, \qquad s = -2 - j2\sqrt{3}, \qquad s = -10, \qquad s = -10$$

y los polos deseados para el observador de orden mínimo en

$$s = -15, \qquad s = -16$$

Primero, determine la matriz de ganancia de realimentación de estados $\mathbf{K}$ y la matriz de ganancia del observador $\mathbf{K}_e$. A continuación obtenga la respuesta del sistema a una condición inicial arbitraria; por ejemplo,

$$y_1(0) = 0.1, \qquad y_2(0) = 0, \qquad \dot{y}_1(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = 0$$

$$e_1(0) = 0.1, \qquad e_2(0) = 0.05$$

donde e_1 y e_2 se definen por

$$e_1 = y_1 - \tilde{y}_1$$

$$e_2 = y_2 - \tilde{y}_2$$

Suponga que $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k = 36$ N/m y $b = 0,6$ N-s/m.

Solución. Las ecuaciones para el sistema son

$$m_1\ddot{y}_1 = k(y_2 - y_1) + b(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + u$$

$$m_2\ddot{y}_2 = k(y_1 - y_2) + b(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

Sustituyendo los valores numéricos dados para m_1, m_2, k y b y simplificando, se obtiene

$$\ddot{y}_1 = -36y_1 + 36y_2 - 0.6\dot{y}_1 + 0.6\dot{y}_2 + u$$

$$\ddot{y}_2 = 18y_1 - 18y_2 + 0.3\dot{y}_1 - 0.3\dot{y}_2$$

Se seleccionan las variables de estado como sigue:

$$x_1 = y_1$$

$$x_2 = y_2$$

$$x_3 = \dot{y}_1$$

$$x_4 = \dot{y}_2$$

Figura 10-49. Sistema mecánico.

Entonces, las ecuaciones en el espacio de estado son

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -36 & 36 & -0.6 & 0.6 \\ 18 & -18 & 0.3 & -0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Defina

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline -36 & 36 & -0.6 & 0.6 \\ 18 & -18 & 0.3 & -0.3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \hdashline \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} \end{array}\right], \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hdashline 1 \\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_a \\ \hdashline \mathbf{B}_b \end{array}\right]$$

La matriz de ganancia de realimentación del estado **K** y la matriz de ganancia del observador $\mathbf{K}_e$ se pueden obtener fácilmente utilizando MATLAB como sigue:

$$\mathbf{K} = [130.4444 \quad -41.5556 \quad 23.1000 \quad 15.4185]$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 14.4 & 0.6 \\ 0.3 & 15.7 \end{bmatrix}$$

(Véase el Programa 10-26 de MATLAB.)

MATLAB Programa 10-26

```
A=[0  0  1  0;0  0  0  1;–36  36  –0.6  0.6;18  –18  0.3  –0.3];
B=[0;0;1;0];
J=[–2+j*2*sqrt(3)  –2–j*2*sqrt(3)  –10  –10];
K=acker(A,B,J)

K=

   130.4444  –41.5556  23.1000  15.4185

Aab=[1  0;0  1];
Abb=[–0.6  0.6;0.3  –0.3];
L=[–15  –16];
Ke=place(Abb',Aab',L)'
place: ndigits= 15

Ke=

   14.4000  0.6000
   0.3000  15.7000
```

Respuesta a condición inicial. Ahora se va a obtener la respuesta del sistema diseñado a la condición inicial dada. Como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$u) \quad -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BK}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \tag{10-170}$$

Observe que

$$\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \hdashline \mathbf{x}_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \hdashline \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{I} \end{bmatrix}\mathbf{e} = \mathbf{Fe}$$

donde

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

La Ecuación (10-170) se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BKFe} \tag{10-171}$$

Como, a partir de la Ecuación (10-94), se tiene que

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab})\mathbf{e} \tag{10-172}$$

combinando las Ecuaciones (10-171) y (10-172) en una sola ecuación se tiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \hdashline \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BKF} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{bb} - \mathbf{K}_e\mathbf{A}_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hdashline \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

La matriz de estado es una matriz 6 × 6. La respuesta del sistema a la condición inicial dada se puede obtener fácilmente con MATLAB. (Véase el Programa 10-27 de MATLAB.) En la Figura 10-50 se muestran las curvas de respuesta resultante. Las curvas de respuesta parecen aceptables.

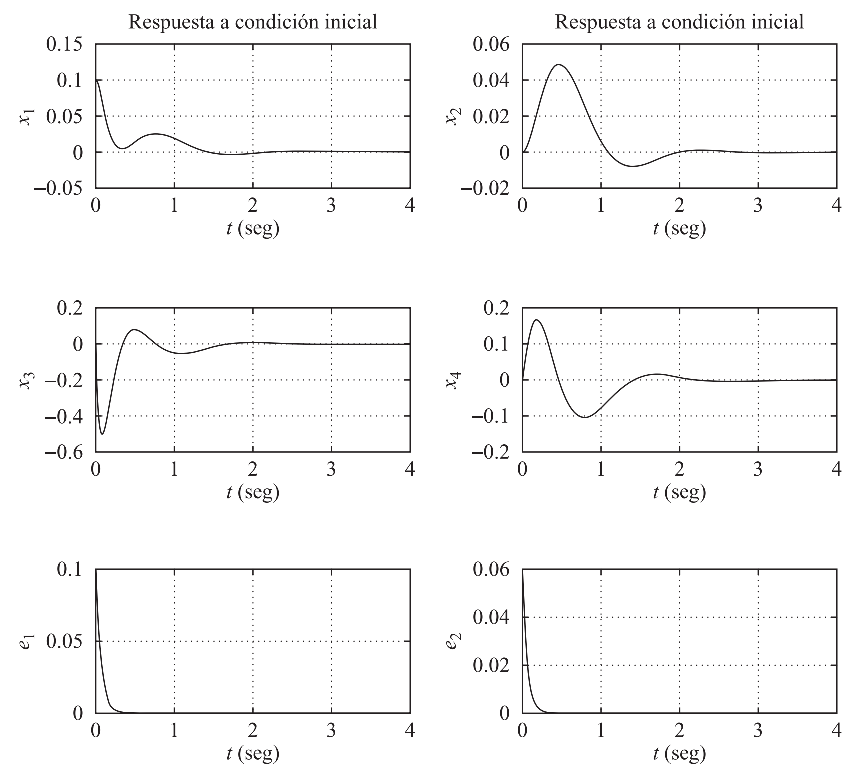


Figura 10-50. Curvas de respuesta a condición inicial.

MATLAB Programa 10-27

```
% Respuesta a condición inicial

A=[0  0  1  0;0  0  0  1;-36  36  -0.6  0.6;18  -18  0.3  -0.3];
B=[0;0;1;0];
K=[130.4444  -41.5556  23.1000  15.4185];
Ke=[14.4  0.6;0.3  15.7];
F=[0  0;0  0;1  0;0  1];
Aab=[1  0;0  1];
Abb=[-0.6  0.6;0.3  -0.3];
AA=[A-B*K  B*K*F; zeros(2,4)  Abb-Ke*Aab];
sys=ss(AA,eye(6),eye(6),eye(6));
t=0:0.01:4;
y=initial(sys,[0.1;0;0;0;0.1;0.05],t);
x1=[1  0  0  0  0  0]*y';
x2=[0  1  0  0  0  0]*y';
x3=[0  0  1  0  0  0]*y';
x4=[0  0  0  1  0  0]*y';
e1=[0  0  0  0  1  0]*y';
e2=[0  0  0  0  0  1]*y';

subplot(3,2,1); plot(t,x1); grid; title('Respuesta a condición inicial'),
xlabel('t (sec)'); ylabel('x1')
subplot(3,2,2); plot(t,x2); grid; title('Respuesta a condición inicial'),
xlabel('t (sec)'); ylabel('x2')
subplot(3,2,3); plot(t,x3); grid; xlabel('t (seg)'); ylabel('x3')
subplot(3,2,4); plot(t,x4); grid; xlabel('t (seg)'); ylabel('x4')
subplot(3,2,5); plot(t,e1); grid; xlabel('t (seg)'); ylabel('e1')
subplot(3,2,6); plot(t,e2); grid; xlabel('t (seg)'); ylabel('e2')
```

A-10-14. Sea el sistema que se muestra en la Figura 10-51. Diseñe los observadores de orden completo y de orden mínimo para la planta. Suponga que los polos en lazo cerrado deseados para la parte de asignación de polos están localizados en

$$s = -2 + j2\sqrt{3}, \qquad s = -2 - j2\sqrt{3}$$

Suponga también que los polos deseados del observador están en

(a) $s = -8$, $s = -8$ para el observador de orden completo
(b) $s = -8$ para el observador de orden mínimo

Compare las respuestas a las condiciones iniciales especificadas a continuación:

(a) para el observador de orden completo:

$$x_1(0) = 1, \qquad x_2(0) = 0, \qquad e_1(0) = 1, \qquad e_2(0) = 0$$

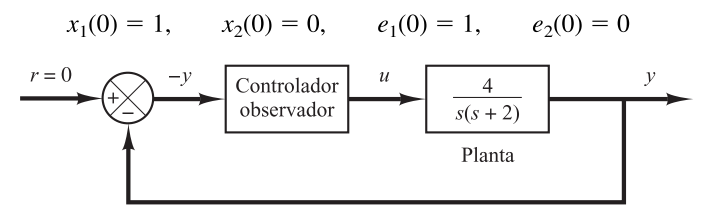


Figura 10-51. Sistema regulador.

(b) para el observador de orden mínimo:

$$x_1(0) = 1, \qquad x_2(0) = 0, \qquad e_1(0) = 1$$

También compare el ancho de banda de ambos sistemas.

Solución. En primer lugar se determina la representación en el espacio de estados del sistema. Definiendo las variables de estado x_1 y x_2 como

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{y}$$

se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para la parte de asignación de polos, se determina la matriz de ganancia de realimentación del estado **K**. Utilizando MATLAB se encuentra que **K** es

$$\mathbf{K} = [4 \quad 0.5]$$

(Véase el Programa 10-28 de MATLAB.)

A continuación se determina la matriz de ganancia del observador $\mathbf{K}_e$ para el observador de orden completo. Utilizando MATLAB se encuentra que $\mathbf{K}_e$ es

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 14 \\ 36 \end{bmatrix}$$

(Véase el Programa 10-28 de MATLAB.)

MATLAB Programa 10-28

```
% Cálculo de las matrices K y Ke.
A=[0 1;0 -2];
B=[0;4];
C=[1 0];
J=[-2+j*2*sqrt(3) -2-j*2*sqrt(3)];
L=[-8 -8];
K=acker(A,B,J)
K=
   4.0000 0.5000
Ke=acker(A',C',L)'
Ke=
   14
   36
```

Ahora se encuentra la respuesta de este sistema a la condición inicial dada. Si se tiene en cuenta la Ecuación (10-70), se tiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

Esta ecuación define la dinámica del sistema diseñado utilizando el observador de orden completo. El Programa 10-29 de MATLAB da la respuesta a la condición inicial dada. En la Figura 10-52 se muestran las curvas de respuesta resultante.

MATLAB Programa 10-29

```
% Respuesta a condición inicial ---- observador de orden completo

A=[0  1;0  -2];
B=[0;4];
C=[1  0];
K=[4  0.5];
Ke=[14;36];
AA=[A-B*K  B*K; zeros(2,2)  A-Ke*C];
sys=ss(AA, eye(4), eye(4), eye(4));
t=0:0.01:8;
x=initial(sys, [1;0;1;0],t);
x1=[1  0  0  0]*x';
x2=[0  1  0  0]*x';
e1=[0  0  1  0]*x';
e2=[0  0  0  1]*x';

subplot(2,2,1); plot(t,x1); grid
xlabel('t (seg)'); ylabel('x1')

subplot(2,2,2); plot(t,x2); grid
xlabel('t (seg)'); ylabel('x2')

subplot(2,2,3); plot(t,e1); grid
xlabel('t (seg)'); ylabel('e1')

subplot(2,2,4); plot(t,e2); grid
xlabel('t (seg)'); ylabel('e2')
```

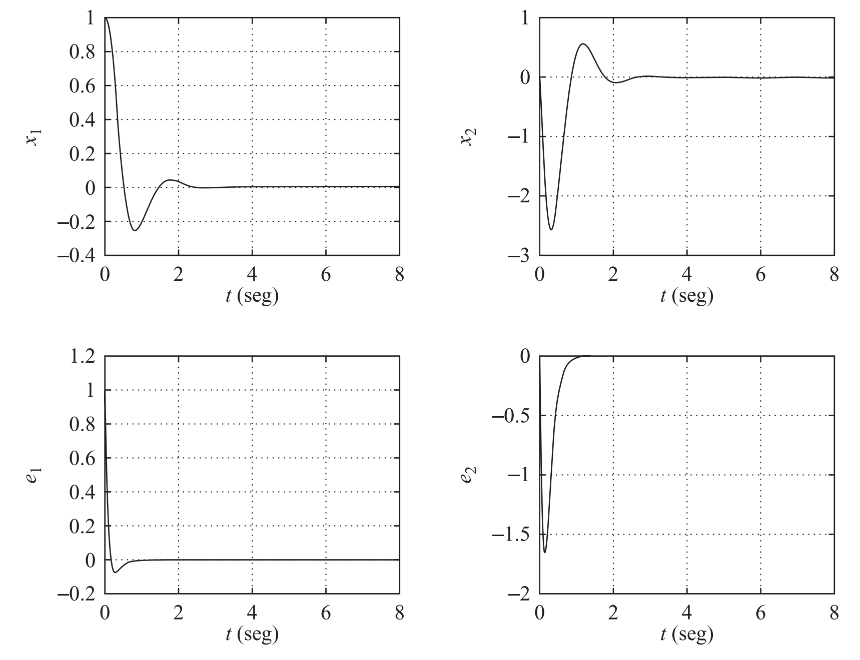


Figura 10-52. Curvas de respuesta a condición inicial.

Para obtener la función de transferencia del controlador observador, se utiliza MATLAB. El Programa 10-30 de MATLAB obtiene esta función de transferencia. El resultado es

$$\frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{74s + 256}{s^2 + 18s + 108} = \frac{74(s + 3.4595)}{(s + 9 + j5.1962)(s + 9 - j5.1962)}$$

MATLAB Programa 10-30

```
% Determinación de la función de transferencia del observador ----
% observador de orden completo

A=[0  1;0  -2];
B=[0;4];
C=[1  0];
K=[4  0.5];
Ke=[14;36];
[num,den]=ss2tf(A-Ke*C-B*K, Ke,K,0)

num=

    0  74.0000  256.0000

den=
    1  18  108
```

A continuación se obtiene la matriz de ganancia del observador K_e para el observador de orden mínimo. El Programa 10-31 de MATLAB da K_e. El resultado es

$$K_e = 6$$

MATLAB Programa 10-31

```
% Cálculo de Ke ---- observador de orden mínimo

Aab=[1];
Abb=[-2];
LL=[-8];
Ke=acker(Abb',Aab',LL)'

Ke=
   6
```

La respuesta del sistema con observador de orden mínimo para la condición inicial se puede obtener como sigue. Sustituyendo $u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$ en la ecuación de la planta dada por la Ecuación (10-79) resulta

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})$$

$$= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}[K_a \quad K_b]\begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}$$

o bien

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}K_b e$$

La ecuación de error es

$$\dot{e} = (A_{bb} - K_e A_{ab})e$$

Por tanto, la dinámica del sistema se define por

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{B}K_b \\ 0 & A_{bb} - K_e A_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ e \end{bmatrix}$$

Basado en esta última ecuación, el Programa 10-32 de MATLAB da la respuesta a la condición inicial dada. En la Figura 10-53 se muestran las curvas de respuesta resultantes.

MATLAB Programa 10-32

```
% Respuesta a condición inicial ---- observador de orden mínimo

A=[0 1;0 -2];
B=[0;4];
K=[4 0.5];
Kb=0.5;
Ke=6;
Aab=1; Abb=-2;
AA=[A-B*K B*Kb; zeros(1,2) Abb-Ke*Aab];
sys=ss(AA,eye(3),eye(3),eye(3));
t=0:0.01:8;
x=initial(sys,[1;0;1],t);
x1=[1 0 0]*x';
x2=[0 1 0]*x';
e=[0 0 1]*x';

subplot(2,2,1); plot(t,x1); grid
xlabel('t (seg)'); ylabel('x1')

subplot(2,2,2); plot(t,x2); grid
xlabel('t (seg)'); ylabel('x2')

subplot(2,2,3); plot(t,e); grid
xlabel('t (seg)'); ylabel('e')
```

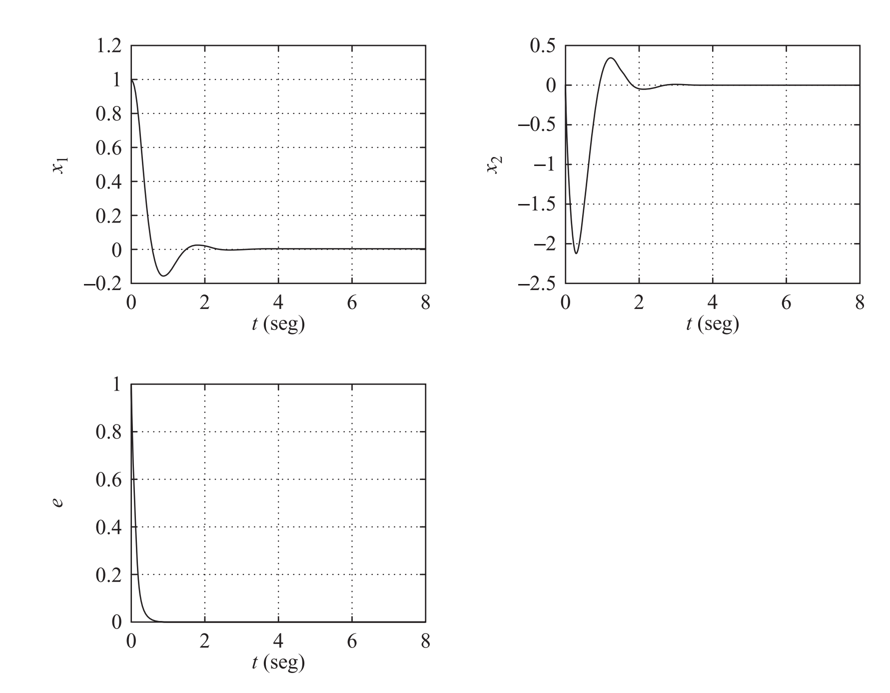


Figura 10-53. Curvas de respuesta a condición inicial.

La función de transferencia del controlador observador, cuando el sistema usa el observador de orden mínimo, se puede obtener mediante el Programa 10-33 de MATLAB. El resultado es

$$\frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{7s + 32}{s + 10} = \frac{7(s + 4.5714)}{s + 10}$$

MATLAB Programa 10-33

```
% Determinación de la función de transferencia del controlador-observador
%---- observador de orden mínimo
A=[0  1;0  -2];
B=[0;4];
Aaa=0; Aab=1; Aba=0; Abb=-2;
Ba=0; Bb=4;
Ka=4; Kb=0.5;
Ke=6;
Ahat=Abb-Ke*Aab;
Bhat=Ahat*Ke + Aba-Ke*Aaa;
Fhat=Bb-Ke*Ba;
Atilde=Ahat-Fhat*Kb;
Btilde=Bhat-Fhat*(Ka + Kb*Ke);
Ctilde=-Kb;
Dtilde=-(Ka + Kb*Ke);
[num,den]=ss2tf(Atilde, Btilde, -Ctilde, -Dtilde)

num=
   7  32

den=

   1  10
```

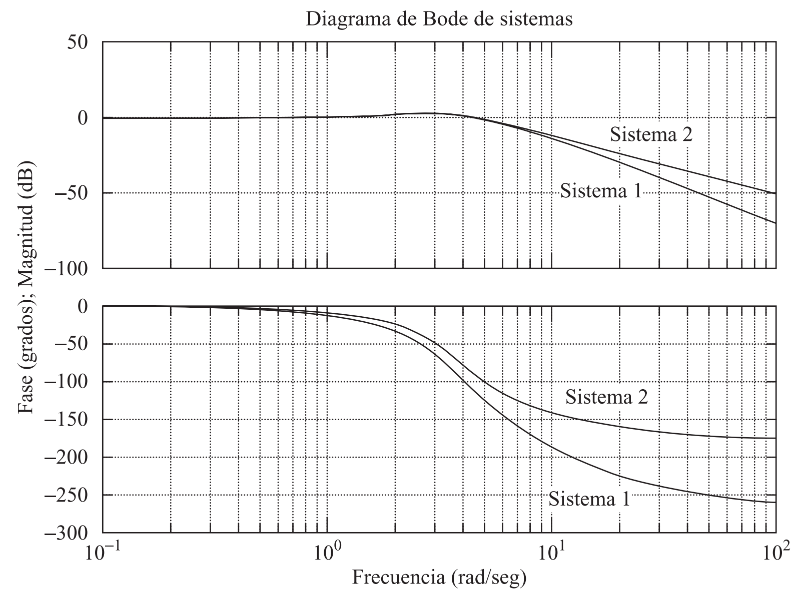


Figura 10-54. Diagrama de Bode del Sistema 1 (sistema con observador de orden completo) y del Sistema 2 (sistema con observador de orden mínimo).
Sistema 1 = $(296s + 1024)/(s^4 + 20s^3 + 144s^2 + 512s + 1024)$
Sistema 2 = $(28s + 128)/(s^3 + 12s^2 + 48s + 128)$.

El controlador observador es claramente un compensador de adelanto.

La Figura 10-54 se muestran los diagramas de Bode del Sistema 1 (sistema en lazo cerrado con observador de orden completo) y del Sistema 2 (sistema en lazo cerrado con observador de orden mínimo). Claramente el ancho de banda del Sistema 2 es mayor que el del Sistema 1. El Sistema 1 tiene una mejor característica de rechazo de ruido de alta frecuencia que el Sistema 2.

A-10-15. Sea el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

donde $\mathbf{x}$ es un vector de estado (vector de dimensión n) y $\mathbf{A}$ es una matriz de coeficientes constantes de $n \times n$. Se supone que $\mathbf{A}$ es no singular. Demuestre que si el estado de equilibrio $\mathbf{x} = 0$ del sistema es asintóticamente estable (es decir, si $\mathbf{A}$ es una matriz estable), entonces existe una matriz $\mathbf{P}$ hermítica definida positiva tal que

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

donde $\mathbf{Q}$ es una matriz hermítica definida positiva.

Solución. La ecuación diferencial matricial

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^*\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{X}(0) = \mathbf{Q}$$

tiene la solución

$$\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}$$

Integrando ambos lados de esta ecuación diferencial matricial desde $t = 0$ a $t = \infty$, se obtiene

$$\mathbf{X}(\infty) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}^*\left(\int_0^\infty \mathbf{X}\,dt\right) + \left(\int_0^\infty \mathbf{X}\,dt\right)\mathbf{A}$$

Considerando que $\mathbf{A}$ es una matriz estable y, por tanto, $\mathbf{X}(\infty) = \mathbf{0}$, se obtiene

$$-\mathbf{X}(0) = -\mathbf{Q} = \mathbf{A}^*\left(\int_0^\infty \mathbf{X}\,dt\right) + \left(\int_0^\infty \mathbf{X}\,dt\right)\mathbf{A}$$

Si se hace

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty \mathbf{X}\,dt = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\,dt$$

Observe que los elementos de $e^{\mathbf{A}t}$ son sumas finitas de términos como $e^{\lambda_i t}$, $te^{\lambda_i t}$, ..., $t^{m_i-1}e^{\lambda_i t}$, donde los λ_i son los valores propios de $\mathbf{A}$ y m_i es la multiplicidad de λ_i. Como λ_i posee partes reales negativas,

$$\int_0^\infty e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\,dt$$

existe. Observe que

$$\mathbf{P}^* = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\,dt = \mathbf{P}$$

Por tanto, $\mathbf{P}$ es hermítica (o simétrica si $\mathbf{P}$ es una matriz real). Así se demuestra que, para una matriz $\mathbf{A}$ estable y para una matriz $\mathbf{Q}$ hermítica definida positiva, existe una matriz $\mathbf{P}$ hermítica tal que $\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{PA} = -\mathbf{Q}$. Ahora se necesita demostrar que $\mathbf{P}$ es definida positiva. Considere la siguiente forma hermítica:

$$\mathbf{x}^*\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}^*\int_0^\infty e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{Q}e^{\mathbf{A}t}\,dt\,\mathbf{x}$$

$$= \int_0^\infty (e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x})^*\mathbf{Q}(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x})\,dt > 0, \qquad \text{para } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

$$= 0, \qquad \text{para } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Por tanto, $\mathbf{P}$ es definida positiva. Esto concluye la demostración.

A-10-16. Sea el sistema de control descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{10-173}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Suponiendo la ley de control lineal

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -k_1x_1 - k_2x_2 \tag{10-174}$$

determine las constantes k_1 y k_2 de modo que el índice de comportamiento siguiente se minimice:

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T\mathbf{x}\,dt$$

Considere solamente el caso en que la condición inicial es

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Seleccione la frecuencia natural no amortiguada como 2 rad/seg.

Solución. Sustituyendo la Ecuación (10-174) en la Ecuación (10-173), se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[-k_1x_1 + k_2x_2]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{10-175}$$

Así,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

La eliminación de x_2 de la Ecuación (10-175) da

$$\ddot{x}_1 + k_2\dot{x}_1 + k_1x_1 = 0$$

Como se especifica que la frecuencia natural no amortiguada es igual a 2 rad/seg, se obtiene

$$k_1 = 4$$

Por tanto,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ es una matriz estable si $k_2 > 0$. Ahora el problema es determinar el valor de k_2 de modo que el índice de comportamiento

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T\mathbf{x}\, dt = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0)$$

se minimice, donde la matriz $\mathbf{P}$ se determina a partir de la Ecuación (10-115), que se reescribe

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^*\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^*\mathbf{R}\mathbf{K})$$

Como en este sistema $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, esta última ecuación se puede simplificar a

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^*\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = -\mathbf{I} \tag{10-176}$$

Como el sistema sólo contiene vectores y matrices reales, $\mathbf{P}$ se convierte en una matriz real simétrica. En este caso, la Ecuación (10-176) se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para la matriz **P**, se obtiene

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{2k_2} + \dfrac{k_2}{8} & \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{1}{8} & \dfrac{5}{8k_2} \end{bmatrix}$$

Por tanto, el índice de comportamiento es

$$J = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0)$$

$$= [c \quad 0]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = p_{11}c^2$$

$$= \left(\frac{5}{2k_2} + \frac{k_2}{8}\right)c^2 \tag{10-177}$$

Para minimizar J, se diferencia J con respecto a k_2 y se fija $\partial J/\partial k_2$ igual a cero del modo siguiente:

$$\frac{\partial J}{\partial k_2} = \left(\frac{-5}{2k_2^2} + \frac{1}{8}\right)c^2 = 0$$

Por tanto,

$$k_2 = \sqrt{20}$$

Con este valor de k_2, se tiene que $\partial^2 J/\partial k_2^2 > 0$. Así, el valor mínimo de J se obtiene sustituyendo $k_2 = \sqrt{20}$ en la Ecuación (10-177), o bien

$$J_{\text{mín}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,c^2$$

El sistema diseñado tiene la ley de control

$$u = -4x_1 - \sqrt{20}x_2$$

Además es óptimo porque da un valor mínimo para el índice de comportamiento J bajo la condición inicial supuesta.

A-10-17. Sea el mismo sistema del péndulo invertido analizado en el Ejemplo 10-5. El sistema se muestra en la Figura 10-8, donde $M = 2$ kg, $m = 0.1$ kg y $l = 0.5$ m. En la Figura 10-9 se muestra el diagrama de bloques. Las ecuaciones del sistema están dadas por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_I\xi$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

Si se tiene en cuenta la Ecuación (10-51), la ecuación de error para el sistema se obtiene mediante

$$\dot{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} + \hat{\mathbf{B}}u_e$$

donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y la señal de control está dada por la Ecuación (10-41):

$$u_e = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e}$$

donde

$$\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \,\vdots\, -k_I] = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \,\vdots\, -k_I]$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \xi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Utilizando MATLAB, determine la matriz de ganancia de realimentación del estado $\hat{\mathbf{K}}$ tal que se minimice el índice de comportamiento J siguiente:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{e}^*\mathbf{Q}\mathbf{e} + u^*Ru)\, dt$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = 0.01$$

Obtenga la respuesta a un escalón unitario del sistema diseñado.

Solución. Un programa MATLAB para determinar $\hat{\mathbf{K}}$ se da en el Programa 10-34 de MATLAB. El resultado es

$$k_1 = -188.0799, \qquad k_2 = -37.0738, \qquad k_3 = -26.6767, \qquad k_4 = -30.5824,$$
$$k_I = -10.0000$$

MATLAB Programa 10-34

```
% Diseño del sistema de control óptimo cuadrático

A=[0  1  0  0;20.601  0  0  0;0  0  0  1;—0.4905  0  0  0];
B=[0;—1;0;0.5];
C=[0  0  1  0];
D=[0];
Ahat=[A  zeros(4,1);—C  0];
Bhat=[B;0];
Q=[100  0  0  0  0;0  1  0  0  0;0  0  1  0  0;0  0  0  1  0;0  0  0  0  1];
R=[0.01];
Khat=lqr(Ahat,Bhat,Q,R)

Khat=

   —188.0799  —37.0738  —26.6767  —30.5824  10.0000
```

Respuesta escalón unitario. Una vez determinada la matriz de ganancias de realimentación $\mathbf{K}$ y la constante de ganancia integral k_I, se puede calcular la respuesta a un escalón unitario del sistema diseñado. La ecuación del sistema es

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \qquad (10\text{-}178)$$

[Véase la Ecuación (10-35).] Como

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_I \xi$$

La Ecuación (10-178) se escribe del modo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{B}k_I \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \qquad (10\text{-}179)$$

La ecuación de salida es

$$y = [\mathbf{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{bmatrix} + [0] r$$

El programa MATLAB 10-35 da la respuesta a un escalón unitario del sistema dado por la Ecuación (10-179). En la Figura 10-55 se muestran las curvas resultantes. Se muestra la curva de respuesta $\theta[=x_1(t)]$ respecto de t, $\dot{\theta}[=x_2(t)]$ respecto de t, $y[=x_3(t)]$ respecto de t, $\dot{y}[=x_4(t)]$ respecto de t, y $\xi[=x_5(t)]$ respecto de t, donde la entrada $r(t)$ al carro es una función escalón unitario $[r(t) = 1\text{ m}]$. Todas las condiciones iniciales se fijan igual a cero. La Figura 10-48 es una versión ampliada de la posición del carro $y[=x_3(t)]$ respecto de t. El carro se mueve hacia atrás una cantidad muy pequeña durante los primeros 0.6 seg aproximadamente. (Observe que la velocidad del carro es negativa durante los primero 0.4 seg.) Esto se debe a que el sistema del péndulo invertido del carro es un sistema de fase no mínima.

Si se comparan las características de la respuesta a un escalón de este sistema con las del Ejemplo 10-5, se observa que la respuesta del sistema actual es menos oscilatoria y presenta menor sobreelongación máxima en la respuesta de la posición (x_3 respecto de t). El sistema diseñado por el método del regulador óptimo cuadrático generalmente posee tales características —menos oscilatorio y bien amortiguado.

MATLAB Programa 10-35

```
% Respuesta a un escalón unitario

A=[0  1  0  0;20.601  0  0  0;0  0  0  1;-0.4905  0  0  0];
B=[0;-1;0;0.5];
C=[0  0  1  0];
D=[0];
K=[-188.0799  -37.0738  -26.6767  -30.5824];
kI=-10.0000;
AA=[A-B*K  B*kI;  -C 0];
BB=[0;0;0;0;1];
CC=[C  0];
DD=D;
t=0:0.01:10;
[y,x,t]=step(AA,BB,CC,DD,1,t);
x1=[1  0  0  0  0]*x';
x2=[0  1  0  0  0]*x';
x3=[0  0  1  0  0]*x';
x4=[0  0  0  1  0]*x';
x5=[0  0  0  0  1]*x';

subplot(3,2,1); plot(t,x1); grid;
xlabel('t (seg)'); ylabel('x1')

subplot(3,2,2); plot(t,x2); grid;
xlabel('t (seg)'); ylabel('x2')

subplot(3,2,3); plot(t,x3); grid;
xlabel('t (seg)'); ylabel('x3')

subplot(3,2,4); plot(t,x4); grid;
xlabel('t (seg)'); ylabel('x4')

subplot(3,2,5); plot(t,x5); grid;
xlabel('t (seg)'); ylabel('x5')
```

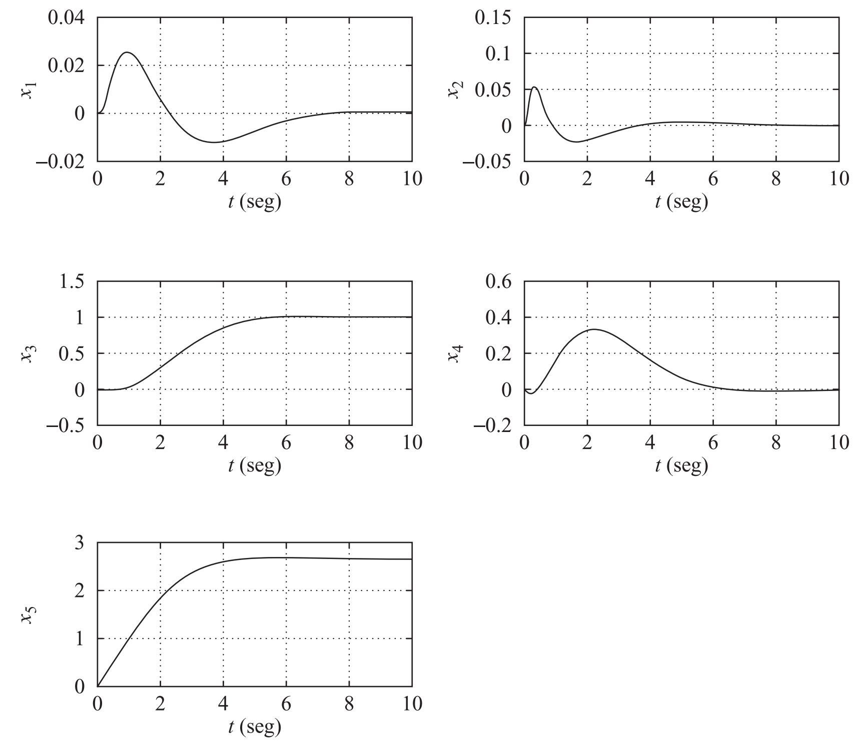


Figura 10-55. Curvas de respuesta a una entrada en escalón unitario.

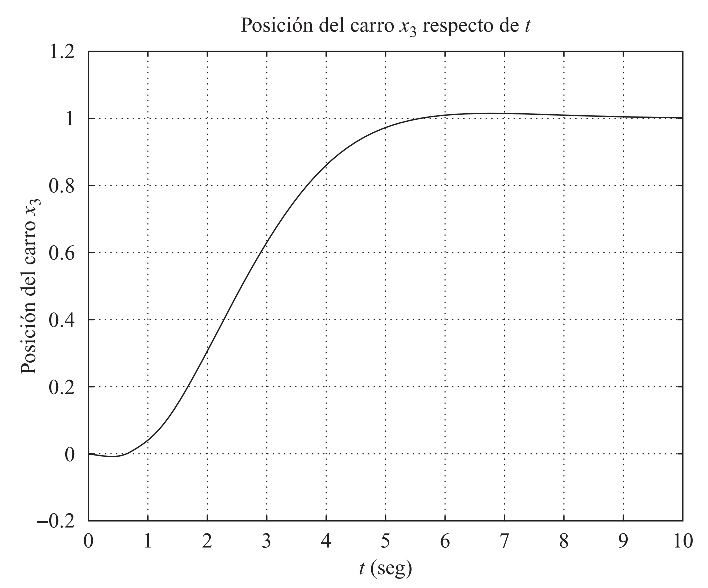


Figura 10-56. Curvas de la posición del carro respecto de t.

A-10-18. Considere la estabilidad de un sistema con incertidumbre aditiva no estructurada como se muestra en la Figura 10-57(a). Se define

$\tilde{G}$ = dinámica de la planta real

G = dinámica del modelo de la planta

Δ_a = incertidumbre aditiva no estructurada

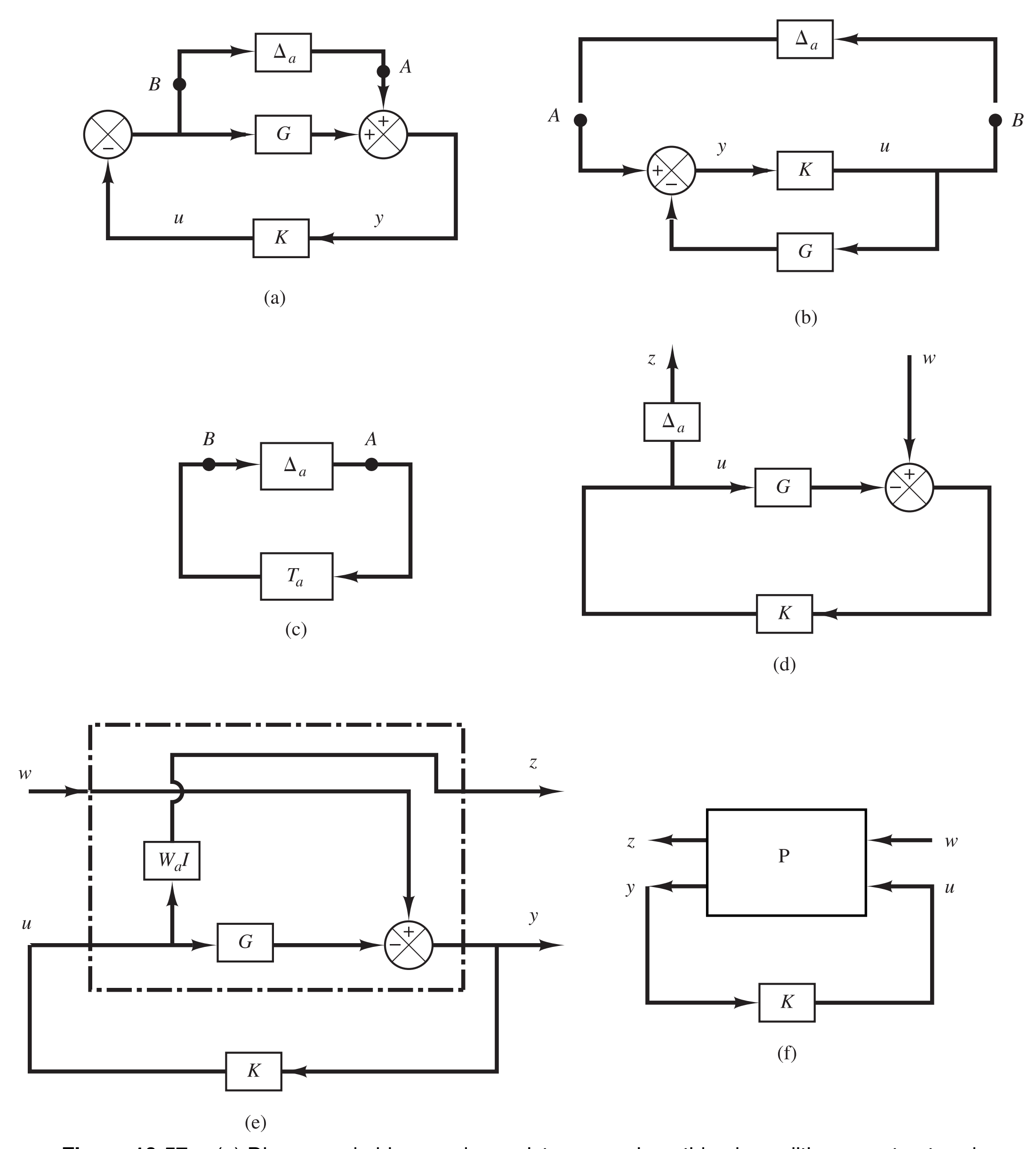


Figura 10-57. (a) Diagrama de bloques de un sistema con incertidumbre aditiva no estructurada; (b)-(d) sucesivas modificaciones del diagrama de bloques de (a); (e) diagrama de bloques mostrando una planta generalizada con incertidumbre aditiva no estructurada; (f) diagrama de planta generalizada.

Suponga que Δ_a es estable y su límite superior es conocido. Suponga también que $\tilde{G}$ y G se relacionan mediante

$$\tilde{G} = G + \Delta_a$$

Obtenga la condición que el controlador K debe de satisfacer para tener estabilidad robusta. Además, obtenga un diagrama de planta generalizado para este sistema.

Solución. En la Figura 10-57(a) se obtiene la función de transferencia entre el punto A y el punto B. A partir de la Figura 10-57(a) se obtiene la Figura 10-57(b). Entonces la función de transfrencia entre los puntos A y B se obtiene como

$$\frac{K}{1 + GK} = K(1 + GK)^{-1}$$

Se define

$$K(1 + GK)^{-1} = T_a$$

De la Figura 10-57(b) se obtiene la Figura 10-57(c). A partir del teorema de la pequeña ganancia, la condición de estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado se obtiene como

$$\|\Delta_a T_a\|_\infty < 1 \tag{10-180}$$

Como es imposible modelar Δ_a de una forma precisa, es necesario encontrar una función de transferencia escalar $W_a(j\omega)$ tal que

$$\bar{\sigma}\{\Delta_a(j\omega)\} < \|W_a(j\omega)\| \qquad \text{para todo } \omega$$

y se utiliza $W_a(j\omega)$ en lugar de Δ_a. Por tanto, la condición de estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado se puede expresar como

$$\|W_a T_a\|_\infty < 1 \tag{10-181}$$

Si la Desigualdad (10-181) se cumple, entonces es evidente que la Desigualdad (10-180) también se cumple. Por tanto, esta es la condición que garantiza la estabilidad robusta del sistema diseñado. En la Figura 10-57(e), se ha sustituido Δ_a por $W_a I$ en la Figura 10-57(d).

En resumen, si se hace que la norma H_∞ de la función de transferencia desde w a z sea menor que 1, se puede calcular el controlador K que satisface la Desigualdad (10-181).

La Figura 10-57(e) se puede volver a dibujar como muestra la Figura 10-57(f) con un diagrama de la planta generalizado para el sistema considerado.

Obsérvese que para este problema la matriz Φ que relaciona la variable controlada z y la perturbación exógena w está dada por

$$z = \Phi(s)w = (W_a T_a)w = [W_a K(I + GK)^{-1}]w$$

Observe que $u(s) = K(s)y(s)$ y teniendo en cuenta la Ecuación (10-128), $\Phi(s)$ se determina con los elementos de la matriz P como sigue:

$$\Phi(s) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$$

Para hacer igual esta $\Phi(s)$ a $W_a K(I + GK)^{-1}$, se escoge $P_{11} = 0$, $P_{12} = W_a$, $P_{21} = I$ y $P_{22} = -G$. Por tanto, la matriz P para este problema se obtiene como

$$P = \begin{bmatrix} 0 & W_a \\ I & -G \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS

B-10-1. Sea el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 0]$$

Transforme la ecuación del sistema en (a) la forma canónica controlable y (b) la forma canónica observable.

B-10-2. Sea el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 1]$$

Transforme las ecuaciones del sistema en la forma canónica observable.

B-10-3. Sea el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Usando el control mediante realimentación del estado $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, se desea tener los polos en lazo cerrado en $s = -2 \pm j4$, $s = -10$. Determine la matriz de ganancias de realimentación del estado **K**.

B-10-4. Resuelva el Problema **B-10-3** con MATLAB.

B-10-5. Sea el sistema definido mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Demuestre que este sistema no puede estabilizarse mediante el control de realimentación del estado $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, cualquiera que sea la matriz **K** que se elija.

B-10-6. Un sistema regulador tiene una planta

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Defina las variables de estado como

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \dot{x}_2$$

Usando el control mediante realimentación del estado $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, se desea colocar los polos en lazo cerrado en

$$s = -2 + j2\sqrt{3}, \qquad s = -2 - j2\sqrt{3}, \qquad s = -10$$

Determine la matriz de ganancias de realimentación del estado **K** necesaria.

B-10-7. Resuelva el Problema **B-10-6** con MATLAB.

B-10-8. Sea el servosistema de tipo 1 que se muestra en la Figura 10-58. Las matrices **A**, **B** y **C** de la Figura 10-58 vienen dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

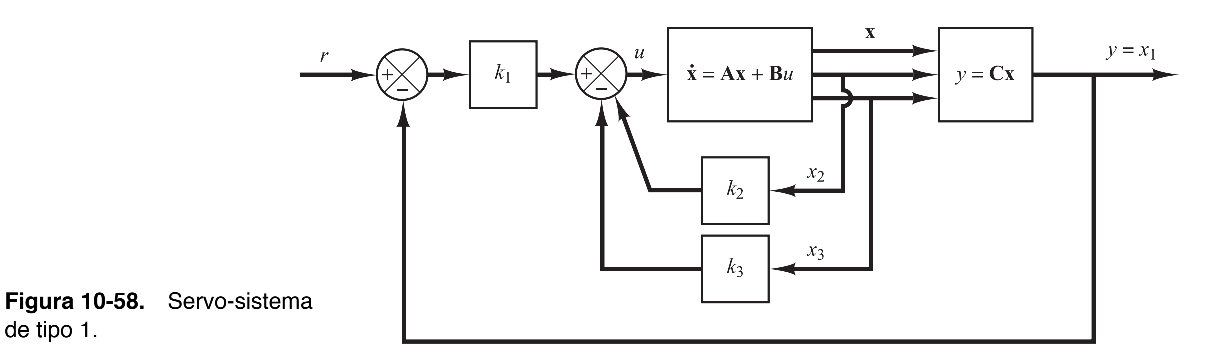


Figura 10-58. Servo-sistema de tipo 1.

Determine las constantes de las ganancias de realimentación k_1, k_2 y k_3, tales que los polos en lazo cerrado se localicen en

$$s = -2 + j4, \qquad s = -2 - j4, \qquad s = -10$$

Obtenga la respuesta a un escalón unitario y represente la curva de la salida $y(t)$ respecto de t.

B-10-9. Sea el sistema del péndulo invertido que se muestra en la Figura 10-59. Suponga que

$$M = 2 \text{ kg}, \qquad m = 0.5 \text{ kg}, \qquad l = 1 \text{ m}$$

Defina las variables de estado como

$$x_1 = \theta, \qquad x_2 = \dot{\theta}, \qquad x_3 = x, \qquad x_4 = \dot{x}$$

y las variables de salida como

$$y_1 = \theta = x_1, \qquad y_2 = x = x_3$$

Obtenga las ecuaciones en el espacio de estados para este sistema.

Se quiere tener polos en lazo cerrado en

$$s = -4 + j4, \quad s = -4 - j4, \quad s = -20, \quad s = -20$$

Determine la matriz de ganancias de realimentación del estado **K**.

Usando la matriz de ganancias de realimentación del estado **K** determinada de este modo, examine el comportamiento del sistema mediante una simulación en computador. Escriba un programa MATLAB para obtener la respuesta del sistema a una condición inicial arbitraria. Obtenga las curvas de respuesta $x_1(t)$ respecto de t, $x_2(t)$ respecto de t, $x_3(t)$ respecto de t y $x_4(t)$ respecto de t para el siguiente conjunto de condiciones iniciales:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 1 \text{ m/s}$$

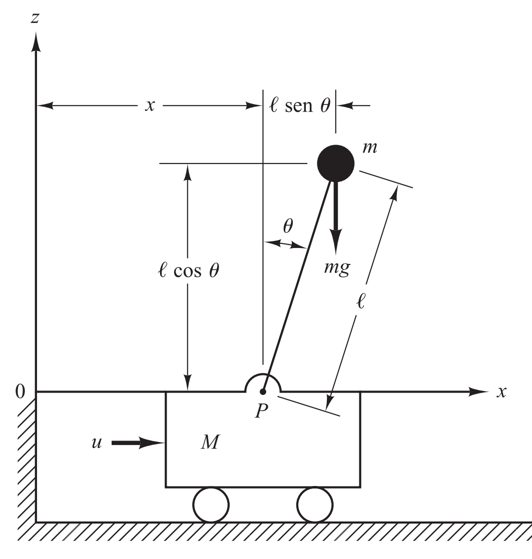


Figura 10-59. Sistema del péndulo invertido.

B-10-10. Sea el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

Diseñe un observador de estado de orden completo suponiendo que los polos deseados para el observador son $s = -5$ y $s = -5$.

B-10-11. Sea el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Diseñe un observador de estado de orden completo, suponiendo que los polos deseados para el observador son

$$s = -10, \qquad s = -10, \qquad s = -15$$

B-10-12. Sea el sistema definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1.244 & 0.3956 & -3.145 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.244 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dado el conjunto de polos deseados para el observador en

$$s = -5 + j5\sqrt{3}, \qquad s = -5 - j5\sqrt{3}, \qquad s = -10$$

diseñe un observador de estado de orden completo.

B-10-13. Sea un integrador doble definido por

$$\ddot{y} = u$$

Si se seleccionan las variables de estado como

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{y}$$

entonces la representación en el espacio de estados para el sistema es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Se desea diseñar un regulador para este sistema. Utilizando el método de asignación de polos con observador, diseñe un controlador observador.

Seleccione los polos en lazo cerrado deseados en

$$s = -0.7071 + j0.7071, \qquad s = -0.7071 - j0.7071$$

y suponiendo que se utiliza un observador de orden mínimo, escoja el polo deseado del observador en

$$s = -5$$

B-10-14. Sea el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Diseñe un sistema regulador por el método de asignación de polos con observador. Suponga que los polos en lazo cerrado deseados para la asignación de polos están en

$$s = -1 + j, \qquad s = -1 - j, \qquad s = -5$$

Los polos deseados del observador están localizados en

$$s = -6, \qquad s = -6, \qquad s = -6$$

También, obtenga la función de transferencia del controlador observador.

B-10-15. Utilizando el método de asignación de polos con observador, diseñe controladores observadores (uno con un observador de orden completo y otro con un observador de orden mínimo) para el sistema que se muestra en la Figura 10-60. Los polos en lazo cerrado para la parte de asignación de polos están en

$$s = -1 + j2, \qquad s = -1 - j2, \qquad s = -5$$

Figura 10-60. Sistema de control con controlador-observador en el camino directo.

Los polos deseados del observador están localizados en

$s = -10, \quad s = -10, \quad s = -10$ para el observador de orden completo

$s = -10, \quad s = -10$ para el observador de orden mínimo

Compare las respuestas a un escalón unitario de los sistemas diseñados. Compare también el ancho de banda de ambos sistemas.

B-10-16. Utilizando el método de asignación de polos con observador, diseñe los sistemas de control que se muestran en las Figuras 10-61(a) y (b). Suponga que los polos en lazo cerrado deseados para la asignación de polos están en

$$s = -2 + j2, \qquad s = -2 - j2$$

y los polos deseados del observador se localizan en

$$s = -8, \qquad s = -8$$

Obtenga la función de transferencia del controlador observador. Comparar las respuestas a un escalón unitario de ambos sistemas. [En el Sistema (b) determinar la constante N de forma que la salida en estado estacionario $y(\infty)$ sea la unidad cuando la entrada es un escalón unitario.]

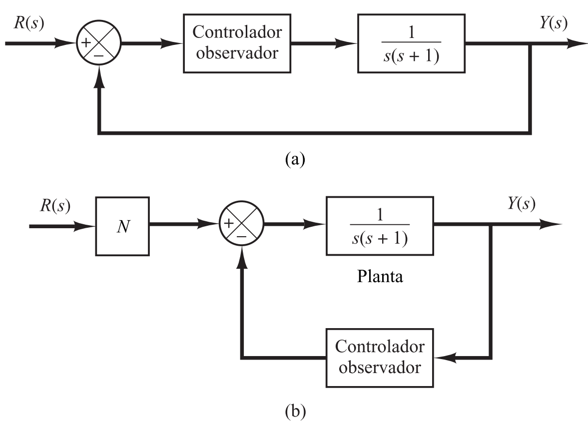


Figura 10-61. Sistemas de control con controlador-observador: (a) controlador-observador en el camino directo; (b) controlador-observador en el camino de realimentación.

B-10-17. Sea el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -a \end{bmatrix}$$

$$a = \text{parámetro ajustable} > 0$$

Determine el valor del parámetro a para minimizar el índice de comportamiento siguiente:

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T\mathbf{x}\, dt$$

Suponga que el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ está dado por

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B-10-18. Sea el sistema que se muestra en la Figura 10-62. Determine el valor de la ganancia K de modo que la razón de amortiguamiento ζ del sistema en lazo cerrado sea igual a 0.5. A continuación determine también la frecuencia natural no amortiguada ω_n del sistema en lazo cerrado. Suponiendo que $e(0) = 1$ y $\dot{e}(0) = 0$, evalúe

$$\int_0^\infty e^2(t)\, dt$$

B-10-19. Determine la señal de control óptima u para el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tal que se minimice el índice de comportamiento siguiente:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{x} + u^2)\, dt$$

B-10-20. Sea el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

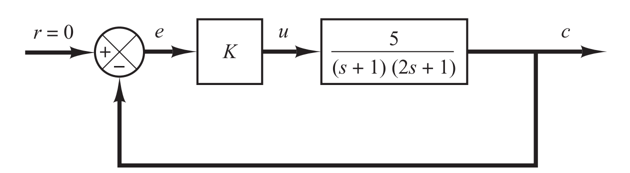


Figura 10-62. Sistema de control.

Se desea encontrar la señal de control óptima u tal que el índice de comportamiento

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + u^2)\, dt, \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

se minimice. Determine la señal óptima $u(t)$.

B-10-21. Sea el sistema del péndulo invertido que se muestra en la Figura 10-59. Se desea diseñar un sistema regulador que mantenga el péndulo invertido en una posición vertical ante la presencia de perturbaciones en términos del ángulo θ y/o velocidad angular $\dot{\theta}$. Se requiere que el sistema regulador regrese el carro a su posición de referencia al final de cada proceso de control. (No hay una entrada de referencia para el carro.)

La ecuación en el espacio de estados para el sistema está dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Se utilizará el esquema de control de realimentación del estado

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Usando MATLAB, determine la matriz de ganancias de realimentación del estado $\mathbf{K} = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3 \;\; k_4]$ tal que el siguiente índice de comportamiento J se minimice:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^*\mathbf{Q}\mathbf{x} + u^*Ru)\, dt$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = 1$$

A continuación obtenga la respuesta del sistema a la condición inicial siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Represente las curvas de respuesta θ respecto de t, $\dot{\theta}$ respecto de t, x respecto de t y $\dot{x}$ respecto de t.



Tablas de la transformada de Laplace

El Apéndice A presenta la variable compleja y la función compleja. Después se presentan las tablas de parejas de la transformada de Laplace y las propiedades de la transformada de Laplace. Finalmente, se presentan teoremas usuales de la transformada de Laplace y las transformadas de Laplace de la función pulso y de la función impulso.

Variable compleja. Un número complejo tiene una parte real y una parte imaginaria, y ambas son constantes. Si la parte real y/o la parte imaginaria son variables, el número complejo se denomina *variable compleja*. En la transformada de Laplace, se emplea la notación s como variable compleja; esto es,

$$s = \sigma + j\omega$$

donde σ es la parte real y ω es la parte imaginaria.

Función compleja. Una función compleja $G(s)$ es una función de s, que tiene una parte real y una parte imaginaria, o bien,

$$G(s) = G_x + jG_y$$

donde G_x y G_y son cantidades reales. La magnitud de $G(s)$ es $\sqrt{G_x^2 + G_y^2}$, y el ángulo θ de $G(s)$ es $\tan^{-1}(G_y/G_x)$. El ángulo se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, a partir del eje real positivo. El complejo conjugado de $G(s)$ es $\bar{G}(s) = G_x - jG_y$.

Las funciones complejas que se suelen encontrar en el análisis de los sistemas de control lineales son funciones univaluadas de s y se determinan en forma única para un determinado valor de s.

Se dice que una función compleja $G(s)$ es *analítica* en una región, si $G(s)$ y todas sus derivadas existen en esa región. La derivada de una función analítica $G(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{d}{ds}G(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{G(s + \Delta s) - G(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta s}$$

Como $\Delta s = \Delta\sigma + j\Delta\omega$, Δs se puede aproximar a cero a lo largo de un número infinito de trayectorias diferentes. Se puede demostrar, aunque no se realiza aquí, que si las derivadas tomadas a lo largo de dos trayectorias particulares, esto es, $\Delta s = \Delta\sigma$ y $\Delta s = j\Delta\omega$ son iguales, entonces la derivada es única para cualquier otra trayectoria $\Delta s = \Delta\sigma + j\Delta\omega$, y por lo tanto, la derivada existe.

Para una trayectoria determinada $\Delta s = \Delta\sigma$ (lo que significa que la trayectoria es paralela al eje real),

$$\frac{d}{ds}G(s) = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \left(\frac{\Delta G_x}{\Delta\sigma} + j\frac{\Delta G_y}{\Delta\sigma} \right) = \frac{\partial G_x}{\partial\sigma} + j\frac{\partial G_y}{\partial\sigma}$$

Para otra trayectoria determinada $\Delta s = j\Delta\omega$ (lo que significa que la trayectoria es paralela al eje imaginario),

$$\frac{d}{ds}G(s) = \lim_{j\Delta\omega \to 0} \left(\frac{\Delta G_x}{j\Delta\omega} + j\frac{\Delta G_y}{j\Delta\omega} \right) = -j\frac{\partial G_x}{\partial\omega} + \frac{\partial G_y}{\partial\omega}$$

Si estos dos valores de la derivada son iguales,

$$\frac{\partial G_x}{\partial\sigma} + j\frac{\partial G_y}{\partial\sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial\omega} - j\frac{\partial G_x}{\partial\omega}$$

o si se satisfacen las dos condiciones siguientes,

$$\frac{\partial G_x}{\partial\sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial\omega} \quad \text{y} \quad \frac{\partial G_y}{\partial\sigma} = -\frac{\partial G_x}{\partial\omega}$$

la derivada $dG(s)/ds$ se determina de forma única. Estas dos condiciones se conocen como las condiciones de Cauchy-Riemann. Si se cumplen estas condiciones, la función $G(s)$ es analítica.

Como ejemplo, considérese la siguiente $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Por lo tanto,

$$G(\sigma + j\omega) = \frac{1}{\sigma + j\omega + 1} = G_x + jG_y$$

donde

$$G_x = \frac{\sigma + 1}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} \quad \text{y} \quad G_y = \frac{-\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}$$

Se puede apreciar que, excepto en $s = -1$ (esto es, $\sigma = -1$, $\omega = 0$), $G(s)$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} = \frac{\omega^2 - (\sigma + 1)^2}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2}$$

$$\frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_x}{\partial \omega} = \frac{2\omega(\sigma + 1)}{[(\sigma + 1)^2 + \omega^2]^2}$$

Por tanto, $G(s) = 1/(s + 1)$ es analítica en todo el plano s, excepto en $s = -1$, y la derivada $dG(s)/ds$, excepto en $s = 1$, es:

$$\frac{d}{ds} G(s) = \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j\frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} - j\frac{\partial G_x}{d\omega}$$

$$= -\frac{1}{(\sigma + j\omega + 1)^2} = -\frac{1}{(s + 1)^2}$$

Obsérvese que la derivada de una función analítica se obtiene simplemente diferenciando $G(s)$ con respecto a s. En este ejemplo,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s + 1}\right) = -\frac{1}{(s + 1)^2}$$

Los puntos en el plano s en los cuales la función $G(s)$ es analítica se denominan puntos *ordinarios*, mientras que los puntos del plano s en los cuales la función $G(s)$ no es analítica se denominan puntos *singulares*. Los puntos singulares en los cuales la función $G(s)$ o sus derivadas tienden a infinito se denominan polos. Los puntos singulares en los que la función $G(s)$ es igual a cero se denominan *ceros*.

Si $G(s)$ tiende a infinito conforme s se aproxima a $-p$ y si la función:

$$G(s)(s + p)^n, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

tiene un valor finito diferente de cero en $s = -p$, entonces $s = -p$ se denomina polo de orden n. Si $n = 1$, el polo se designa polo simple. Si $n = 2, 3, \ldots$, el polo es un polo de segundo orden, polo de tercer orden, etc.

Como ejemplo, se considera la función compleja

$$G(s) = \frac{K(s + 2)(s + 10)}{s(s + 1)(s + 5)(s + 15)^2}$$

$G(s)$ tiene ceros en $s = -2$, $s = -10$, polos simples en $s = 0$, $s = -1$, $s = -5$, y un polo doble (polo múltiple de orden 2) en $s = -15$. Se observa que $G(s)$ se vuelve cero en $s = \infty$. Como, para valores grandes de s,

$$G(s) \div \frac{K}{s^3}$$

$G(s)$ posee un cero triple (cero múltiple de orden 3) en $s = \infty$. Si se incluyen puntos en infinito, $G(s)$ tiene el mismo número de polos que de ceros. En resumen, $G(s)$ tiene cinco ceros ($s = -2$, $s = -10$, $s = \infty$, $s = \infty$, $s = \infty$) y cinco polos ($s = 0$, $s = -1$, $s = -5$, $s = -15$, $s = -15$).

Transformada de Laplace. Sean

$f(t)$ = una función del tiempo t tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$

s = una variable compleja

$\mathscr{L}$ = un símbolo operativo que indica que la cantidad a la que antecede se va a transformar mediante la integral de Laplace $\int_0^\infty e^{-st}\,dt$

$F(s)$ = transformada de Laplace de $f(t)$

Entonces la transformada de Laplace de $f(t)$ se obtiene mediante

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

El proceso inverso de encontrar la función del tiempo $f(t)$ a partir de la transformada de Laplace $F(s)$ se denomina *transformada inversa de Laplace*. La notación para la transformada inversa de Laplace es $\mathscr{L}^{-1}$ se encuentra a partir de $F(s)$ mediante la siguiente integral de inversión:

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds, \quad \text{para } t > 0$$

donde c, la abscisa de convergencia, es una constante real que se eligió más grande que las partes reales para todos los puntos singulares de $F(s)$. Por tanto, la trayectoria de integración es paralela al eje $j\omega$ y se desplaza una cantidad c a partir de él. Esta trayectoria de integración va hacia la derecha de todos los puntos singulares.

Parece complicado evaluar la integral de inversión. En la práctica, rara vez se emplea esta integral para encontrar $f(t)$. Normalmente se utiliza el método de expansión en fracciones simples dado en el Apéndice B.

En lo que sigue, en la Tabla A-1 se presentan las parejas de transformadas de Laplace de las funciones más comunes, y en la Tabla A-2, se presentan las propiedades de las transformadas de Laplace.

Tabla A-1. Parejas de la transformada de Laplace.

	$f(t)$	$F(s)$
1	Unidad de impulso $\delta(t)$	1
2	Unidad de paso $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	sen ωt	$\frac{\omega}{\mathrm{s}^2 + \omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	senh ωt	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega 2}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at)}$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

(*continúa*)

Tabla A-1. (*Continuación*).

	$f(t)$	$F(s)$
18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at} \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
21	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t \quad (0 < \zeta < 1)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1,\ 0 < \phi < \pi/2)$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
24	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen} (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0 < \zeta < 1,\ 0 < \phi < \pi/2)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$
25	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
26	$\omega t - \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$
27	$\operatorname{sen} \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega} t \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
29	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
30	$\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \quad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
31	$\frac{1}{2\omega} (\operatorname{sen} \omega t + \omega t \cos \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

Tabla A-2. Propiedades de la transformada de Laplace.

1	$\mathscr{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathscr{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathscr{L}_{\pm}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0\pm)$
4	$\mathscr{L}_{\pm}\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0\pm) - \dot{f}(0\pm)$
5	$\mathscr{L}_{\pm}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \overset{(k-1)}{f}(0\pm)$ donde $\overset{(k-1)}{f(t)} = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)$
6	$\mathscr{L}_{\pm}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=0\pm}$
7	$\mathscr{L}_{\pm\ \pm}\left[\int \cdots \int f(t)\,(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s^{n-k+1}}\left[\int \cdots \int f(t)\,(dt)^k\right]_{t=0\pm}$
8	$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
9	$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{s \to 0} F(s)$ si $\int_0^\infty f(t)\,dt$ salidas
10	$\mathscr{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s + a)$
11	$\mathscr{L}[f(t - \alpha)1(t - \alpha)] = e^{-\alpha s} F(s) \quad a \geqslant 0$
12	$\mathscr{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$
13	$\mathscr{L}[t^2 f(t)] = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$
14	$\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad (n = 1, 2, 3, ...)$
15	$\mathscr{L}\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds$ si $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} f(t)$ salidas
16	$\mathscr{L}\left[f\left(\frac{1}{a}\right)\right] = aF(as)$
17	$\mathscr{L}\left[\int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau)\,d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$
18	$\mathscr{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c - j\omega}^{c + j\infty} F(p)G(s - p)\,dp$

Por último se presentan dos teoremas frecuentemente utilizados junto con las transformadas de Laplace de la función pulso y de la función impulso.

Teorema de valor inicial	$f(0+) = \lim\limits_{t \to 0+} f(t) = \lim\limits_{s \to \infty} sF(s)$
Teorema de valor final	$f(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{s \to 0} sF(s)$
Función pulso $f(t) = \frac{A}{t_0} 1(t) - \frac{A}{t_0} 1(t - t_0)$	$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{A}{t_0 s} - \frac{A}{t_0 s} e^{-st_0}$
Función impulso $g(t) = \lim\limits_{t_0 \to 0} \frac{A}{t_0}, \quad \text{para } 0 < t < t_0$ $= 0, \quad \text{para } t < 0, t_0 < t$	$\mathscr{L}[g(t)] = \lim\limits_{t_0 \to 0} \left[\frac{A}{t_0 s} (1 - e^{-st_0}) \right]$ $= \lim\limits_{t_0 \to 0} \frac{\frac{d}{dt_0}[A(1 - e^{-st_0})]}{\frac{d}{dt_0}(t_0 s)}$ $= \frac{As}{s} = A$



Método de desarrollo en fracciones simples

Antes de presentar la aproximación de MATLAB para el cálculo de desarrollos en fracciones simples de funciones de transferencia, se presenta la aproximación manual para calcular desarrollos en fracciones simples de funciones de transferencia.

Desarrollo en fracciones simples cuando *F*(*s*) sólo contiene polos distintos. Considérese $F(s)$ escrita en la forma factorizada

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_n)}, \qquad \text{para } m < n$$

donde $p_1, p_2, ..., p_n$ y $z_1, z_2, ..., z_m$ son cantidades reales o complejas, pero para cada p_i o z_j complejo se tendrá el complejo conjugado de p_i o z_j, respectivamente. Si $F(s)$ sólo involucra polos distintos, puede expandirse en una suma de fracciones simples del modo siguiente:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} \tag{B-1}$$

donde a_k ($k = 1, 2, ..., n$) son constantes. El coeficiente a_k se denomina *residuo* del polo en $s = -p_k$. El valor de a_k se calcula multiplicando ambos miembros de la Ecuación (B-1) por $(s + p_k)$ y suponiendo que $s = -p_k$; esto conduce a

$$\left[(s + p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k} = \left[\frac{a_1}{s + p_1}(s + p_k) + \frac{a_2}{s + p_2}(s + p_k) + \cdots + \frac{a_k}{s + p_k}(s + p_k) + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n}(s + p_k)\right]_{s=-p_k}$$

$$= a_k$$

Se observa que todos los términos expandidos se cancelan, con excepción de a_k. Por tanto, el residuo a_k se calcula a partir de

$$a_k = \left[(s + p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}$$

Obsérvese que, como $f(t)$ es una función real del tiempo, si p_1 y p_2 son complejos conjugados, en tal caso los residuos a_1 y a_2 también son complejos conjugados. Sólo necesita evaluarse uno de los conjugados, a_1 o a_2, porque el otro se conoce automáticamente.

Como

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_k}{s + p_k}\right] = a_k e^{-p_k t}$$

$f(t)$ se obtiene así:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0$$

EJEMPLO B-1 Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

El desarrollo en fracciones simples de $F(s)$ es

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{a_1}{s + 1} + \frac{a_2}{s + 2}$$

donde a_1 y a_2 se encuentran mediante

$$a_1 = \left[(s + 1)\frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}\right]_{s=-1} = \left[\frac{s + 3}{s + 2}\right]_{s=-1} = 2$$

$$a_2 = \left[(s + 2)\frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}\right]_{s=-2} = \left[\frac{s + 3}{s + 1}\right]_{s=-2} = -1$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s + 1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s + 2}\right] \\ &= 2e^{-t} - e^{-2t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \end{aligned}$$

EJEMPLO B-2 Obtenga la transformada inversa de Laplace de

$$G(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s + 1)(s + 2)}$$

Aquí, como el grado del polinomio del numerador es mayor que el polinomio del denominador, se debe dividir el numerador entre el denominador.

$$G(s) = s + 2 + \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

Observe que la transformada de Laplace de la función impulso $\delta(t)$ es 1 y que la transfomada de Laplace de $d\delta(t)/dt$ es s. El tercer término del lado derecho de esta última ecuación es $F(s)$ en el Ejemplo B-1. Por tanto, la transformada inversa de Laplace de $G(s)$ se obtiene como

$$g(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0-$$

EJEMPLO B-3 Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5}$$

Observe que el polinomio del denominador se puede factorizar como

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1 + j2)(s + 1 - j2)$$

Si la función $F(s)$ contiene un par de polos complejos conjugados, es conveniente no expandir $F(s)$ en las fracciones simples usuales, sino en la suma de una función seno amortiguada y una función coseno amortiguada.

Observando que $s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 2^2$ y utilizando las transformadas de Laplace de $e^{-\alpha t}\,\text{sen}\,\omega t$ y $e^{-\alpha t}\cos\omega t$, reescritas por tanto,

$$\mathscr{L}[e^{-\alpha t}\,\text{sen}\,\omega t] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathscr{L}[e^{-\alpha t}\cos\omega t] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

la $F(s)$ dada se escribe como una suma de una función seno amortiguada y una función coseno amortiguada.

$$F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5} = \frac{10 + 2(s + 1)}{(s + 1)^2 + 2^2}$$

$$= 5\,\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2} + 2\,\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathscr{L}^{-1}[F(s)] \\ &= 5\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] + 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2}\right] \\ &= 5e^{-t}\,\text{sen}\,2t + 2e^{-t}\cos 2t, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \end{aligned}$$

Desarrollo en fracciones simples cuando *F*(*s*) contiene polos múltiples. En lugar de analizar el caso general, se utilizará un ejemplo para mostrar cómo obtener el desarrollo en fracciones simples de $F(s)$.

Considérese la siguiente $F(s)$:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

El desarrollo en fracciones simples de esta $F(s)$ contiene tres términos:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1}{s + 1} + \frac{b_2}{(s + 1)^2} + \frac{b_3}{(s + 1)^3}$$

donde b_3, b_2 y b_1 se determinan del modo siguiente. Si se multiplican ambos miembros de esta última ecuación por $(s+1)^3$, se tiene que

$$(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)} = b_1(s+1)^2 + b_2(s+1) + b_3 \tag{B-2}$$

Por tanto, si se supone que $s = -1$, la Ecuación (B-2) da por resultado:

$$\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = b_3$$

Asimismo, la diferenciación de ambos miembros de la Ecuación (B-2) con respecto a s da

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right] = b_2 + 2b_1(s+1) \tag{B-3}$$

Si se supone que $s = -1$ en la Ecuación (B-3), entonces,

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = b_2$$

Diferenciando ambos miembros de la Ecuación (B-3) con respecto a s, resulta

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right] = 2b_1$$

A partir del análisis precedente, se observa que los valores de b_3, b_2 y b_1 se encuentran sistemáticamente del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
b_3 &= \left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} \\
&= (s^2 + 2s + 3)_{s=-1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \left\{\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-1} \\
&= \left[\frac{d}{ds}(s^2 + 2s + 3)\right]_{s=-1} \\
&= (2s+2)_{s=-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-1} \\
&= \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{ds^2}(s^2 + 2s + 3)\right]_{s=-1} \\
&= \frac{1}{2}(2) = 1
\end{aligned}$$

Por tanto, se obtiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0}{(s+1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right] \\ &= e^{-t} + 0 + t^2e^{-t} \\ &= (1+t^2)e^{-t}, \qquad \text{para } t \geqslant 0 \end{aligned}$$

Comentarios. Para funciones complicadas con denominadores que contienen polinomios de orden superior, un desarrollo en fracciones simples puede llevar mucho tiempo. En tal caso, se recomienda el uso de MATLAB.

Desarrollo en fracciones simples con MATLAB. MATLAB tiene una orden para obtener el desarrollo en fracciones simples de $B(s)/A(s)$ Considérese la función de transferencia $B(s)/A(s)$:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

donde algunos a_i y b_j pueden ser cero. En MATLAB, los vectores fila num y den especifican los coeficientes del numerador y del denominador en la función de transferencia. Es decir,

```
num = [b0 b1 ... bn]
den = [1 a1 ... an]
```

El comando

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

encuentra los residuos (`r`), los polos (`p`) y los términos directos (`k`) de una desarrollo en fracciones simples del cociente de dos polinomios $B(s)$ y $A(s)$.

El desarrollo en fracciones simples de $B(s)/A(s)$ se obtiene mediante

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r(1)}{s-p(1)} + \frac{r(2)}{s-p(2)} + \cdots + \frac{r(n)}{s-p(n)} + k(s) \tag{B-4}$$

Comparando las Ecuaciones (B-1) y (B-4), se observa que $p(1) = -p_1$, $p(2) = -p_2$, ..., $p(n) = -p_n$; $r(1) = a_1$, $r(2) = a_2$, ..., $r(n) = a_n$. [$k(s)$ es un término directo.]

EJEMPLO B-4 Considere la siguiente función de transferencia:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Para esta función,

```
num=[2 5 3 6]

den=[1 6 11 6]
```

La orden

```
[r,p,k]=residue(num,den)
```

proporciona el resultado siguiente:

```
[r,p,k]=residue(num,den)
r=

   -6.0000
   -4.0000
    3.0000

p=

   -3.0000
   -2.0000
   -1.0000

k=
   2
```

(Observe que los residuos se devuelven en el vector columna r, las posiciones de los polos en el vector columna p y el término directo en el vector fila k). Esta es la representación en MATLAB del siguiente desarrollo en fracciones simples de $B(s)/A(s)$:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$= \frac{-6}{s+3} + \frac{-4}{s+2} + \frac{3}{s+1} + 2$$

Observe que si $p(j) = p(j+1) = \cdots = p(j+m-1)$ [esto es, $p_j = p_{j+1} = \cdots = p_{j+m-1}$], el polo $p(j)$ es un polo de multiplicidad m. En este caso, el desarrollo incluye términos en la forma

$$\frac{r(j)}{s - p(j)} + \frac{r(j+1)}{[s - p(j)]^2} + \cdots + \frac{r(j+m-1)}{[s - p(j)]^m}$$

Consúltense los detalles en el Ejemplo B-5.

EJEMPLO B-5 Obtenga el desarrollo $B(s)/A(s)$ siguiente en fracciones simples utilizando MATLAB.

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

Para esta función, se tiene

```
num = [1 2 3]
den = [1 3 3 1]
```

La orden

```
[r,p,k] = residue(num,den)
```

proporciona el resultado siguiente:

```
num = [1 2 3];
den = [1 3 3 1];
[r,p,k] = residue(num,den)
r =

    1.0000
    0.0000
    2.0000

p =

   -1.0000
   -1.0000
   -1.0000

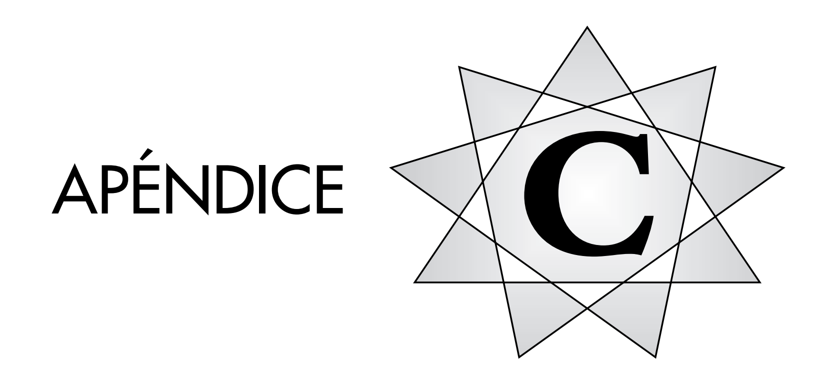
k =

   []
```

Es la representación en MATLAB del desarrollo en fracciones simples de $B(s)/A(s)$:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s+1} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

Observe que el término directo `k` es cero.



Álgebra vectorial-matricial

En este apéndice se revisa en primer lugar el determinante de una matriz, después se define el adjunto de una matriz, la inversa de una matriz y la derivada e integral de una matriz.

Determinante de una matriz. Para cada matriz cuadrada, existe un determinante. El determinante de una matriz cuadrada **A** normalmente se denota como $|\mathbf{A}|$ o det **A**. El determinante tiene las siguientes propiedades:

1. Si se intercambian cualesquiera dos filas o columnas consecutivas, el determinante cambia de signo.
2. Si cualquier fila o columna está formada sólo por ceros, entonces el valor del determinante es cero.
3. Si los elementos de cualquier fila (o cualquier columna) son exactamente k veces los de otra fila (u otra columna), entonces el valor del determinante es cero.
4. Si se suma, a cualquier fila (o cualquier columna), cualquier número constante de veces otra fila (o columna), el valor del determinante no cambia.
5. Si un determinante se multiplica por una constante, entonces únicamente una fila (o una columna) se multiplica por dicha constante. Sin embargo, obsérvese, que el determinante de k veces una matriz $n \times n$ **A** es k^n veces el determinante de **A**, o bien

$$|k\mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|$$

Esto es porque

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{bmatrix}$$

6. El determinante del producto de dos matrices cuadradas **A** y **B** es el producto de los determinantes, o bien

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$$

Si $\mathbf{B}$ = matriz $n \times m$ y $\mathbf{C}$ = matriz $m \times n$, entonces

$$\det(\mathbf{I}_n + \mathbf{BC}) = \det(\mathbf{I}_m + \mathbf{CB})$$

Si $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{D}$ = matriz $m \times m$, entonces

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{S}$$

donde $\mathbf{S} = \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}$.

Si $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$, entonces

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det \mathbf{D} \cdot \det \mathbf{T}$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C}$.

Si $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, entonces

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{D}$$

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{D}$$

Rango de una matriz. Se dice que una matriz **A** tiene rango m si existe una submatriz **M** de orden $m \times m$ de **A** tal que el determinante de **M** es distinto de cero y el determinante de cada submatriz $r \times r$ (donde $r \geqslant m + 1$) de **A** es cero.

Como ejemplo, considere la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe que $|\mathbf{A}| = 0$. Una de las submatrices más grandes cuyo determinante es distinto de cero es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el rango de la matriz **A** es 3.

Menor M_{ij}. Si se eliminan la fila i-ésima y la columna j-ésima de una matriz **A** $n \times n$, la matriz resultante es una matriz $(n-1) \times (n-1)$. El determinante de esta matriz $(n-1) \times (n-1)$ se denomina menor M_{ij} de la matriz **A**.

Cofactor A_{ij}. El cofactor A_{ij} de un elemento a_{ij} de una matriz **A** $n \times n$ se define mediante la ecuación

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Esto es, el cofactor A_{ij} del elemento a_{ij} es $(-1)^{i+j}$ veces el determinante de la matriz que se obtiene eliminando la i-ésima fila y la j-ésima columna de **A**. Obsérvese que el cofactor A_{ij} del elemento a_{ij} es el coeficiente del término a_{ij} en la expansión del determinante $|\mathbf{A}|$, puesto que se puede mostrar que

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = |\mathbf{A}|$$

Si $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ se sustituyen por $a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn}$, entonces

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0 \qquad i \neq j$$

porque el determinante de **A** en este caso posee dos filas idénticas. Por lo tanto, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik} = \delta_{ji}|\mathbf{A}|$$

Análogamente,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \delta_{ij}|\mathbf{A}|$$

Matriz adjunta. La matriz **B** cuyo elemento en la i-ésima fila y la j-ésima columna es igual a A_{ji} se denomina adjunta de **A** y se denota por adj **A**, o bien

$$\mathbf{B} = (b_{ij}) = (A_{ji}) = \text{adj}\,\mathbf{A}$$

Esto es, la adjunta de **A** es la transposición de la matriz cuyos elementos son los cofactores de **A**, o bien

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

Obsérvese que el elemento de la j-ésima fila y la i-ésima columna del producto $\mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A})$ es

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{ik} = \delta_{ji} |\mathbf{A}|$$

Por lo tanto, $\mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A})$ es una matriz diagonal con los elementos de la diagonal igual a $|\mathbf{A}|$, o bien

$$\mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) = |\mathbf{A}| \mathbf{I}$$

Análogamente, el elemento de la j-ésima fila y la i-ésima columna del producto $(\text{adj } \mathbf{A}) \mathbf{A}$ es

$$\sum_{k=1}^{n} b_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} A_{kj} a_{ki} = \delta_{ij} |\mathbf{A}|$$

Por lo tanto, se tiene la relación

$$\mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) = (\text{adj } \mathbf{A})\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{I} \tag{C-1}$$

Así

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|\mathbf{A}|} & \frac{A_{21}}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|\mathbf{A}|} \\ \frac{A_{12}}{|\mathbf{A}|} & \frac{A_{22}}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|\mathbf{A}|} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|\mathbf{A}|} & \frac{A_{2n}}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|\mathbf{A}|} \end{bmatrix}$$

donde A_{ij} es el cofactor de a_{ij} de la matriz $\mathbf{A}$. Así, los términos en la i-ésima columna de $\mathbf{A}^{-1}$ son $1/|\mathbf{A}|$ veces los cofactores de la i-ésima fila de la matriz original $\mathbf{A}$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

entonces la matriz adjunta de $\mathbf{A}$ en el determinante $|\mathbf{A}|$ son respectivamente

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 7 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

y

$$|\mathbf{A}| = 17$$

De ahí, la inversa de **A** es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & \frac{6}{17} & -\frac{4}{17} \\ \frac{7}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{2}{17} & -\frac{7}{17} \end{bmatrix}$$

En lo que sigue, se presentan fórmulas para obtener las matrices inversas para una matriz 2×2 y una matriz 3×3. Para la matriz 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{donde } ad - bc \neq 0$$

la matriz inversa está dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Para la matriz 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \text{donde } |\mathbf{A}| \neq 0$$

la matriz inversa está dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Obsérvese que

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}')^{-1}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}$$

Existen muchas otras fórmulas disponibles. Supóngase que $\mathbf{A}$ = matriz $n \times n$, $\mathbf{B}$ = matriz $n \times m$, $\mathbf{C}$ = matriz $m \times n$ y $\mathbf{D}$ = matriz $m \times m$. Entonces

$$[\mathbf{A} + \mathbf{BC}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}[\mathbf{I}_m + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{CA}^{-1}$$

Si $|\mathbf{A}| \neq 0$ y $|\mathbf{D}| \neq 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & 0 \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}$$

Si $|\mathbf{A}| \neq 0$, $\mathbf{S} = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. $|\mathbf{S}| \neq 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1} \\ -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{S}^{-1} \end{bmatrix}$$

Si $|\mathbf{D}| \neq 0$, $\mathbf{T} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$, y $|\mathbf{T}| \neq 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} & -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}$$

Por último, se presenta la forma en que MATLAB obtiene la inversa de una matriz cuadrada. Si todos los elementos de la matriz se dan como valores numéricos, este método es el mejor.

Método de MATLAB para obtener la inversa de una matriz cuadrada. La inversa de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ se puede obtener utilizando la orden

```
inv(A)
```

Por ejemplo, si la matriz $\mathbf{A}$ está dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

entonces la matriz inversa de $\mathbf{A}$ se obtiene mediante:

```
A=[1  1  2;3  4  0;1  2  5];
inv(A)
ans=

    2.2222  -0.1111  -0.8889
   -1.6667   0.3333   0.6667
    0.2222  -0.1111   0.1111
```

Esto es

$$
\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.2222 & -0.1111 & -0.8889 \\ -1.6667 & 0.3333 & 0.6667 \\ 0.2222 & -0.1111 & 0.1111 \end{bmatrix}
$$

MATLAB es sensible a mayúsculas. Es importante observar que MATLAB es sensible a mayúsculas. Esto es, MATLAB distingue entre letras mayúsculas y minúsculas. Así `x` y `X` no son la misma variable. Todos los nombres de función deben estar en letras minúscula, tales como `inv(A)`, `eig(A)` y `poly(A)`.

Diferenciación e integración de matrices. La derivada de una matriz $n \times m$ $\mathbf{A}(t)$ se define como una matriz $n \times m$, en el que cada elemento es la derivada del correspondiente elemento de la matriz original, supuesto que todos los elementos $a_{ij}(t)$ tienen derivadas respecto de t. Esto es.

$$
\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) = \left(\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}a_{11}(t) & \frac{d}{dt}a_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1m}(t) \\ \frac{d}{dt}a_{21}(t) & \frac{d}{dt}a_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dt}a_{n1}(t) & \frac{d}{dt}a_{n2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nm}(t) \end{bmatrix}
$$

Análogamente, la integral de una matriz $n \times m$ $\mathbf{A}(t)$ se define mediante

$$
\int \mathbf{A}(t)\,dt = \left(\int a_{ij}(t)\,dt\right) = \begin{bmatrix} \int a_{11}(t)\,dt & \int a_{12}(t)\,dt & \cdots & \int a_{1m}(t)\,dt \\ \int a_{21}(t)\,dt & \int a_{22}(t)\,dt & \cdots & \int a_{2m}(t)\,dt \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int a_{n1}(t)\,dt & \int a_{n2}(t)\,dt & \cdots & \int a_{nm}(t)\,dt \end{bmatrix}
$$

Diferenciación del producto de dos matrices. Si las matrices $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ se pueden diferenciar respecto a t, entonces

$$
\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(\mathrm{t})\mathbf{B}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}
$$

Aquí de nuevo la multiplicación de $\mathbf{A}(t)$ y $d\mathbf{B}(t)/dt$ [o $d\mathbf{A}(t)/dt$ y $\mathbf{B}(t)$] es, en general, no conmutativa.

Diferenciación de $A^{-1}(t)$. Si una matriz $\mathbf{A}(t)$ y su inversa $\mathbf{A}^{-1}(t)$ son diferenciables con respecto a t, entonces la derivada de $\mathbf{A}^{-1}(t)$ está dada por

$$\frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt} = -\mathbf{A}^{-1}(t)\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{A}^{-1}(t)$$

La derivada se puede obtener diferenciando $\mathbf{A}(t)\,\mathbf{A}^{-1}(t)$ con respecto a t. Como

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^{-1}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{A}^{-1}(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt}$$

y

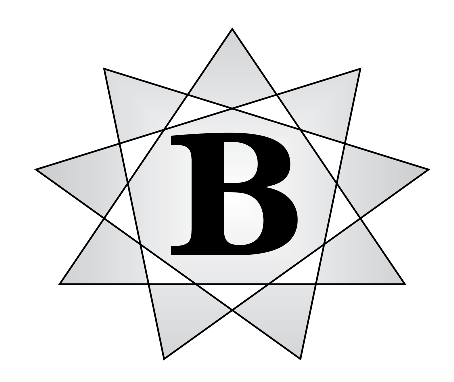
$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^{-1}(t)] = \frac{d}{dt}\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

se obtiene

$$A(t)\frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt} = -\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{A}^{-1}(t)$$

o

$$\frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt} = -\mathbf{A}^{-1}(t)\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{A}^{-1}(t)$$



Bibliografía

Anderson, B. D. O., and J. B. Moore, *Linear Optimal Control*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1971.

Athans, M., and P. L. Falb, *Optimal Control*: *An Introduction to the Theory and Its Applications*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.

Barnet, S., «Matrices, Polynomials, and Linear Time-Invariant Systems», *IEEE Trans*. *Automatic Control*, **AC-18** (1973), pp. 1-10.

Bayliss, L. E., *Living Control Systems*. London: English Universities Press Limited, 1966.

Bellman, R., *Introduction to Matrix Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1960.

Bode, H. W., *Network Analysis and Feedback Design*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1945.

Brogan, W. L., *Modern Control Theory*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1985.

Butman, S., and R. Sivan (Sussman), «On Cancellations, Controllability and Observability», *IEEE Trans*. *Automatic Control*, **AC-9** (1964), pp. 317-8.

Campbell, D. P., *Process Dynamics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1958.

Cannon, R., *Dynamics of Physical Systems*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1967.

Chang, P. M., and S. Jayasuriya, «An Evaluation of Several Controller Synthesis Methodologies Using a Rotating Flexible Beam as a Test Bed», *ASME J*. *Dynamic Systems*, *Measurement*, *and Control*, **117** (1995), pp. 360-73.

Cheng, D. K., *Analysis of Linear Systems*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1959.

Churchill, R. V., *Operational Mathematics*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1972.

Coddington, E. A., and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1955.

Craig, J. J., *Introduction to Robotics, Mechanics and Control*. Reading, MA: Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1986.

Cunningham, W. J., *Introduction to Nonlinear Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1958.

Dorf, R. C., and R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, 9th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.

Enns, M., J. R. Greenwood III, J. E. Matheson, and F. T. Thompson, «Practical Aspects of State-Space Methods Part I: System Formulation and Reduction», *IEEE Trans. Military Electronics*, **MIL-8** (1964), pp. 81-93.

Evans, W. R., «Graphical Analysis of Control Systems», *AIEE Trans. Part II*, **67** (1948), pp. 547-51.

Evans, W. R., «Control System Synthesis by Root Locus Method», *AIEE Trans Part II*, **69** (1950), pp. 6-9.

Evans, W. R., «The Use of Zeros and Poles for Frequency Response or Transient Response», *ASME Trans*. **76** (1954), pp. 1135-44.

Evans, W. R., *Control System Dynamics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1954.

Franklin, G. F., J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 3rd ed. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1994.

Friedland, B., *Control System Design*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1986.

Fu, K. S., R. C. Gonzalez, and C. S. G. Lee, *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1987.

Gantmacher, F. R., *Theory of Matrices*, Vols. I and II. New York: Chelsea Publishing Company, Inc., 1959.

Gardner, M. F, and J. L. Barnes, *Transients in Linear Systems*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1942.

Gibson, J. E., *Nonlinear Automatic Control*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1963.

Gilbert, E. G., «Controllability and Observability in Multivariable Control Systems», *J.SIAM Control*, ser. A, **1** (1963), pp. 128-51.

Graham, D., and R. C. Lathrop, «The Synthesis of Optimum Response: Criteria and Standard Forms», *AIEE Trans. Part II*, **72** (1953), pp. 273-88.

Hahn, W., *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1963.

Halmos, P. R., *Finite Dimensional Vector Spaces*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1958.

Higdon, D. T., and R. H. Cannon, Jr., «On the Control of Unstable Multiple-Output Mechanical Systems», *ASME Paper no*. **63**-*WA*-148, 1963.

Irwin, J. D., *Basic Engineering Circuit Analysis*. New York: Macmillan, Inc., 1984.

Jayasuriya, S., «Frequency Domain Design for Robust Performance Under Parametric, Unstructured, or Mixed Uncertainties», *ASME J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **115** (1993), pp. 439-51.

Kailath, T., *Linear Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1980.

Kalman, R. E., «Contributions to the Theory of Optimal Control», *Bol. Soc Mat. Mex*., **5** (1960), pp. 102-19.

Kalman, R. E., «On the General Theory of Control Systems», *Proc First Intern. Cong. IFAC*, Moscow, 1960, *Automatic and Remote Control*. London: Butterworths & Company Limited, 1961, pp. 481-92.

Kalman, R. E., «Canonical Structure of Linear Dynamical Systems», Proc. Natl. Acad. Sci., USA, **48** (1962), pp. 596-600.

Kalman, R. E., «When Is a Linear Control System Optimal?» *ASMEJ. Basic Engineering*, ser. D, **86** (1964), pp. 51-60.

Kalman, R. E., and J. E. Bertram, «Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov: I Continuous-Time Systems», *ASME J. Basic Engineering*, ser. D, **82** (1960), pp. 371-93.

Kalman, R. E., Y. C. Ho, and K. S. Narendra, «Controllability of Linear Dynamic Systems», in *Contributions to Differential Equations*, Vol. 1. New York: Wiley-Interscience Publishers, Inc., 1962.

Kautsky, J., and N. Nichols, «Robust Pole Assignment in Linear State Feedback», Intern. J. Control, **41** (1985), pp 1129-55.

Kreindler, E., and P. E. Sarachick, «On the Concepts of Controllability and Observability of Linear Systems», *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-9** (1964), pp. 129-36.

Kuo, B. C., *Automatic Control Systems*, 6th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991.

LaSalle, J. P., and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*. New York: Academic Press, Inc., 1961.

Levin, W. S., *The Control Handbook*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996.

Levin, W. S., *Control System Fundamentals*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2000.

Luenberger, D. G., «Observing the State of a Linear System», *IEEE Trans. Military Electr.*, **MIL-8** (1964), pp. 74-80.

Luenberger, D. G., «An Introduction to Observers», *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-16** (1971), pp. 596-602.

Lur'e, A. I., and E. N. Rozenvasser, «On Methods of Constructing Liapunov Functions in the Theory of Nonlinear Control Systems», *Proc. First Intern. Cong. IFAC*, Moscow, 1960, *Automatic and Remote Control*. London: Butterworths & Company Limited, 1961, pp. 928-33.

MathWorks, Inc., *The Student Edition of MATLAB*, version 5. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.

Melbourne, W. G., «Three Dimensional Optimum Thrust Trajectories for Power-Limited Propulsion Systems», *ARS J.*, **31** (1961), pp. 1723-8.

Melbourne, W. G., and C. G. Sauer, Jr., «Optimum Interplanetary Rendezvous with Power- Limited Vehicles», *AIAA J.*, **1** (1963), pp. 54-60.

Minorsky, N., *Nonlinear Oscillations*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1962.

Monopoli, R. V., «Controller Design for Nonlinear and Time-Varying Plants», *NASA* **CR152,** Jan., 1965.

Noble, B., and J. Daniel, *Applied Linear Algebra*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1977.

Nyquist, H., «Regeneration Theory», *Bell System Tech. J.*, **11** (1932), pp. 126-47.

Ogata, K., *State Space Analysis of Control Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1967.

Ogata, K., *Solving Control Engineering Problems with MATLAB*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1994.

Ogata, K., *Designing Linear Control Systems with MATLAB*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1994.

Ogata, K., *Discrete-Time Control Systems*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.

Ogata, K., *System Dynamics*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2004.

Ogata, K., *MATLAB for Control Engineers*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2008.

Phillips, C. L., and R. D. Harbor, *Feedback Control Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1988.

Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.

Rekasius, Z. V., «A General Performance Index for Analytical Design of Control Systems», *IRE Trans. Automatic Control*, **AC-6** (1961), pp. 217-22.

Rowell, G., and D. Wormley, *System Dynamics*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.

Schultz, W. C., and V. C. Rideout, «Control System Performance Measures: Past, Present, and Future», *IRE Trans. Automatic Control*, **AC-6** (1961), pp. 22-35.

Smith, R. J., *Electronics: Circuits and Devices*, 2d ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1980.

Staats, P. F., «A Survey of Adaptive Control Topics», *Plan B paper*, Dept. of Mech. Eng., University of Minnesota, March 1966.

Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications*. New York: Academic Press, Inc., 1976.

Truxal, J. G., *Automatic Feedback Systems Synthesis*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1955.

Umez-Eronini, E., *System Dynamics and Control*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Company, 1999.

Valkenburg, M. E., *Network Analysis*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1974.

Van Landingham, H. F., and W. A. Blackwell, «Controller Design for Nonlinear and Time-Varying Plants», *Educational Monograph*, College of Engineering, Oklahoma State University, 1967.

Webster, J. G., *Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, vol 4. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999.

Wilcox, R. B., «Analysis and Synthesis of Dynamic Performance of Industrial Organizations-The Application of Feedback Control Techniques to Organizational Systems», *IRE Trans. Automatic Control*, **AC-7** (1962), pp. 55-67.

Willems, J. C., and S. K. Mitter, «Controllability, Observability, Pole Allocation, and State Reconstruction», *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-16** (1971), pp. 582-95.

Wojcik, C. K., «Analytical Representation of the Root Locus», *ASME J. Basic Engineering*, ser. D, **86** (1964), pp. 37-43.

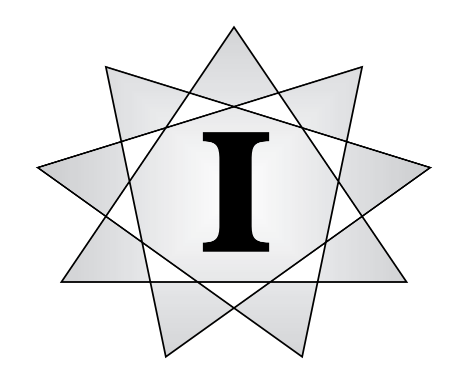
Wonham, W. M., «On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems», *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-12** (1967), pp. 660- 65.

Zhou, K., J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.

Zhou, K., and J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.

Ziegler, J. G., and N. B. Nichols, «Optimum Settings for Automatic Controllers», *ASME Trans.* **64** (1942), pp. 759-68.

Ziegler, J. G., and N. B. Nichols, «Process Lags in Automatic Control Circuits», *ASME Trans.* **65** (1943), pp. 433-44.



Índice analítico

A

D

E

F

G

H

I

K

L

M

N

O

P

R

S

T

V



Ingeniería de control moderna presenta un tratamiento riguroso y completo del análisis y diseño de sistemas de control. Los lectores encontrarán, en esta nueva edición del ya clásico libro de Ogata, un texto claro y comprensible escrito para estudiantes de ingeniería mecánica, eléctrica, aeroespacial o química, con numerosos ejemplos de todos estos campos.

En esta quinta edición se ha ampliado la utilización de MATLAB para obtener la respuesta de sistemas de control a diferentes entradas. Se demuestra la utilidad del enfoque de optimización computacional con MATLAB.

Otra novedad es la inclusión de nuevos problemas como ejemplos, que facilitan el aprendizaje y el seguimiento de los conceptos introducidos. Con el fin de proporcionar espacio a temas más importantes, se han suprimido ciertos materiales de ediciones previas que tienen una importancia secundaria. En su lugar, se presentan las tablas de transformada de Laplace y el desarrollo en fracciones simples con MATLAB en los Apéndices A y B respectivamente. En el Apéndice C se da un corto resumen sobre el análisis vectorial-matricial.

Prentice Hall
es un sello editorial de



www.pearsoneducacion.com

